MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

49. BAND

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
JENA

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY
E. HECKE G. HERGLOTZ O. PERRON
W. SÜSS W. THRELFALL H. WEYL

49. BAND

BERLIN
SPRINGER-VERLAG
1943/44

Unveränderter Nachdruck 1970
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Fotodruck: Mikrokopie GmbH, 8 München 22, Bruderstraße 9

Inhalt des 49. Bandes.

Seite

Baier, O.: Zum Meusnierschen Satz 148

Berichtigungen 792

Bilharz, H.: Zur Reduktion von Bewegungsgleichungen auf die Lagrangesche Form 583

Bödewadt, U. T.: Zur Iteration reeller Funktionen 497

Bol, G.: Über Nabelpunkte auf einer Eifläche 389

Claus, H. †: Neue Bedingungen für die Nichtfortsetzbarkeit von Potenzreihen 161

Dinghas, A.: Über eine algebraische Identität zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel von n positiven Zahlen 563

Dinghas, A.: Über eine isoperimetrische Aufgabe von Erhard Schmidt, I. . . 734

Eichler, M.: Eine Verallgemeinerung des Rungeschen Satzes 565

Fan, Ky: Entfernung zweier zufälligen Größen und die Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit 681

Hadwiger, H.: Über extremale Punktverteilungen in ebenen Gebieten . . 370

Hlawka, E.: Zur Geometrie der Zahlen 285

Horn, J.: Integration linearer Differentialgleichungen durch Laplacesche Integrale. I. 339

Horn, J.: Integration linearer Differentialgleichungen durch Laplacesche Integrale. II. 684

Hornich, H.: Über gewisse trigonometrische Integrale. II. 374

Kamke, E.: Bemerkungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung 256

Knopp, K.: Über eine Erweiterung des Äquivalenzsatzes der C- und H-Verfahren und eine Klasse regulär wachsender Funktionen 219

Lipka, St.: Über die absolute Konvergenz von Polynomreihen 192

Löbell, F.: Zur Theorie der Flächenabbildungen 427

Lorentz, G.: Über die Mittelwerte der Funktionen eines Orthogonalsystems 724

Lorenzen, P.: Ein Beitrag zur Gruppenaxiomatik 313

Lorenzen, P.: Eine Bemerkung zum Schreierschen Verfeinerungssatz . . . 647

Seite

Lyra, G.: Zur Theorie der C- und H-Summierbarkeit negativer Ordnung . . . 588

Meyer-König, W.: Die Umkehrung des Euler-Knoppschen und des Borelschen Limitierungsverfahrens auf Grund einer Lückenbedingung 151

Müller, M.: Abschätzung des Fehlers bei der Tangentennäherungskonstruktion von Pirani 380

Neder, L.: Über den Zusammenhang zweier Sätze von Lebesgue und Toeplitz 576

Neder, L.: Ein Satz über die absolute Konvergenz der Fourier-Reihe 644

Perron, O.: Studien über den Vielfachheitsbegriff und den Bézoutschen Satz 654

Petersson, H.: Ein Summationsverfahren für die Poincaréschen Reihen von der Dimension — 2 zu den hyperbolischen Fixpunktepaaren 441

Reisch, P.: Neue Lösungen der Funktionalgleichung für Matrizen $\Phi(X)\,\Phi(Y) = \Phi(X\,Y)$ 411

Rellich, F.: Die zulässigen Randbedingungen bei den singulären Eigenwertproblemen der mathematischen Physik. (Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung) 702

Schmidt, E.: Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im hyperbolischen und sphärischen Raum jeder Dimensionenzahl 1

Schröder, K.: Über die Ableitungen biharmonischer Funktionen am Rande 110

Strutt, M. J. O.: Reelle Eigenwerte verallgemeinerter Hillscher Eigenwertaufgaben 2. Ordnung 593

Tietze, H.: Über Simony-Knoten und Simony-Ketten mit vorgeschriebenen singulären Primzahlen für die Figur und für ihr Spiegelbild 351

Wagner, E.: Die Elementarteiler eines Polynoms in einer Matrix 328

Wagner, E.: Über Shodasche Matrizen und Polynome in einer Matrix . . . 516

Wittich, H.: Ganze Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$ 579

Zaubek, O.: Über nicht meßbare Punktmengen und nicht meßbare Funktionen 197

Berichtigungen dazu 792

Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im hyperbolischen und sphärischen Raum jeder Dimensionenzahl [1]).

Von

Erhard Schmidt in Berlin.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

§ 1. Ein elementarer Satz über Gleichungssysteme mit ebensoviel Gleichungen wie Unbekannten 2

§ 2. Anwendungen des Satzes über die Gleichungssysteme auf den Schnitt gegebener Mannigfaltigkeiten mit Scharen äquidistanter Flächen konstanten Krümmungsmaßes 7

§ 3. Die den äquidistanten Flächenscharen konstanten Krümmungsmaßes angepaßten Koordinatensysteme 23

§ 4. Die Differentiation von Oberflächenintegralen bei gegebener Maßbestimmung 30

§ 5. Die Abrundung nach dem Vorbilde von Schwarz 50

§ 6. Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im Euklidischen und hyperbolischen Raum 71

§ 7. Das zweite Abrundungstheorem 78

§ 8. Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im sphärischen Raum 103

§ 9. Weitere Anwendungen der Abrundung 107

[1]) Die vorliegende Abhandlung muß mehrfach auf frühere Arbeiten des Verf. über die isoperimetrische Aufgabe zurückverweisen — und zwar unter l. c.[1] auf die Arbeit „Über das isoperimetrische Problem im Raum von n Dimensionen", Math. Zeitschr. **44** (1939), S. 689—788; unter l. c.[2] auf die Arbeit „Über die isoperimetrische Aufgabe im n-dimensionalen Raum konstanter negativer Krümmung. I.", ebenda **46** (1940), S. 204—230; unter l. c.[3] auf die Arbeit „Die isoperimetrischen Ungleichungen auf der gewöhnlichen Kugel und für Rotationskörper im n-dimensionalen sphärischen Raum", ebenda **46** (1940), S. 743—794.

§ 1.

Ein elementarer Satz über Gleichungssysteme mit ebensoviel Gleichungen wie Unbekannten.

1) Satz I. Es seien die Funktionen

$$f_\nu(x_1 \dots x_m; \xi_1 \dots \xi_l), \qquad \nu = 1 \dots m, \tag{1}$$

der m Variablen $x_1 \dots x_m$ und der l Parameter $\xi_1 \dots \xi_l$ in dem offenen Gebiet O des (x, ξ)-Raumes, d. h. des Raumes mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1 \dots x_m; \xi_1 \dots \xi_l$ definiert und einmal stetig differenzierbar. Es liege das nach den $x_1 \dots x_m$ aufzulösende System der m Gleichungen

$$f_\nu = 0, \quad \nu = 1 \dots m, \tag{2}$$

vor. Man bezeichne dabei eine Lösung als „mehrfach", wenn in ihr die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial (f_1 \dots f_m)}{\partial (x_1 \dots x_m)} = 0 \tag{3}$$

ist, und als „ausgeartet", wenn in ihr sämtliche Unterdeterminanten m-ter Ordnung der aus m Zeilen und $m + l$ Spalten bestehenden Funktionalmatrix

$$\left\{ \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}, \frac{\partial f_\nu}{\partial \xi_\lambda} \right\} \begin{matrix} \nu = 1 \dots m, \\ \mu = 1 \dots m, \ \lambda = 1 \dots l, \end{matrix} \tag{4}$$

verschwinden. Jede ausgeartete Lösung ist also a fortiori auch mehrfach. Wir machen nun die alleinige Voraussetzung, daß in der beschränkten, abgeschlossenen Teilpunktmenge A des offenen Definitionsgebietes O ausgeartete Lösungen nicht vorkommen.

Dann bildet im l-dimensionalen Parameterraum, d. h. im Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $\xi_1 \dots \xi_l$ die Gesamtheit derjenigen Punkte, für welche das Gleichungssystem (2) *in A mehrfache Lösungen aufweist, eine beschränkte, abgeschlossene Punktmenge vom äußeren Inhalt Null.*

Dabei soll in der Folge, wenn vom äußeren Inhalt die Rede ist, stets der äußere Inhalt im Sinne von Riemann-Peano-Jordan gemeint sein.

Daß die Punktmenge beschränkt und abgeschlossen ist, leuchtet ohne weiteres ein. Denn im $(m + l)$-dimensionalen (x, ξ)-Raum bilden diejenigen Punkte der beschränkten abgeschlossenen Punktmenge A, welche den Gleichungen (2) und (3) genügen, wegen der Stetigkeit der linken Seiten dieser Gleichungen eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge, deren Projektion auf den Parameterraum daher auch beschränkt und abgeschlossen ist.

Läßt für einen Punkt des Parameterraumes das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen zu, so haben die entsprechenden Punkte des (x, ξ)-Raumes, da A beschränkt ist, mindestens einen Häufungspunkt, welcher,

da A abgeschlossen ist, auch A angehört. In einem solchen müssen dann die Gleichungen (2) und (3) gelten. Die betreffenden Punkte des Parameterraumes bilden daher einen Teil derjenigen beschränkten abgeschlossenen Punktmenge, deren äußerer Inhalt laut Satz I verschwindet. Also folgt aus Satz I a fortiori der

Zusatz zu Satz I. *Die Gesamtheit derjenigen Punkte des Parameterraumes, für welche das Gleichungssystem* (2) *in A unendlich viele Lösungen besitzt, hat den äußeren Inhalt Null.*

Beweis des Satzes I. Es sei $(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m; \bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_l)$ ein Punkt von A, in welchem die Gleichungen (2) und (3) gelten. Dann gibt es voraussetzungsgemäß in der Funktionalmatrix (4) mindestens eine Unterdeterminante m-ter Ordnung, welche an dieser Stelle nicht verschwindet. Es sei also im Punkte $(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m; \bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_l)$ die Unterdeterminante

$$\frac{\partial (f_1 \dots f_m)}{\partial (\xi_{\lambda_1} \dots \xi_{\lambda_k}; x_{\mu_{k+1}} \dots x_{\mu_m})} \neq 0. \tag{5}$$

Dabei bedeuten $\lambda_1 \dots \lambda_l$ und $\mu_1 \dots \mu_m$ Permutationen der Indizes $1 \dots l$ und $1 \dots m$, und es muß wegen (3) neben

$$k \leqq l \quad \text{und} \quad k \leqq m \text{ auch } k \geqq 1 \tag{6}$$

sein. Da die betrachtete Stelle dem Bereich A und mithin a fortiori dem offenen Definitionsgebiet O angehört, in welchem unsere Funktionen einmal stetig differenzierbar sind, so lassen sich auf Grund des Fundamentalsatzes über implizite Funktionen um den Punkt $(\bar{x}_{\mu_1} \dots \bar{x}_{\mu_k}; \bar{\xi}_{\lambda_{k+1}} \dots \bar{\xi}_{\lambda_l})$ als Mittelpunkt ein l-dimensionaler, abgeschlossener, achsenparalleler Würfel W des l-dimensionalen Raumes mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_{\mu_1} \dots x_{\mu_k}$; $\xi_{\lambda_{k+1}} \dots \xi_{\lambda_l}$ und um den Punkt $(\bar{x}_{\mu_{k+1}} \dots \bar{x}_{\mu_m}; \bar{\xi}_{\lambda_1} \dots \bar{\xi}_{\lambda_k})$ als Mittelpunkt ein m-dimensionaler, abgeschlossener, achsenparalleler Würfel W^* des m-dimensionalen Raumes mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_{\mu_{k+1}} \dots x_{\mu_m}$; $\xi_{\lambda_1} \dots \xi_{\lambda_k}$ von folgenden Eigenschaften bestimmen:

Der durch die beiden Würfel W und W^* als ihr sogenanntes topologisches Produkt definierte abgeschlossene Teilbereich $W W^*$ des $(m + l)$-dimensionalen (x, ξ)-Raumes liegt noch ganz in O; die Determinante auf der linken Seite von (5) bleibt im Bereich $W W^*$ von Null verschieden; die Gesamtheit derjenigen Punkte des Bereichs $W W^*$, welche das Gleichungssystem (2) befriedigen, wird gegeben durch Gleichungen von der Gestalt

$$\xi_{\lambda_\varrho} = \varphi_\varrho(x_{\mu_1} \dots x_{\mu_k}; \xi_{\lambda_{k+1}} \dots \xi_{\lambda_l}), \qquad \varrho = 1 \dots k, \tag{7}$$

$$x_{\mu_\varrho} = \varphi_\varrho(x_{\mu_1} \dots x_{\mu_k}; \xi_{\lambda_{k+1}} \dots \xi_{\lambda_l}), \qquad \varrho = k + 1 \dots m. \tag{8}$$

Dabei durchläuft der Punkt $(x_{\mu_1} \dots x_{\mu_k}; \xi_{\lambda_{k+1}} \dots \xi_{\lambda_l})$ den Würfel W, und die Funktionen $\varphi_1 \dots \varphi_m$ sind in diesem eindeutig definiert und einmal stetig differenzierbar. In den durch die Gleichungen (7) und (8) bestimmten Punkten des Bereichs $W\,W^*$, oder was das gleiche bedeutet, in denjenigen Punkten dieses Bereichs, welche dem Gleichungssystem (2) genügen, gelten nun, wenn man die totalen Differentiale

$$d f_\nu, \quad \nu = 1 \dots m, \quad d\varphi_\varrho, \quad \varrho = 1 \dots m, \tag{9}$$

als lineare homogene Formen der Unbestimmten $dx_1 \dots dx_m$; $d\xi_1 \dots d\xi_l$ betrachtet, in diesen die Identitäten

$$\begin{cases} d\xi_{\lambda_\varrho} - d\varphi_\varrho = \sum_1^m{}_\nu\, a_{\varrho\nu} d f_\nu, & \varrho = 1 \dots k, \\ dx_{\mu_\varrho} - d\varphi_\varrho = \sum_1^m{}_\nu\, a_{\varrho\nu} d f_\nu, & \varrho = k+1 \dots m. \end{cases} \tag{10}$$

Dabei ist die Matrix

$$\{a_{\varrho\nu}\} \quad \begin{matrix} \varrho = 1 \dots m, \\ \nu = 1 \dots m \end{matrix} \tag{11}$$

die Reziproke derjenigen Matrix, welche in dem betreffenden Punkte durch die Koeffizienten der Funktionaldeterminante (5) dargestellt wird, und deren Determinante daher im Bereich $W\,W^*$, wie festgesetzt, nicht verschwindet. Bezeichnet also a die Determinante der Matrix (11), so ist

$$a \frac{\partial (f_1 \dots f_m)}{\partial (\xi_{\lambda_1} \dots \xi_{\lambda_k};\ x_{\mu_{k+1}} \dots x_{\mu_m})} = 1. \tag{12}$$

Andererseits erhält man für die aus den Koeffizienten der Differentiale $dx_{\mu_1} \dots dx_{\mu_m}$ gebildete Determinante auf der linken Seite der Identitäten (10)

$$(-1)^k \frac{\partial (\varphi_1 \dots \varphi_k)}{\partial (x_{\mu_1} \dots \partial x_{\mu_k})} \tag{13}$$

und auf der rechten Seite

$$a \frac{\partial (f_1 \dots f_m)}{\partial (x_{\mu_1} \dots \partial x_{\mu_m})}. \tag{14}$$

Man hat also

$$\left| \frac{\partial (\varphi_1 \dots \varphi_k)}{\partial (x_{\mu_1} \dots x_{\mu_k})} \right| = |a| \left| \frac{\partial (f_1 \dots f_m)}{\partial (x_1 \dots x_m)} \right|, \tag{15}$$

wobei a durch (12) gegeben ist.

Man betrachte nun das mit den Gleichungen (7) gleichbedeutende Gleichungssystem

$$\begin{cases} \xi_{\lambda_\varrho} = \varphi_\varrho(x_{\mu_1} \dots x_{\mu_k};\ \xi_{\lambda_{k+1}} \dots \xi_{\lambda_l}), & \varrho = 1 \dots k \\ \xi_{\lambda_\varrho} = \xi_{\lambda_\varrho}, & \varrho = k+1 \dots l. \end{cases} \tag{16}$$

Man erhält für die Funktionaldeterminante dieses Systems

$$\frac{\partial(\xi_{\lambda_1} \dots \xi_{\lambda_l})}{\partial(x_{\mu_1} \dots x_{\mu_k}; \xi_{\lambda_{k+1}} \dots \xi_{\lambda_l})} = \frac{\partial(\varphi_1 \dots \varphi_k)}{\partial(x_{\mu_1} \dots x_{\mu_k})} \tag{17}$$

und wegen (15)

$$\left| \frac{\partial(\xi_{\lambda_1} \dots \xi_{\lambda_l})}{\partial(x_{\mu_1} \dots x_{\mu_k}; \xi_{\lambda_{k+1}} \dots \xi_{\lambda_l})} \right| = |a| \left| \frac{\partial(f_1 \dots f_m)}{\partial(x_1 \dots x_m)} \right|. \tag{18}$$

Wir ziehen jetzt den folgenden Hilfssatz heran[2]):

Es seien die Funktionen

$$v_\varrho = \psi_\varrho(u_1 \dots u_l), \quad \varrho = 1 \dots l,$$

in einem abgeschlossenen Würfel des (u)-Raumes, d. h. des Raumes mit den rechtwinkligen Koordinaten $u_1 \dots u_l$ definiert und einmal stetig differenzierbar. Dann entspricht der Gesamtheit derjenigen Punkte des Würfels, in welchen die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(v_1 \dots v_l)}{\partial(u_1 \dots u_l)} = 0$$

wird, im (v)-Raum, d. h. im Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $v_1 \dots v_l$, zunächst gewiß eine abgeschlossene beschränkte Punktmenge, die natürlich auch leer sein kann. *Diese Punktmenge hat den äußeren Inhalt Null.*

Nun verschwindet wegen (18) die Funktionaldeterminante des Gleichungssystems (16) in denjenigen Punkten des Würfels W, welchen im Bereich $W W^*$ Punkte entsprechen, die den Gleichungen (2) und (3) gleichzeitig genügen. Gemäß dem Hilfssatz besitzen also die durch die Gleichungen (16) bestimmten zugehörigen Punkte des Parameterraumes den äußeren Inhalt Null. Damit ist bewiesen, daß die Menge derjenigen Punkte des Parameterraumes, für welche das Gleichungssystem (2) im Bereich $W W^*$ mehrfache Lösungen aufweist, den äußeren Inhalt Null besitzt.

Nun bildet im $(m + l)$-dimensionalen (x, ξ)-Raum die Gesamtheit derjenigen Punkte von A, welche mehrfachen Lösungen entsprechen, eine beschränkte, abgeschlossene Punktmenge, die mit P bezeichnet werden möge. Zu jedem Punkt von P läßt sich ein Bereich $W W^*$ von den oben präzisierten Eigenschaften bestimmen, der den Punkt als inneren Punkt enthält. Nach dem Borelschen Satz wird daher P von endlich vielen solchen Bereichen überdeckt. Da in jedem die Projektion von P auf den Parameterraum, wie eben festgestellt, den äußeren Inhalt Null besitzt,

---

[2]) Der Leser findet einen einfachen Beweis dieses Hilfssatzes l. c.[1] § 4 III S. 712. Ein Beweis unter allgemeineren Voraussetzungen findet sich auch bei O. Haupt u. G. Aumann: „Differential- und Integralrechnung". Berlin, W. de Gruyter, 1938. Bd. 3, S. 139.

so hat die Vereinigungsmenge dieser Projektionen, welche die Projektion von P auf den Parameterraum darstellt, ebenfalls den äußeren Inhalt Null. Damit ist der Satz I bewiesen, aus welchem, wie schon bei der Formulierung erklärt, auch der Zusatz folgt.

2) Daß die Voraussetzung des Satzes I, laut welcher in dem betrachteten Bereich ausgeartete Lösungen nicht vorkommen dürfen, nicht überflüssig ist, und selbst bei seinem Zusatz, der doch bloß eine Konsequenz darstellt, nicht entbehrt werden kann, ist trivial. Bildet doch schon der Fall, daß eine der Gleichungen (2) eine identische Folge der übrigen ist, ein Beispiel dafür, daß ohne die betreffende Voraussetzung, die Behauptungen des Satzes und des Zusatzes nicht gesichert sind. Eindringender wird der Sachverhalt durch das folgende Beispiel illustriert:

Man definiere die Funktion

$$x^3 \cos \frac{\pi}{x}$$

für $x = 0$ durch Null und setze

$$f(x, \xi) = x^3 \cos \frac{\pi}{x} - \xi x^4.$$

Dann ist $f(x, \xi)$ für alle Werte von x und ξ einmal stetig differenzierbar und weist für ganzzahlige $n > \frac{1}{2}|\xi|$ an den Stellen $x = \frac{1}{2n}$ und $x = \frac{1}{2n+1}$ entgegengesetzte Vorzeichen auf. Die Gleichung

$$f(x, \xi) = 0$$

besitzt daher für *alle* Werte des Parameters ξ im Bereich $|x| \leqq 1$ unendlich viele Lösungen. Definiert man also etwa den Bereich A durch die Ungleichungen $|\xi| \leqq c$, $|x| \leqq 1$, wobei c eine beliebige positive Konstante bedeutet, so trifft die Behauptung des Zusatzes zum Satz I hier nicht zu. In der Tat ist auch die Voraussetzung nicht erfüllt, indem an der Stelle $x = 0$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ verschwinden, und mithin diese Stelle für alle Werte von ξ eine ausgeartete Lösung darstellt.

3) Will man sich von Voraussetzungen befreien, so gestattet der Satz I die folgende Abwandlung.

Es seien die Funktionen (1) *in dem offenen Gebiet O des (x, ξ)-Raumes definiert und einmal stetig differenzierbar. Dann besitzt im Parameterraum die Gesamtheit derjenigen Punkte, für welche das Gleichungssystem im Definitionsgebiet mehrfache Lösungen aufweist, die nicht ausgeartet sind, das Maß Null.*

Beweis. Es sei $(\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_m; \bar{\xi}_1 \ldots \bar{\xi}_l)$ eine mehrfache, nicht ausgeartete Lösung im Definitionsgebiet. Dann läßt sich, da dieses offen ist, eine den Punkt als inneren Punkt enthaltende, innerhalb des Definitionsgebietes bleibende, $(m + l)$-dimensionale, abgeschlossene Kugel A bestimmen, deren

Mittelpunkt rationale Koordinaten besitzt, und deren Radius ebenfalls rational und so klein ist, daß eine derjenigen Unterdeterminanten m-ter Ordnung der Funktionalmatrix (4), welche im Punkte $(\bar{x}_1 \ldots x_m; \bar{\xi}_1 \ldots \bar{\xi}_l)$ voraussetzungsgemäß nicht verschwinden, in der ganzen Kugel von Null verschieden bleibt. Mithin kommen in der abgeschlossenen Kugel A keine ausgearteten Lösungen vor. Gemäß dem Satze I besitzt daher die Gesamtheit derjenigen Punkte des Parameterraumes, für welche das Gleichungssystem in der Kugel mehrfache Lösungen aufweist, den äußeren Inhalt Null und mithin a fortiori auch das Maß Null. Da nun, im (x, ξ)-Raum jeder Punkt, der einer mehrfachen nicht ausgearteten Lösung entspricht, wie eben festgestellt, einer solchen Kugel angehört, da es ferner solcher Kugeln offenbar nur abzählbar viele gibt, und da die Vereinigungsmenge abzählbar vieler Punktmengen vom Maße Null ebenfalls das Maß Null besitzt, so ist der Beweis für unsere Behauptung erbracht.

§ 2.

Anwendungen des Satzes über die Gleichungssysteme auf den Schnitt gegebener Mannigfaltigkeiten mit Scharen äquidistanter Flächen konstanten Krümmungsmaßes.

1) Im n-dimensionalen Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $y_1 \ldots y_n$ sei eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit gegeben durch die Gleichungen

$$(1) \qquad y_\nu = y_\nu(t_1 \ldots t_k), \quad \nu = 1 \ldots n, \; k \leqq n-1,$$

wobei der Punkt $(t_1 \ldots t_k)$ einen beschränkten, abgeschlossenen Bereich T des (t)-Raumes durchläuft, der nur solche Randpunkte enthält, die Häufungspunkte von inneren Punkten sind. Der Bereich T lasse sich in ein offenes Gebiet T_0 einbetten, in welchem die Funktionen (1) noch definiert und *zweimal* stetig differenzierbar sind, und in welchem an keiner Stelle sämtliche Unterdeterminanten k-ter Ordnung der Funktionalmatrix

$$(2) \qquad \left\{\frac{\partial y_\nu}{\partial t_\varkappa}\right\} \quad \begin{matrix} \nu = 1 \ldots n, \\ \varkappa = 1 \ldots k, \end{matrix}$$

gleichzeitig verschwinden.

Eine Mannigfaltigkeit, welche diesen Voraussetzungen genügt, soll fortan kurz als eine „*beschränkte zweifach glatte*" Mannigfaltigkeit bezeichnet werden. Dabei ist festzustellen, daß bei einer eindeutigen und eindeutig umkehrbaren zweimal stetig differenzierbaren Transformation des (y)-Raumes eine beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit wieder in eine solche übergeht. Unsere Begriffsbestimmung ist daher auch unabhängig vom Koordinatensystem, sofern die in Betracht kommenden Koordinatentransformationen eindeutig, eindeutig umkehrbar und zweimal stetig differenzierbar sind.

Wird eine beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in einem Punkte, der einem inneren Punkte von T entspricht, von einer $(n-1)$-dimensionalen Ebene berührt, so ist das damit gleichbedeutend, daß die in dem Punkte ansetzenden k Vektoren mit den Komponenten

$$\frac{\partial y_1}{\partial t_\varkappa} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial t_\varkappa}, \quad \varkappa = 1 \ldots k,$$

in die Ebene fallen. Dieser Sachverhalt diene für den Fall, daß der Berührungspunkt einem Randpunkt von T entspricht, zur Definition der Berührung. Denn das entspricht, da jeder Randpunkt voraussetzungsgemäß Häufungspunkt von inneren Punkten ist, der Anschauung und ist zur Erhaltung der Stetigkeit offenbar geboten.

Eine Schar paralleler Ebenen wird durch Gleichungen von der Gestalt

$$\sum_1^n{}_\nu \xi_\nu y_\nu = \text{konst.}, \quad \sum_1^n{}_\nu \xi_\nu^2 > 0, \tag{3}$$

gegeben, wobei die Scharen auf die durch den Koordinatenanfangspunkt gehenden Geraden des (ξ)-Raumes eindeutig und eindeutig umkehrbar abgebildet sind.

Wird die gegebene zweifach glatte Mannigfaltigkeit (1) von einer Ebene einer solchen Schar berührt, so findet das seinen Ausdruck in den Gleichungen

$$f_\varkappa(t_1 \ldots t_k; \xi_1 \ldots \xi_n) = 0, \quad \varkappa = 1 \ldots k, \tag{4}$$

wobei die Funktionen $f_\varkappa$ definiert sind durch die Gleichungen

$$f_\varkappa(t_1 \ldots t_k; \xi_1 \ldots \xi_n) = \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial t_\varkappa} \xi_\nu. \tag{5}$$

Auf Grund der Voraussetzungen (1) sind nun die Funktionen $f_\varkappa$ in dem offenen Gebiet O des (t, ξ)-Raumes, welches durch T_0 und den gesamten (ξ)-Raum als sogenanntes topologisches Produkt dieser beiden Gebiete gegeben wird, definiert und einmal stetig differenzierbar. Ferner ist vermöge der über die Matrix (2) gemachten Voraussetzung in jedem Punkte von O mindestens eine der Funktionaldeterminanten von $f_1 \ldots f_k$ nach k unter den n Argumenten $\xi_1 \ldots \xi_n$ von Null verschieden. Es können daher im Gebiete O ausgeartete Lösungen des Gleichungssystems (4) nicht vorkommen. Betrachtet man jetzt die $t_1 \ldots t_k$ als die Variablen und die $\xi_1 \ldots \xi_n$ als die Parameter, so erfüllt das Gleichungssystem (4) die Voraussetzungen des Satzes I und seines Zusatzes für jeden beschränkten abgeschlossenen Teilbereich A von O. Wählt man als solchen das topologische Produkt von T mit einem beliebigen beschränkten, abgeschlossenen Bereich des (ξ)-Raumes, so ergibt der Zusatz zunächst das folgende Resultat:

Satz II. In jedem beschränkten, abgeschlossenen Bereich des (ξ)-Raumes besitzt die Gesamtheit derjenigen Punkte, welchen eine Ebenenschar entspricht, die eine gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berührt, den äußeren Inhalt Null.

Nun kann der äußere Inhalt einer unbeschränkten Punktmenge definiert werden als obere Grenze des äußeren Inhalts ihres Durchschnitts mit sämtlichen beschränkten, abgeschlossenen Punktmengen. Daher gilt der

Satz II'. *Die Gesamtheit derjenigen Punkte des (ξ)-Raumes, welchen eine Ebenenschar entspricht, die eine gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berührt, besitzt den äußeren Inhalt Null.*

Nun besteht diese Punktmenge aus Geraden durch den Koordinatenanfangspunkt, und der äußere Inhalt des Durchschnitts einer solchen Punktmenge mit der Vollkugel

$$\sum_1^n{}_\nu \xi_\nu^2 \leqq r^2$$

ist gleich dem Produkt von $\frac{1}{n} r^n$ mit dem auf der Einheitskugel gemessenen äußeren Inhalt der Projektion der Punktmenge auf diese. Daraus folgt leicht, daß die obigen Sätze II und II' gleichbedeutend sind mit dem

Satz II''. Auf der Einheitskugel

$$\sum_1^n{}_\nu \xi_\nu^2 = 1 \tag{6}$$

besitzt die Gesamtheit derjenigen Punkte, welchen eine Ebenenschar entspricht, die eine gegebene beschränkte, zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berührt, den äußeren Inhalt Null.

Eine unmittelbare Konsequenz des Satzes II'' ist der

Satz II'''. *Es seien im (y)-Raum endlich viele beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeiten — jede von beliebiger Dimensionszahl k — gegeben. Dann besitzt auf der Einheitskugel (6) die Gesamtheit derjenigen Punkte, welchen eine Ebenenschar entspricht, die eine der Mannigfaltigkeiten in unendlich vielen Punkten berührt, den äußeren Inhalt Null.*

2) Wird die gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit (1) im Punkte $(t_1 \dots t_k)$ von einer Kugel mit dem Mittelpunkt $(y_1^* \dots y_n^*)$ berührt, so findet das seinen Ausdruck in den Gleichungen

$$f_\varkappa(t_1 \dots t_k;\ y_1^* \dots y_n^*) = 0, \quad \varkappa = 1 \dots k, \tag{7}$$

wobei die Funktionen $f_\varkappa$ definiert sind durch die Gleichungen

$$f_\varkappa = \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial t_\varkappa} (y_\nu^* - y_\nu), \quad \varkappa = 1 \dots k, \tag{8}$$

in welchen y_ν durch $y_\nu(t_1 \dots t_k)$ zu ersetzen ist. Der Fall, daß der Punkt $(y_1^* \dots y_n^*)$ auf der Mannigfaltigkeit liegt, ist hierbei als Berührung mit der Kugel vom Radius Null, der sogenannten Nullkugel, anzusehen. Auf Grund der Voraussetzungen (1) sind die Funktionen $f_\varkappa$ in dem offenen Gebiet O des (t, y^*)-Raumes, welches durch das topologische Produkt von T_0 mit dem gesamten (y^*)-Raum gebildet wird, definiert und nach allen ihren Argumenten $t_1 \dots t_k; y_1^* \dots y_n^*$ einmal stetig differenzierbar. Ferner ist vermöge der über die Matrix (2) gemachten Voraussetzung mindestens eine der Funktionaldeterminanten der Funktionen $f_1 \dots f_k$ nach k unter den n Argumenten $y_1^* \dots y_n^*$ von Null verschieden. Diese Feststellungen führen genau so wie oben bei der Herleitung des Satzes II′ zum

Satz III. *Die Gesamtheit der Mittelpunkte der konzentrischen Kugelscharen, welche eine gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berühren, besitzt den äußeren Inhalt Null.*

3) Es sei hier zunächst gestattet, zur Einführung an einige allbekannte ganz elementare geometrische Zusammenhänge zu erinnern.

Im n-dimensionalen Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $y_1 \dots y_n$ stellt die Gleichung

$$\alpha_0 \sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 + 2 \sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu y_\nu + \alpha_{n+1} = 0 \tag{9}$$

für $\alpha_0 = 0$ eine Ebene dar; für $\alpha_0 \neq 0$ ist sie gleichbedeutend mit der Gleichung

$$\sum_1^n{}_\nu \left(y_\nu + \frac{\alpha_\nu}{\alpha_0}\right)^2 = \frac{\sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu^2 - \alpha_0 \alpha_{n+1}}{\alpha_0^2} \tag{10}$$

und stellt daher für

$$\sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu^2 - \alpha_0 \alpha_{n+1} > 0 \tag{11}$$

eine Kugel dar, deren Mittelpunkt die Koordinaten

$$\frac{-\alpha_1}{\alpha_0} \dots \frac{-\alpha_n}{\alpha_0} \tag{12}$$

besitzt, und deren Radius durch die Formel

$$+ \sqrt{\frac{\sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu^2 - \alpha_0 \alpha_{n+1}}{\alpha_0^2}} \tag{13}$$

gegeben wird.

Für

$$\sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu^2 - \alpha_0 \alpha_{n+1} = 0 \tag{14}$$

stellt die Gleichung die Kugel mit dem Radius Null, die sogenannte Nullkugel dar, welche lediglich aus ihrem Mittelpunkte besteht, der die Koordinaten

$$\frac{-\alpha_1}{\alpha_0} \dots \frac{-\alpha_n}{\alpha_0} \tag{15}$$

besitzt.

Für

$$\sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu^2 - \alpha_0 \alpha_{n+1} < 0 \tag{16}$$

gibt es überhaupt keine reellen Punkte, welche der Gleichung genügen. Die Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n, \alpha_{n+1}$ sollen als homogene Koordinaten der Kugeln und Ebenen betrachtet werden.

Sind $\alpha_0', \alpha_1' \dots \alpha_n', \alpha_{n+1}'$ und $\alpha_0'', \alpha_1'' \dots \alpha_n'', \alpha_{n+1}''$ die homogenen Koordinaten zweier Kugeln oder Ebenen, für welche (11) oder (14) gelten, oder mit anderen Worten, welche beide reelle Punkte besitzen, so zeigt die Gleichung

$$\sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu' \alpha_\nu'' - \tfrac{1}{2}(\alpha_0' \alpha_{n+1}'' + \alpha_{n+1}' \alpha_0'') = 0 \tag{17}$$

an, daß die beiden Kugeln sich reell und orthogonal schneiden. Dabei ist der Schnitt einer Nullkugel mit einer durch sie hindurchgehenden Kugel oder Ebene als orthogonal zu rechnen.

Man betrachte nun die Schar von Kugeln oder Ebenen, welche gegeben ist durch die Gleichung

$$\eta_0 \left(\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 + 1\right) + 2 \sum_1^n{}_\nu \eta_\nu y_\nu + \lambda \left(\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 - 1\right) = 0, \tag{18}$$

wobei λ den inneren Parameter der Schar bedeutet, und $\eta_0, \eta_1 \dots \eta_n$ nicht sämtlich verschwinden.

Für

$$\sum_1^n{}_\nu \eta_\nu^2 - \eta_0^2 > 0 \tag{19}$$

besteht die Schar aus der Gesamtheit der Kugeln oder Ebenen, welche durch den Schnitt der Einheitskugel

$$\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 - 1 = 0$$

mit derjenigen Kugel oder Ebene hindurchgehen, die durch die Gleichung

$$\eta_0 \left(\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 + 1\right) + 2 \sum_1^n{}_\nu \eta_\nu y_\nu = 0 \tag{20}$$

bestimmt wird, und mithin gemäß (19), (11), (17) die Einheitskugel reell und orthogonal schneidet und keine Nullkugel ist.

Ist

$$\sum_1^n{}_\nu\, \eta_\nu^2 - \eta_0^2 = 0, \tag{21}$$

so wird die Schar von denjenigen Kugeln oder Ebenen gebildet, welche mit der Einheitskugel nur den Punkt

$$\left(\frac{-\eta_1}{\eta_0} \dots \frac{-\eta_n}{\eta_0}\right) \tag{22}$$

gemein haben und sie daher in diesem Punkte berühren. Dabei liegen sie bis auf den Berührungspunkt für $\frac{\lambda}{\eta_0} > 0$ ganz im Innern der Einheitskugel und für $\frac{\lambda}{\eta_0} < 0$ ganz im Äußern. Da nämlich wegen (21) $\eta_0 \neq 0$ ist, so ist die Gleichung (18) gleichbedeutend mit der Gleichung

$$\sum_1^n{}_\nu \left(y_\nu + \frac{\eta_\nu}{\eta_0}\right)^2 + \frac{\lambda}{\eta_0}\left(\sum_1^n{}_\nu\, y_\nu^2 - 1\right) = 0, \tag{23}$$

und diese Gleichung zeigt, daß, abgesehen vom Berührungspunkt (22),

$$\sum_1^n{}_\nu\, y_\nu^2 - 1 \quad \text{und} \quad \frac{\lambda}{\eta_0}$$

entgegengesetztes Vorzeichen besitzen.

Es sei endlich

$$\sum_1^n{}_\nu\, \eta_\nu^2 - \eta_0^2 < 0. \tag{24}$$

Setzt man dann

$$\lambda_0 = + \sqrt{\eta_0^2 - \sum_1^n{}_\nu\, \eta_\nu^2}, \tag{25}$$

so wird in der Gleichung (18) die charakteristische quadratische Form

$$\sum_1^n{}_\nu\, \alpha_\nu^2 - \alpha_0 \alpha_{n+1} = \lambda^2 - \lambda_0^2. \tag{26}$$

Es gibt daher für $|\lambda| < \lambda_0$ überhaupt keine reellen Punkte, welche der Gleichung (18) genügen, während sie für $\lambda = \pm \lambda_0$ Nullkugeln darstellt. Diese liegen in den sich an der Einheitskugel spiegelnden beiden Punkten

$$\left(\frac{-\eta_1}{\eta_0 + \lambda_0} \dots \frac{-\eta_n}{\eta_0 + \lambda_0}\right), \quad \left(\frac{-\eta_1}{\eta_0 - \lambda_0} \dots \frac{-\eta_n}{\eta_0 - \lambda_0}\right). \tag{27}$$

Für $|\lambda| > \lambda_0$ stellt die Schar gewöhnliche Kugeln oder Ebenen dar. Weder diese noch die Nullkugeln schneiden die Einheitskugel. Sie liegen vielmehr für $\frac{\lambda}{\eta_0} > 0$ ganz im Innern derselben und für $\frac{\lambda}{\eta_0} < 0$ ganz im Äußern. Da

nämlich wegen (24) $\eta_0 \neq 0$ ist, so ist die Gleichung (18) gleichbedeutend mit der Gleichung

$$\sum_1^n{}_\nu \left(y_\nu + \frac{\eta_\nu}{\eta_0}\right)^2 + \frac{\lambda_0^2}{\eta_0^2} + \frac{\lambda}{\eta_0}\left(\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 - 1\right) = 0, \tag{28}$$

und diese Gleichung zeigt, daß

$$\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 - 1 \quad \text{und} \quad \frac{\lambda}{\eta_0}$$

entgegengesetztes Vorzeichen besitzen.

Endlich folgt noch aus dem bilinearen Charakter der Bedingung (17), daß eine Orthogonalkugel der Einheitskugel von den Kugeln einer Schar (18) entweder alle oder keine senkrecht schneidet. Insbesondere ist dadurch festgestellt, daß eine Orthogonalkugel der Einheitskugel entweder durch beide oder durch keine der beiden Nullkugeln einer Schar (18) vom Typus (24) hindurchgeht, und daß jede Kugel einer solchen Schar von allen Orthogonalkugeln der Einheitskugel, die durch eine der beiden Nullkugeln gehen, senkrecht geschnitten wird.

4) Es werde nun dem Innern der Einheitskugel, also dem Gebiete

$$\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 < 1 \tag{29}$$

die Maßbestimmung

$$ds^2 = 4\,\frac{\sum_1^n{}_\nu\, dy_\nu^2}{\left(1 - \sum_1^n{}_\nu y_\nu^2\right)^2} \tag{30}$$

aufgeprägt. Dadurch wird ein hyperbolischer Raum mit dem Krümmungsmaß -1 definiert. Die hyperbolischen Ebenen werden durch den im Innern der Einheitskugel verlaufenden Teil ihrer Orthogonalkugeln repräsentiert. Auf Grund von (11) und (17) werden sie durch die Gleichung

$$\eta_0\left(\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 + 1\right) + 2\sum_1^n{}_\nu \eta_\nu y_\nu = 0, \quad \sum_1^n{}_\nu \eta_\nu^2 - \eta_0^2 > 0 \tag{31}$$

dargestellt, so daß also die $\eta_0, \eta_1 \ldots \eta_n$ als homogene Ebenenkoordinaten auftreten.

Die Schar (18) stellt daher gemäß den oben gemachten Feststellungen im Fall (19) die Abstandsflächen der hyperbolischen Ebene mit den homogenen Koordinaten $\eta_0, \eta_1 \ldots \eta_n$ dar. Im Falle (21) stellt sie für $\frac{\lambda}{\eta_0} > 0$ die Schar äquidistanter Orizykelflächen dar, deren Euklidische Modellkugeln im Punkte

$$\left(\frac{-\eta_1}{\eta_0} \ldots \frac{-\eta_n}{\eta_0}\right) \tag{32}$$

die Innenseite der Einheitskugel berühren.

Im Falle (24) stellt endlich die Gleichung (18) für $|\lambda| > \lambda_0$ und $\frac{\lambda}{\eta_0} > 0$ hyperbolische Kugeln dar. Nun wird gemäß den obigen Feststellungen jede dieser Kugeln von allen hyperbolischen Ebenen, welche durch die im Innern der Einheitskugel gelegene Nullkugel gehen, senkrecht geschnitten. Die Nullkugel bildet daher den hyperbolischen Mittelpunkt jeder Kugel der Schar. Wir sehen also, daß die Gleichung (18) im Falle (24) für $\frac{\lambda}{\eta_0} > 0$ die Schar konzentrischer hyperbolischer Kugeln darstellt, deren Mittelpunkt $(y_1^* \dots y_n^*)$ gemäß (27) durch die Gleichungen

$$(33) \qquad y_\nu^* = \frac{-\eta_\nu}{\eta_0 + \operatorname{sign}(\eta_0)\,\lambda_0} = -\operatorname{sign}(\eta_0)\,\frac{\eta_\nu}{\lambda_0 + |\eta_0|}$$

bestimmt ist.

5) Es sei nun in unserem hyperbolischen Raum (29), (30) die beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit (1) gegeben.

Wird die Mannigfaltigkeit im Punkte $(t_1 \dots t_k)$ von einer Fläche der Schar (18) berührt, so findet das seinen Ausdruck in den Gleichungen

$$(34) \qquad f_\varkappa(t_1 \dots t_k, \lambda;\ \eta_0, \eta_1 \dots \eta_n) = 0, \quad \varkappa = 1 \dots k+1,$$

wobei die Funktionen $f_\varkappa$ definiert sind durch die Gleichungen

$$(35) \qquad f_\varkappa = \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial t_\varkappa}[\eta_\nu + y_\nu(\eta_0 + \lambda)], \quad \varkappa = 1 \dots k,$$

$$(36) \qquad f_{k+1} = (\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 + 1)\eta_0 + 2\sum_1^n{}_\nu y_\nu \eta_\nu + (\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 - 1)\lambda = 0,$$

in welchen y_ν durch $y_\nu(t_1 \dots t_k)$ zu ersetzen ist. Der Fall, daß eine Nullkugel auf der Mannigfaltigkeit liegt, ist dabei als Berührung zu rechnen. Auf Grund der Voraussetzungen (1) sind nun die Funktionen $f_\varkappa$ in dem offenen Gebiet O des (t, λ, η)-Raumes, welches durch das topologische Produkt von T_0 mit der gesamten (λ)-Geraden und dem gesamten (η)-Raum gebildet wird, definiert und einmal stetig differenzierbar. Man hat bei festem $t_1 \dots t_k$ und mithin auch festem $y_1 \dots y_n$ und bei festem η_0

$$(37) \qquad d f_\varkappa = \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial t_\varkappa}(d\eta_\nu + y_\nu d\lambda), \quad \varkappa = 1 \dots k,$$

$$(38) \qquad d f_{k+1} = 2\sum_1^n{}_\nu y_\nu d\eta_\nu + (\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 - 1)d\lambda.$$

Wir wollen nun zeigen, daß in jedem Punkte des Gebietes O mindestens eine der Funktionaldeterminanten von $f_1 \dots f_{k+1}$ nach $k+1$ unter den $n+1$ Argumenten $\lambda, \eta_1 \dots \eta_n$ von Null verschieden ist. Andernfalls gäbe es nämlich in O einen Punkt, in welchem die nicht sämtlich verschwindenden

Koeffizienten $c_1 \dots c_{k+1}$ sich so bestimmen ließen, daß identisch in den Differentialen $d\lambda, d\eta_1 \dots d\eta_n$

$$\sum_1^{k+1} {}_\varkappa c_\varkappa df_\varkappa = 0 \tag{39}$$

wird. Setzt man hier

$$d\eta_\nu = -y_\nu d\lambda, \qquad \nu = 1 \dots n,$$

so wird

$$df_\varkappa = 0, \quad \varkappa = 1 \dots k, \qquad df_{k+1} = -\left(\sum_1^n {}_\nu y_\nu^2 + 1\right) d\lambda.$$

Mithin müßte $c_{\varkappa+1} = 0$ sein. Die Identität (39) erhielt also die Gestalt

$$\sum_1^k {}_\varkappa c_\varkappa df_\varkappa = 0,$$

welche für $d\lambda = 0$ als Identität in den Differentialen $d\eta_1 \dots d\eta_n$ zu der über die Matrix (2) gemachten Voraussetzung im Widerspruch steht.

Damit ist festgestellt, daß das Gleichungssystem (34), wenn man $t_1 \dots t_k$ und λ als die Variablen betrachtet und $\eta_0, \eta_1 \dots \eta_n$ als die Parameter, die Voraussetzungen des Satzes I und seines Zusatzes für jede beschränkte, abgeschlossene Punktmenge A des Gebietes O erfüllt. Es sei nun R ein beliebiger beschränkter abgeschlossener Bereich des (η)-Raumes. Man definiere die Punktmenge A durch die Gesamtheit derjenigen Punkte von O, welche der Gleichung

$$f_{k+1} = 0 \tag{42}$$

genügen, wobei der Punkt $(t_1 \dots t_k; \eta_0, \eta_1 \dots \eta_n)$ das topologische Produkt von T und R durchläuft. Da durch diese Gleichung λ wegen (29) als stetige Funktion von $t_1 \dots t_k, \eta_0, \eta_1 \dots \eta_n$ bestimmt wird, so ist der Bereich A beschränkt und abgeschlossen. Auf Grund des Zusatzes zum Satz I geleitet nunmehr genau derselbe Weg, der über den Satz II zum Satz II′ führte, zu dem

Satz IV. Im Euklidischen $(\eta_0, \eta_1 \dots \eta_n)$-Raum besitzt die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche vermöge der Gleichung (18) eine Flächenschar bestimmen, die im hyperbolischen Raum (29), (30) eine gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berührt, den äußeren Inhalt Null.

Beschränkt man sich auf das durch (19) bestimmte Teilgebiet des (η)-Raumes, so ergibt sich a fortiori der

Satz V. *Im $(n+1)$-dimensionalen Euklidischen Raum der homogenen hyperbolischen Ebenenkoordinaten* (31) *besitzt die Gesamtheit derjenigen Punkte, welchen hyperbolische Ebenen entsprechen, deren Abstandsflächenschar eine*

gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berührt, den äußeren Inhalt Null.

Da nach den oben gemachten Feststellungen die Voraussetzungen des Satzes I und seines Zusatzes erfüllt bleiben, wenn η_0 festgehalten wird, und nur $\eta_1 \dots \eta_n$ als die Parameter betrachtet werden, so bleibt, wenn $\eta_0 = 0$ oder $\eta_0 = 1$ gehalten wird, der Satz IV in bezug auf den nunmehr n-dimensionalen $(\eta_1 \dots \eta_n)$-Raum gültig. Im Falle $\eta_0 = 1$ gilt das a fortiori unter der Einschränkung (24), die dann in der Gestalt

$$\sum_1^n{}_\nu \eta_\nu^2 < 1 \tag{43}$$

erscheint. So erhalten wir den

Satz VI. Im Innern der n-dimensionalen Euklidischen Einheitskugel (43) besitzt die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche vermöge der Gleichung (18) für $\eta_0 = 1$ eine hyperbolische konzentrische Kugelschar bestimmen, die eine gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berührt, den äußeren Inhalt Null.

Der Mittelpunkt $(y_1^* \dots y_n^*)$ der konzentrischen Kugelschar ist in diesem Fall gemäß (25), (33) gegeben durch die Gleichungen

$$y_\nu^* = \frac{-\eta_\nu}{1+\sqrt{1-\varrho^2}}, \quad \nu = 1 \dots n, \quad r = \frac{\varrho}{1+\sqrt{1-\varrho^2}}, \tag{44}$$

oder

$$\eta_\nu = \frac{-2\,y_\nu^*}{1+r^2}, \qquad \varrho = \frac{2r}{1+r^2}, \qquad \nu = 1 \dots n,$$

wobei

$$r^2 = \sum_1^n{}_\nu y_\nu^{*2}, \quad r \geqq 0, \quad \varrho^2 = \sum_1^n{}_\nu \eta_\nu^2, \quad \varrho \geqq 0$$

gesetzt ist.

Nun erhält man, wenn $Q(\eta_1 \dots \eta_n)$ den Quotienten des hyperbolischen Volumenelementes des $(y_1^* \dots y_n^*)$-Raumes durch das entsprechende Euklidische des $(\eta_1 \dots \eta_n)$-Raumes bedeutet,

$$Q(\eta_1 \dots \eta_n) = \left(\frac{2}{1-r^2}\right)^n \left|\frac{\partial (y_1^* \dots y_n^*)}{\partial (\eta_1 \dots \eta_n)}\right|. \tag{45}$$

Ist

$$r_1 < 1,$$

so ist auch der entsprechende Wert

$$\varrho_1 = \frac{2r_1}{1+r_1^2} = 1 - \frac{(1-r_1)^2}{1+r_1^2} < 1$$

und es folgt aus

$$r \leqq r_1$$
$$\varrho \leqq \varrho_1.$$

Mithin gilt für $r \leqq r_1$

$$Q(\eta_1 \dots \eta_n) \leqq \left(\frac{2}{1-r_1^2}\right)^n \operatorname{Max}_{\varrho \leqq \varrho_1} \left|\frac{\partial(y_1^* \dots y_n^*)}{\partial(\eta_1 \dots \eta_n)}\right|. \tag{46}$$

Da das Maximum auf der rechten Seite als Maximum des absoluten Betrages einer stetigen Funktion in einem beschränkten, abgeschlossenen Bereich endlich ist, so entspricht einer Punktmenge vom äußeren Euklidischen Inhalt Null des $(\eta_1 \dots \eta_n)$-Raumes vermöge der Gleichungen (44) im $(y_1^* \dots y_n^*)$-Raum eine Bildpunktmenge, deren Durchschnitt mit der Kugel $r \leqq r_1$ den äußeren hyperbolischen Inhalt Null besitzt. Da das für jedes $r_1 < 1$ der Fall ist, so ist der äußere hyperbolische Inhalt der gesamten Bildpunktmenge gleich Null. Wir haben also als Konsequenz des Satzes VI den

Satz VI'. *Die Gesamtheit der Mittelpunkte der hyperbolischen konzentrischen Kugelscharen, welche eine gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berühren, besitzt den äußeren hyperbolischen Inhalt Null.*

6) Jetzt kommen wir zu den Scharen äquidistanter Orizykelflächen.

Wird die gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit (1) im Punkte $(t_1 \dots t_k)$ von einer Orizykelfläche einer solchen Schar berührt, so findet das gemäß (18), (21), (32) seinen Ausdruck in den Gleichungen

$$\sum_1^n{}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial t_\varkappa}[\eta_\nu + y_\nu(\eta_0 + \lambda)] = 0, \quad \varkappa = 1 \dots k, \tag{47}$$

$$(\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 + 1)\eta_0 + 2\sum_1^n{}_\nu y_\nu \eta_\nu + (\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 - 1)\lambda = 0, \tag{48}$$

$$\sum_1^n{}_\nu \eta_\nu^2 - \eta_0^2 = 0. \tag{49}$$

Dabei dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\eta_0 > 0 \tag{50}$$

voraussetzen. Dann muß, wie aus der unter (23) begründeten Feststellung hervorgeht, auch

$$\lambda > 0 \tag{51}$$

sein. Nun gilt die Identität

$$\sum_1^n{}_\nu \eta_\nu^2 - \eta_0^2 + (\eta_0 + \lambda)\{\eta_0(\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 + 1) + 2\sum_1^n{}_\nu \eta_\nu y_\nu + \lambda(\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 - 1)\}$$
$$= \sum_1^n{}_\nu [\eta_\nu + y_\nu(\eta_0 + \lambda)]^2 - \lambda^2. \tag{52}$$

Das Gleichungssystem (47), (48), (49) ist daher gleichbedeutend mit dem Gleichungssystem

$$f_\varkappa(t_1 \dots t_k, \lambda, \eta_0; \eta_1 \dots \eta_n) = 0, \quad \varkappa = 1 \dots k+2, \tag{53}$$

wobei die Funktionen $f_\varkappa$ definiert sind durch die Gleichungen

$$(54) \qquad f_\varkappa = \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial t_\varkappa} [\eta_\nu + y_\nu(\eta_0 + \lambda)], \quad \varkappa = 1 \dots k,$$

$$(55) \qquad f_{k+1} = (\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 + 1)\eta_0 + 2\sum_1^n{}_\nu y_\nu \eta_\nu + (\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 - 1)\lambda,$$

$$(56) \qquad f_{k+2} = \sum_1^n{}_\nu [\eta_\nu + y_\nu(\eta_0 + \lambda)]^2 - \lambda^2,$$

in welchen y_ν durch $y_\nu(t_1 \dots t_k)$ zu ersetzen ist. Auf Grund der Voraussetzungen (1) sind die Funktionen $f_\varkappa$ in dem offenen Gebiet O, welches durch das topologische Produkt von T_0 mit den beiden Halbgeraden $\eta_0 > 0$ und $\lambda > 0$ und dem gesamten $(\eta_1 \dots \eta_n)$-Raum gebildet wird, definiert und nach allen $k + n + 2$ Argumenten einmal stetig differenzierbar. Man hat bei festen $t_1 \dots t_k$ und mithin auch festem $y_1 \dots y_n$

$$(57) \qquad df_\varkappa = \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial t_\varkappa} [d\eta_\nu + y_\nu(d\eta_0 + d\lambda)], \quad \varkappa = 1 \dots k,$$

$$(58) \qquad df_{k+1} = 2\sum_1^n{}_\nu y_\nu d\eta_\nu + (\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 + 1)d\eta_0 + (\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 - 1)d\lambda,$$

$$(59) \qquad df_{k+2} = 2\sum_1^n{}_\nu [\eta_\nu + y_\nu(\eta_0 + \lambda)][d\eta_\nu + y_\nu(d\eta_0 + d\lambda)] - 2\lambda\, d\lambda.$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß in jedem Punkt von O mindestens eine der Funktionaldeterminanten von $f_1 \dots f_{k+2}$ nach $k + 2$ unter den $n + 2$ Argumenten λ, η_0, $\eta_1 \dots \eta_n$ von Null verschieden ist. Andernfalls gäbe es nämlich in O einen Punkt, in welchem die nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten $c_1 \dots c_{k+2}$ sich so bestimmen ließen, daß identisch in den Differentialen $d\lambda$, $d\eta_0$, $d\eta_1 \dots d\eta_n$

$$(60) \qquad \sum_1^{k+2}{}_\varkappa c_\varkappa df_\varkappa = 0$$

wird. Setzt man hier

$$(61) \qquad d\eta_\nu = -y_\nu(d\eta_0 + d\lambda), \quad \nu = 1 \dots n,$$

so wird

$$(62) \qquad df_\varkappa = 0, \ \varkappa = 1 \dots k, \quad df_{k+1} = (1 - \sum_1^n{}_\nu y_\nu^2)\, d\eta_0 - (1 + \sum_1^n{}_\nu y_\nu^2)\, d\lambda,$$

$$df_{k+2} = -2\lambda\, d\lambda.$$

Man hätte daher identisch in $d\eta_0$ und $d\lambda$

$$(63) \qquad c_{k+1}(1 - \sum_1^n{}_\nu y_\nu^2)\, d\eta_0 - \{c_{k+2}\, 2\lambda + c_{k+1}(1 + \sum_1^n{}_\nu y_\nu^2)\}\, d\lambda = 0.$$

Wegen (29) wäre also $c_{k+1} = 0$ und mithin wegen (51) auch $c_{k+2} = 0$. Die Identität (60) erhielte also die Gestalt

$$\sum_1^k{}_\varkappa\, c_\varkappa\, df_\varkappa = 0, \tag{61}$$

welche für $d\eta_0 = 0$, $d\lambda = 0$ als Identität in den Differentialen $d\eta_1 \ldots d\eta_n$ im Widerspruch zu der über die Matrix (2) getroffenen Voraussetzung steht.

Damit ist festgestellt, daß das Gleichungssystem (53), wenn man $t_1 \ldots t_k$, λ, η_0 als die Variablen betrachtet und $\eta_1 \ldots \eta_n$ als die Parameter, die Voraussetzungen des Satzes I und seines Zusatzes für jede beschränkte, abgeschlossene Punktmenge A von O erfüllt. Es bezeichne nun $R(\alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \beta$, den durch die Ungleichungen

$$\alpha^2 \leqq \sum_1^n{}_\nu\, \eta_\nu^2 \leqq \beta^2 \tag{65}$$

definierten beschränkten, abgeschlossenen Bereich des $(\eta_1 \ldots \eta_n)$-Raumes. Man definiere den Bereich A durch die Gesamtheit derjenigen Punkte des Gebietes O, welche den Gleichungen

$$f_{k+1} = 0, \quad f_{k+2} = 0$$

genügen, wobei der Punkt $(t_1 \ldots t_k; \eta_1 \ldots \eta_n)$ das topologische Produkt von T und $R(\alpha, \beta)$ durchläuft. Nun ist dieses Gleichungspaar gleichbedeutend mit dem Gleichungspaar (48), (49), und diese Gleichungen bestimmen wegen (50), (29) η_0 und λ als stetige Funktionen von $t_1 \ldots t_k; \eta_1 \ldots \eta_n$. Daher ist der so definierte Bereich A in der Tat beschränkt und abgeschlossen. Der Zusatz zum Satz I liefert mithin zunächst das Ergebnis:

Im Bereich $R(\alpha, \beta)$ besitzt die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche vermöge (18) und (21) eine Flächenschar bestimmen, die eine gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berührt, den äußeren Inhalt Null.

Läßt man jetzt α gegen Null und β gegen unendlich konvergieren, so ergibt sich der

Satz VII. Im Euklidischen $(\eta_1 \ldots \eta_n)$-Raum besitzt die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche vermöge (18) und (21) eine Orizykelflächenschar bestimmen, die eine gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berührt, den äußeren Inhalt Null.

Auf demselben Wege, der vom Satz II′ zum Satz II″ führte, gelangen wir wegen (32) und (49) vom Satz VII zu dem

Satz VII′. *Man bezeichne den Punkt, in welchem alle Modellkugeln einer Orizykelflächenschar die Einheitskugel gemeinsam berühren, als den absoluten*

Punkt der Schar. Dann besitzt die Gesamtheit der absoluten Punkte der Orizykelflächenscharen, welche eine gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berühren, auf der Einheitskugel den äußeren Inhalt Null.

7) Wir kommen jetzt zu den entsprechenden Sätzen in der sphärischen Geometrie.

Man projiziere die Kugel

$$\sum_0^n{}_\nu\, \xi_\nu^2 = 1 \tag{66}$$

vom Punkte

$$\xi_0 = 1,\ \xi_\nu = 0, \qquad \nu = 1 \dots n \tag{67}$$

aus stereographisch auf die Ebene

$$\xi_0 = 0. \tag{68}$$

Bezeichnet man im stereographischen Bilde die ξ_ν-Koordinate mit y_ν, so ergibt sich

$$\begin{cases} y_\nu = \dfrac{\xi_\nu}{1-\xi_0}, \quad \nu = 1 \dots n, \\ \xi_0 = \dfrac{\sum_1^n{}_\nu\, y_\nu^2 - 1}{\sum_1^n{}_\nu\, y_\nu^2 + 1}, \quad \xi_\nu = \dfrac{2\,y_\nu}{1 + \sum_1^n{}_\mu\, y_\mu^2}, \quad \nu = 1 \dots n, \end{cases} \tag{69}$$

$$\sum_1^n{}_\nu\, dy_\nu^2 = \left(\frac{1}{1-\xi_0}\right)^2 \sum_0^n{}_\nu\, d\xi_\nu^2, \qquad \sum_0^n{}_\nu\, d\xi_\nu^2 = 4\,\frac{\sum_1^n{}_\nu\, dy_\nu^2}{\left(1 + \sum_1^n{}_\nu\, y_\nu^2\right)^2}. \tag{70}$$

Wir erhalten also die sphärische Geometrie mit dem Krümmungsmaß 1, indem wir dem $(y_1 \dots y_n)$-Raum die Maßbestimmung

$$ds^2 = 4\,\frac{\sum_1^n{}_\nu\, dy_\nu^2}{\left(1 + \sum_1^n{}_\nu\, y_\nu^2\right)^2} \tag{71}$$

aufprägen.

Auf der Sphäre (66) wird eine Schar konzentrischer Kugeln gegeben durch die Schnitte der Sphäre mit der Ebenenschar

$$\sum_0^n{}_\nu\, \eta_\nu \xi_\nu + \lambda = 0, \qquad -\sqrt{\sum_0^n{}_\nu\, \eta_\nu^2} \leqq \lambda \leqq \sqrt{\sum_1^n{}_\nu\, \eta_\nu^2}, \tag{72}$$

wobei λ den inneren Parameter der Schar bildet, $\lambda = 0$ der sphärischen Ebene der Schar entspricht, und die beiden diametralen Mittelpunkte auf der Sphäre die Koordinaten

$$(73) \qquad \frac{-\eta_\nu}{\sqrt{\sum_0^n{}_\mu \eta_\mu^2}}, \quad \frac{\eta_\nu}{\sqrt{\sum_0^n{}_\mu \eta_\mu^2}}, \qquad \nu = 0, 1 \ldots n$$

besitzen. Dabei liegen der erste dieser beiden Mittelpunkte und der Nordpol der stereographischen Projektion bei positivem Vorzeichen von $(\eta_0 + \lambda)$ auf entgegengesetzten, und bei negativem auf der gleichen Seite der betreffenden Kugel der Schar oder, was dasselbe besagt, der sie tragenden Ebene (72). Die Einführung von (69) in (72) ergibt als Gleichung der Kugelschar im (y)-Raum

$$(74) \qquad \eta_0\left(\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 - 1\right) + 2\sum_1^n{}_\nu \eta_\nu y_\nu + \lambda\left(\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 + 1\right) = 0.$$

Für die Koordinaten der beiden Mittelpunkte im (y)-Raum erhält man aus (73) und (69)

$$(75) \qquad \frac{-\eta_\nu}{\sqrt{\sum_0^n{}_\mu \eta_\mu^2} + \eta_0}, \quad \frac{\eta_\nu}{\sqrt{\sum_0^n{}_\mu \eta_\mu^2} - \eta_0}, \qquad \nu = 1 \ldots n.$$

Dabei liegt der erste dieser beiden Mittelpunkte bei positivem Vorzeichen von $(\eta_0 + \lambda)$ im Innern, und bei negativem im Äußern der durch die Gleichung (74) bestimmten Euklidischen Modellkugel.

Es sei nun auf der Sphäre (66) eine beschränkte zweifache glatte Mannigfaltigkeit gegeben. Dann wähle man das Koordinatensystem so, daß der Nordpol (67) der stereographischen Projektion nicht auf der Mannigfaltigkeit liegt. Dann bleibt sie in den stereographischen Koordinaten eine beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit, die durch die Gleichungen (1) gegeben sei. Wird die Mannigfaltigkeit im Punkte $t_1 \ldots t_k$ von einer Kugel der konzentrischen Schar (74) berührt, so findet das seinen Ausdruck in den Gleichungen

$$(76) \qquad f_\varkappa(t_1 \ldots t_k, \lambda; \eta_0, \eta_1 \ldots \eta_n) = 0, \qquad \varkappa = 1 \ldots k+1,$$

wobei die Funktionen $f_\varkappa$ definiert sind durch die Gleichungen

$$(77) \qquad f_\varkappa = \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial t_\varkappa}[\eta_\nu + y_\nu(\eta_0 + \lambda)], \qquad \varkappa = 1 \ldots k,$$

$$(78) \qquad f_{k+1} = \left(\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 - 1\right)\eta_0 + 2\sum_1^n{}_\nu y_\nu \eta_\nu + \left(\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 + 1\right)\lambda,$$

in welchen y_ν durch $y_\nu(t_1 \dots t_k)$ zu ersetzen ist. Der Fall, daß einer der beiden durch (75) gegebenen Mittelpunkte der Schar auf der Mannigfaltigkeit liegt, ist dabei als Berührung mit der aus diesem Punkte bestehenden Nullkugel zu rechnen. Die Funktionen $f_\varkappa$, $\varkappa = 1 \dots k+1$, sind in dem offenen Gebiet O des (t, λ, η)-Raumes, welches durch das topologische Produkt von T_0 mit der gesamten (λ)-Geraden und dem gesamten (η)-Raum gebildet wird, definiert und einmal stetig differenzierbar. Die Funktionen (77) stimmen mit den Funktionen (35) überein, während die Funktion (78) aus der Funktion (36) durch Vertauschung der Koeffizienten von η_0 und λ hervorgeht. Aus der entsprechenden Feststellung hinsichtlich der Funktionen (35), (36) ergibt sich daher durch Vertauschung von η_0 und λ das Resultat, daß in jedem Punkte von O mindestens eine der Funktionaldeterminanten der durch (77), (78) definierten Funktionen $f_1 \dots f_{k+1}$ nach $k+1$ unter den $n+1$ Argumenten $\eta_0, \eta_1 \dots \eta_n$ von Null verschieden ist.

Damit ist festgestellt, daß das Gleichungssystem (76), wenn man $t_1 \dots t_k$ und λ als die Variablen betrachtet und $\eta_0, \eta_1 \dots \eta_n$ als die Parameter, die Voraussetzungen des Satzes I und seines Zusatzes für jede beschränkte, abgeschlossene Punktmenge A des Gebietes O erfüllt. Es sei nun R ein beliebiger beschränkter abgeschlossener Bereich des (η)-Raumes. Man definiere die Punktmenge A durch die Gesamtheit derjenigen Punkte von O, welche der Gleichung

$$f_{k+1} = 0$$

genügen, wobei der Punkt $(t_1 \dots t_k; \eta_0, \eta_1 \dots \eta_n)$ das topologische Produkt von T und R durchläuft. Da durch diese Gleichung λ als stetige Funktion von $t_1 \dots t_k; \eta_0, \eta_1 \dots \eta_n$ bestimmt wird, so ist der Bereich beschränkt und abgeschlossen. Auf Grund des Zusatzes zum Satz I geleitet nunmehr genau derselbe Weg, welcher über den Satz II zum II′ führte, zunächst zu dem Ergebnis:

Im Euklidischen $(\eta_0, \eta_1 \dots \eta_n)$-Raum besitzt die Gesamtheit derjenigen Punkte, welchen vermöge der Gleichung (74) auf der Sphäre (66) eine konzentrische Kugelschar entspricht, die eine gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berührt, den äußeren Inhalt Null.

Aus dieser Feststellung folgert man wegen (73) genau so, wie der Satz II″ aus dem Satz II′ abgeleitet wurde, den

Satz VIII. *Im sphärischen Raum besitzt die Gesamtheit der Mittelpunkte der konzentrischen Kugelscharen, welche eine gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berühren, den äußeren Inhalt Null.*

8) Die Ausführungen dieses Paragraphen mögen in den folgenden beiden Ergänzungen, die unmittelbar einleuchten, ihren Abschluß finden:

Satz IX. *Dieselbe Verallgemeinerung, durch welche der Satz* II'' *zum Satz* II''' *erweitert wurde, gilt für alle im laufenden Paragraphen bewiesenen Sätze, d. h. alle diese Sätze bleiben bestehen, wenn es sich nicht um eine beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit handelt, sondern um endlich viele mit beliebigen Dimensionenzahlen.*

Da bei einer Punktmenge vom außeren Inhalt Null dieser Inhalt auch bei Einbeziehung aller ihrer Häufungspunkte gleich Null bleibt, so ergibt sich endlich der

Satz X. Der Zusatz zum Satz I sowie alle Sätze des laufenden Paragraphen behalten ihre Gültigkeit, wenn die Punktmengen, deren äußerer Inhalt laut Behauptung verschwindet, durch Einverleibung aller ihrer Häufungspunkte abgeschlossen werden.

§ 3.

Die den äquidistanten Flächenscharen konstanten Krümmungsmaßes angepaßten Koordinatensysteme.

1) Ist im n-dimensionalen Euklidischen Raum eine Schar paralleler Ebenen gegeben, so können wir das rechtwinklige Koordinatensystem so wählen, daß die Schar aus den Ebenen

$$x_1 = \text{konst} \tag{1}$$

besteht. Man hat dann

$$ds^2 = dx_1^2 + \sum_2^n{}_\nu dx_\nu^2 = dx_1^2 + \tfrac{1}{4}\left(4 \sum_2^n{}_\nu dx_\nu^2\right). \tag{2}$$

Ist eine Schar konzentrischer Kugeln gegeben, so wähle man ihren Mittelpunkt zum Anfangspunkt O des rechtwinkligen Koordinatensystems $\xi_1 \ldots \xi_n$. Es sei nun P ein von O verschiedener Punkt mit den Koordinaten $\xi_1 \ldots \xi_n$ und P' seine Projektion von O aus auf die Einheitskugel. Man projiziere diese stereographisch vom Punkte

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = \xi_3 = \cdots = \xi_n = 0 \tag{3}$$

aus auf die Ebene

$$\xi_1 = 0.$$

Sind dann $\xi_1' \dots \xi_n'$ die Koordinaten von P', und $0, x_2 \dots x_n$ die Koordinaten des stereographischen Bildes, so erhält man entsprechend § 2 (69), (70)

$$(4)\quad x_\nu = \frac{\xi_\nu'}{1-\xi_1'},\ \nu = 2 \dots n,\quad \xi_1' = \frac{\sum_2^n{}_\nu x_\nu^2 - 1}{\sum_2^n{}_\nu x_\nu^2 + 1},\quad \xi_\nu' = \frac{2x_\nu}{1 + \sum_2^n{}_\mu x_\mu^2},\ \nu = 2 \dots n,$$

$$(5)\quad \sum_1^n{}_\nu d\xi_\nu'^2 = \left(\frac{2}{1 + \sum_2^n{}_\nu x_\nu^2}\right)^2 \sum_2^n{}_\nu dx_\nu^2.$$

Setzt man

$$(6)\quad x_1^2 = \sum_1^n{}_\nu \xi_\nu^2,\quad x_1 > 0,$$

so hat man

$$(6')\quad \xi_\nu' = \frac{\xi_\nu}{x_1},\quad \nu = 1 \dots n,$$

$$(7)\quad ds^2 = \sum_1^n{}_\nu d\xi_\nu^2 = \sum_1^n [d(x_1\xi_\nu')]^2$$
$$= \left(\sum_1^n{}_\nu \xi_\nu'^2\right) dx_1^2 + 2\left(\sum_1^n{}_\nu \xi_\nu' d\xi_\nu'\right) x_1 dx_1 + x_1^2 \sum_1^n{}_\nu d\xi_\nu'^2.$$

Da nun

$$(8)\quad \sum_1^n{}_\nu \xi_\nu'^2 = 1 \quad \text{und mithin} \quad \sum_1^n{}_\nu \xi_\nu' d\xi_\nu' = 0$$

ist, so ergibt die Einführung von (5)

$$(9)\quad ds^2 = dx_1^2 + x_1^2 \left(\frac{2}{1 + \sum_2^n{}_\nu x_\nu^2}\right)^2 \sum_2^n{}_\nu dx_\nu^2,\quad x_1 > 0.$$

Hierbei ist zu beachten, daß im Falle

$$(10)\quad \xi_2 = \xi_3 = \cdots = \xi_n = 0$$

die Transformationsformeln (4) für $\xi_1 \geqq 0$ also $\xi_1 = x_1$ nicht definiert sind. Sonst ist die Transformation regulär, eindeutig und eindeutig umkehrbar.

Der gegebenen konzentrischen Kugelschar entspricht die Ebenenschar

$$x_1 = \text{konst.}$$

2) Es sei auf der n-dimensionalen Einheitssphäre, d. h. auf der Oberfläche einer $(n+1)$-dimensionalen Kugel vom Radius 1 eine Schar konzentrischer n-dimensionaler Kugeln gegeben. Man wähle die rechtwinkligen Koordinaten $\eta_0, \eta_1 \dots \eta_n$ so, daß die Sphäre die Gleichung

$$(11)\quad \sum_0^n{}_\nu \eta_\nu^2 = 1$$

erhält, und die beiden diametralen Mittelpunkte der konzentrischen Kugelschar in die Schnittpunkte der η_0-Achse mit der Sphäre fallen. Nun definiere man zunächst die Koordinaten $y_1 \dots y_n$, indem man in der stereographischen Projektion § 2 (69), (70) ξ_ν durch η_ν ersetzt. Man erhält

$$(12) \qquad y_\nu = \frac{\eta_\nu}{1-\eta_0}, \quad \nu = 1 \dots n, \quad ds^2 = \sum_0^n{}_\nu d\eta_\nu^2 = \left(\frac{2}{1+\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2}\right)^2 \sum_1^n{}_\nu dy_\nu^2.$$

Der auf der Sphäre gegebenen konzentrischen Kugelschar entspricht jetzt im Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $y_1 \dots y_n$ eine konzentrische Kugelschar um den Koordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt. Ersetzt man jetzt in den Gleichungen (4), (5), (7), (9) ξ_ν durch y_ν und x_1 durch x_1^*, während $x_2 \dots x_n$ ungeändert stehenbleiben, so werden die $y_1 \dots y_n$ in die $x_1^*, x_2 \dots x_n$ transformiert, und man erhält

$$(13) \qquad x_1^{*2} = \sum_1^n{}_\nu y_\nu^2, \qquad x_1^* > 0,$$

$$(14) \qquad x_\nu = \frac{y_\nu}{x_1^* - y_1}, \qquad \nu = 2 \dots n,$$

$$(15) \qquad \sum_1^n{}_\nu dy_\nu^2 = dx_1^{*2} + x_1^{*2}\left(\frac{2}{1+\sum_2^n{}_\nu x_\nu^2}\right)^2 \sum_2^n dx_\nu^2.$$

Die Einführung in (12) ergibt

$$(16) \qquad ds^2 = \left(\frac{2}{1+x_1^{*2}}\right)^2 dx_1^{*2} + \left(\frac{2x_1^*}{1+x_1^{*2}}\right)^2 \left(\frac{2}{1+\sum_2^n{}_\nu x_\nu^2}\right)^2 \sum_2^n{}_\nu dx_\nu^2.$$

Durch die Substitution

$$(17) \qquad x_1^* = \operatorname{tg}\frac{x_1}{2}, \quad 0 < x_1 < \pi,$$

erhält man schließlich das Resultat

$$(18) \qquad ds^2 = dx_1^2 + \sin^2 x_1 \left(\frac{2}{1+\sum_2^n{}_\nu x_\nu^2}\right)^2 \sum_2^n{}_\nu dx_\nu^2, \quad 0 < x_1 < \pi,$$

wobei x_1 alle Werte zwischen 0 und π und $x_2 \dots x_n$ alle reellen Werte durchlaufen. Wie aus der im Anschluß an (10) gemachten Feststellung hervorgeht, sind die Transformationsformeln (13), (14) für

$$(19) \qquad y_2 = y_3 = \cdots = y_n = 0, \quad y_1 \geqq 0$$

oder, was wegen des ersten Gleichungssystems (12) gleichbedeutend ist, für

$$(19') \qquad \eta_2 = \eta_3 = \cdots = \eta_n = 0, \quad \eta_1 \geqq 0$$

nicht definiert. Sonst ist die Transformation regulär, eindeutig und eindeutig umkehrbar. Der gegebenen konzentrischen Kugelschar entspricht im Modellraum $(x_1 \dots x_n)$ die Ebenenschar

$$x_1 = \text{konst.} \tag{20}$$

Diese Modellebenenschar stellt gleichzeitig auch die Abstandsflächen der durch die Gleichung

$$x_1 = \frac{\pi}{2}$$

bestimmten sphärischen Ebene dar, welche die beiden Mittelpunkte der konzentrischen Kugelschar zu Polen besitzt. Die konzentrische Kugelschar kann nun gleichzeitig auch als Schar der Abstandsflächen zu dieser sphärischen Ebene aufgefaßt werden. Es ist bei dieser Auffassung der Schar zweckmäßig, $x_1 = \frac{\pi}{2} - x_1'$ zu setzen. Die Maßbestimmung (27) erhält dann die Gestalt

$$ds^2 = dx_1'^2 + \cos^2 x_1 \left(\frac{2}{1 + \sum_2^n{}_\nu x_\nu^2} \right)^2 \sum_2^n{}_\nu dx_\nu^2. \tag{21}$$

Dabei erhält die sphärische Ebene die Gleichung

$$x_1' = 0,$$

während die Schar der Abstandsflächen durch die Gleichung

$$x_1' = c = \text{konst}, \quad -\frac{\pi}{2} < c < \frac{\pi}{2}; \tag{21'}$$

dargestellt wird.

3) Es sei im hyperbolischen Raum vom Krümmungsmaß -1 eine konzentrische Kugelschar gegeben. Man wähle das Modell § 2 (29), (30) so, daß der gegebene Mittelpunkt der Kugelschar zum Mittelpunkt der Einheitskugel (29) wird. Der gegebenen konzentrischen Kugelschar entspricht dann im Modellraum $(y_1 \dots y_n)$ die Euklidische Kugelschar um den Koordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt. Bei der Transformation (13), (14), (15) erhält man

$$x_1^{*2} = \sum_1^n{}_\nu y_\nu^2, \qquad 0 < x_1^* < 1, \tag{22}$$

$$x_\nu = \frac{y_\nu}{x_1^* - y_1}, \qquad \nu = 2 \dots n, \tag{23}$$

$$\sum_1^n{}_\nu dy_\nu^2 = dx_1^{*2} + x_1^{*2} \left(\frac{2}{1 + \sum_2^n{}_\nu x_\nu^2} \right)^2 \sum_2^n{}_\nu dx_\nu^2. \tag{24}$$

Die Einführung dieser Gleichung in § 2 (30) ergibt

$$(25) \qquad ds^2 = \left(\frac{2}{1-x_1^{*2}}\right)^2 dx_1^{*2} + \left(\frac{2x_1^*}{1-x_1^{*2}}\right)^2 \left(\frac{2}{1+\sum_2^n{}_\nu x_\nu^2}\right)^2 \sum_2^n{}_\nu dx_\nu^2.$$

Durch die Substitution

$$(26) \qquad x_1^* = \operatorname{tg} h \frac{x_1}{2}$$

erhält man schließlich das Resultat

$$(27) \qquad ds^2 = dx_1^2 + \sinh^2 x_1 \left(\frac{2}{1+\sum_2^n{}_\nu x_\nu^2}\right)^2 \sum_2^n{}_\nu dx_\nu^2, \qquad x_1 > 0,$$

wobei x_1 alle positiven Werte durchläuft und $x_2 \ldots x_n$ alle reellen Werte. Für

$$(28) \qquad y_2 = y_3 = \cdots = y_n = 0, \quad y_1 \geqq 0$$

sind die Transformationsformeln (23) nicht definiert. Sonst ist die Transformation regulär eindeutig und eindeutig umkehrbar. Der gegebenen konzentrischen Kugelschar entspricht im Modellraum $(x_1 \ldots x_n)$ die Ebenenschar

$$(29) \qquad x_1 = \text{konst.}$$

4) Es sei im hyperbolischen Raum vom Krümmungsmaß -1 eine Schar äquidistanter Orizykelflächen gegeben. Man transformiere das Modell § 2 (29), (30) durch reziproke Radien so in den Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1^*, x_2 \ldots x_n$, daß die Einheitskugel in die Ebene

$$(30) \qquad x_1^* = 0,$$

ihr Inneres in den Halbraum

$$(31) \qquad x_1^* > 0$$

und der gemeinsame Berührungspunkt der Orizykelflächenschar mit der Einheitskugel in den unendlich fernen Punkt übergeht. Im so transformierten Modell geht die gegebene Orizykelflächenschar in die Ebenenschar

$$(32) \qquad x_1^* = \text{konst}, \quad \text{konst} > 0,$$

über, und man erhält die Maßbestimmung

$$(33) \qquad ds^2 = \frac{dx_1^{*2}}{x_1^{*2}} + \frac{1}{x_1^{*2}} \sum_2^n{}_\nu dx_\nu^2 \text{ [3]}.$$

---

[3]) Eine Ausführung der kleinen Rechnung findet der Leser auch l. c.[2] S. 230. Dabei ist x, $y_1 \ldots y_{n-1}$ durch x_1^*, $x_2 \ldots x_n$, ξ_0, $\xi_1 \ldots \xi_{n-1}$ durch $y_1 \ldots y_n$, dS durch ds zu ersetzen und zu beachten, daß in der letzten Zeile unter dem vorletzten Summenzeichen der Index 0 stehen muß anstatt des Druckfehlers 1.

Durch die Substitution

$$x_1^* = e^{x_1} \tag{34}$$

erhält man schließlich das Resultat

$$ds^2 = dx_1^2 + e^{-2x_1} \sum_2^n{}_\nu dx_\nu^2 = dx_1^2 + \frac{e^{-2x_1}}{4}\left(4 \sum_2^n{}_\nu dx_\nu^2\right), \tag{35}$$

wobei die $x_1 \ldots x_n$ alle reellen Werte durchlaufen.

Der gegebenen Schar äquidistanter Orizykelflächen entspricht die Ebenenschar

$$x_1 = \text{konst.} \tag{36}$$

5) Es sei endlich im hyperbolischen Raum mit dem Krümmungsmaß -1 eine Schar von Abstandsflächen einer Ebene gegeben.

Man transformiere zunächst das Modell § 2 (29), (30) durch reziproke Radien so in den Halbraum

$$z_1 > 0 \tag{37}$$

mit den rechtwinkligen Koordinaten $z_1 \ldots z_n$, daß die Einheitskugel in die Ebene

$$z_1 = 0 \tag{38}$$

übergeht und die gegebene hyperbolische Ebene die Gleichung

$$z_2 = 0 \tag{39}$$

erhält. Dann entsprechen den Abstandsflächen der Schar im neuen Modell die Ebenen

$$z_2 + \lambda z_1 = 0. \tag{40}$$

Ferner hat man für die hyperbolische Maßbestimmung

$$ds^2 = \frac{1}{z_1^2} \sum_1^n{}_\nu z_\nu^2 \text{ [4]}. \tag{41}$$

Setzt man bei Berücksichtigung der Ungleichung $z_1 > 0$

$$z_1 = z_{n+1}\cos\varphi, \quad z_2 = z_{n+1}\sin\varphi, \quad z_{n+1} > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \tag{42}$$

so erhält man

$$ds^2 = \frac{d\varphi^2}{\cos^2\varphi} + \frac{1}{\cos^2\varphi}\left\{\frac{1}{z_{n+1}^2} \sum_3^{n+1}{}_\nu dz_\nu^2\right\}, \tag{43}$$

---

[4]) Siehe Anmerkung [3]), S. 27.

und die Abstandsflächen erhalten die Gleichung

$$\varphi = \text{konst}, \quad -\frac{\pi}{2} < \text{konst} < \frac{\pi}{2}. \tag{44}$$

Transformiert man jetzt den $(n-1)$-dimensionalen Halbraum

$$z_{n+1} > 0$$

mit den rechtwinkligen Koordinaten $z_3, z_4 \ldots z_{n+1}$ durch reziproke Radien so in das Gebiet

$$\sum_{2}^{n}{}_{\nu} x_\nu^2 < 1, \tag{45}$$

daß die Ebene

$$z_{n+1} = 0$$

in die Einheitskugel übergeht, so ergibt sich

$$\frac{1}{z_{n+1}^2} \sum_{3}^{n+1}{}_{\nu} dz_\nu^2 = \left(\frac{2}{1 - \sum_{2}^{n}{}_{\nu} x_\nu^2}\right)^2 \sum_{2}^{n}{}_{\nu} dx_\nu^2 \text{ [5]}. \tag{46}$$

Man setze ferner

$$\sinh x_1 = \operatorname{tg} \varphi. \tag{47}$$

Dann ist wegen $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ x_1 eindeutig und eindeutig umkehrbar durch φ bestimmt, und man hat

$$\cosh^2 x_1 = 1 + \sinh^2 x_1 = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

$$\cosh x_1 = \frac{1}{\cos \varphi}. \tag{48}$$

Ferner ergibt die Differentiation von (47)

$$\cosh x_1 \, dx_1 = \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \tag{49}$$

und bei Einführung von (48)

$$\frac{d\varphi}{\cos \varphi} = dx_1. \tag{50}$$

Die Einführung von (46), (48), (50) in (43) ergibt schließlich

$$ds^2 = dx_1^2 + \cosh^2 x_1 \left(\frac{2}{1 - \sum_{2}^{n}{}_{\nu} x_\nu^2}\right)^2 \sum_{2}^{n}{}_{\nu} dx_\nu^2, \tag{51}$$

wobei x_1 alle reellen Werte durchläuft, während der Punkt $(x_2 \ldots x_n)$ auf das Innere der Einheitskugel (45) beschränkt bleibt.

---

[5]) Siehe Anmerkung [3]).

Wie die Gleichungen (2), (9), (18), (21), (27), (35), (51) zeigen, erscheint die Maßbestimmung in den unseren Flächenscharen angepaßten Koordinatensystemen stets in der Gestalt

$$(52) \qquad ds^2 = dx_1^2 + G(x_1)^2 \left(\frac{2}{1 + K \sum_2^n{}_\nu x_\nu^2} \right)^2 \sum_2^n{}_\nu dx_\nu^2,$$

wobei man K auf die Werte $0, -1, +1$ beschränken kann, und $G(x_1)$ eine Funktion von x_1 bezeichnet.

§ 4.

Die Differentiation von Oberflächenintegralen bei gegebener Maßbestimmung.

1) Die nachstehenden Ausführungen greifen vielfach auf Begriffe und Sätze zurück, welche l. c.[1] entwickelt worden sind, und welche ich daher, um Wiederholungen zu vermeiden, im wesentlichen als bekannt voraussetzen muß. Zunächst seien hierzu die folgenden Feststellungen vorausgeschickt:

Wie aus der Erklärung der Begriffe eines k-dimensionalen Grundgebildes ($1 \leqq k \leqq n-1$), einer k-dimensionalen regulären Mannigfaltigkeit und eines n-dimensionalen regulären Körpers im n-dimensionalen Raum unmittelbar einleuchtet, bleiben die definierenden Eigenschaften dieser Gebilde bei einer eindeutigen und eindeutig umkehrbaren zweimal stetig differenzierbaren Transformation des n-dimensionalen Raumes invariant, und die Gebilde gehen daher in ebensolche im transformierten Raum über. Die Definition dieser Gebilde ist also auch unabhängig vom Koordinatensystem, sofern die in Betracht kommenden Koordinatentransformationen eindeutig, eindeutig umkehrbar und zweimal stetig differenzierbar sind.

Ein k-dimensionales Grundgebilde im n-dimensionalen Raum ($1 \leqq k \leqq n-1$) ist gemäß der l. c.[1] § 5 II gegebenen Definition auf ein k-dimensionales achsenparalleles Parallelotop eines k-dimensionalen Parameterraumes mit den rechtwinkligen Koordinaten $t_1 \ldots t_k$ eindeutig, eindeutig umkehrbar und zweimal stetig differenzierbar bezogen. Damit ist das Grundgebilde noch keine beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit im Sinne von § 2 (1); denn dazu fehlt noch die Einbettung. Um diese zu erreichen, bezeichne man einen solchen Teil eines Grundgebildes, der einem ganz im Innern des Bezugsparallelotops liegenden, zu diesem etwa ähnlichen und konzentrischen Parallelotop entspricht, als ein eingebettetes Grundgebilde. Ein solches stellt dann auch eine beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit dar, wobei das Innere des umfassenden Bezugsparallelotops, von welchem ausgegangen wurde, als das von der Definition geforderte offene Einbettungsgebiet T_0 dient.

Man bezeichne nun die Gesamtheit derjenigen Punkte einer Mannigfaltigkeit M, welche von einem ihrer Punkte P um weniger als δ, $\delta > 0$,

entfernt sind, als die δ-Umgebung von P auf M. Dann gehört zu den l. c.[1] § 6 III S. 725, § 5 III formulierten Definitionseigenschaften einer k-dimensionalen regulären Mannigfaltigkeit M_k im n-dimensionalen Raum die folgende:

Zu jedem Punkte P von M_k gibt es ein $\delta_P > 0$ und ein k-dimensionales Grundgebilde G_k, so daß die δ_P-Umgebung von P auf M_k vom Innern von G_k überdeckt wird. Da man erforderlichenfalls δ_P verkleinern kann, so darf angenommen werden, daß G_k ein eingebettetes Grundgebilde und mithin auch eine beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit ist. Da nun M_k beschränkt und abgeschlossen ist, so kann man unter den Kugeln mit dem Mittelpunkt P und dem Radius δ_P gemäß dem BORELschen Satz schon endlich viele so auswählen, daß M_k von ihnen überdeckt wird. Also wird M_k auch von den entsprechenden endlich vielen zweifach glatten Mannigfaltigkeiten überdeckt. Da die endlich vielen k'-dimensionalen $(1 \leqq k' < k)$ Randmannigfaltigkeiten einer k-dimensionalen regulären Mannigfaltigkeit definitionsgemäß ebenfalls reguläre k'-dimensionale Mannigfaltigkeiten sind, so haben wir das Ergebnis, daß eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit einschließlich ihrer sämtlichen Randmannigfaltigkeiten niedrigerer Dimensionenzahl von endlich vielen beschränkten zweifach glatten Mannigfaltigkeiten überdeckt wird, deren jede natürlich die Dimensionenzahl der Mannigfaltigkeit besitzt, zu deren Überdeckung sie verwendet wird.

Wir sagen, eine k-dimensionale reguläre Mannigfaltigkeit im n-dimensionalen Raum werde in einem ihrer Punkte von einer durch ihn gehenden $(n-1)$-dimensionalen Ebene berührt, wenn diese die k-dimensionale Tangentialebene des Punktes enthält, oder wenn der Punkt einer k'-dimensionalen Randmannigfaltigkeit $(1 \leqq k' < k)$ angehört, deren k'-dimensionale Tangentialebene in die Ebene fällt, oder endlich, wenn der Punkt einer 0-dimensionalen Randmannigfaltigkeit angehört, d. h. ein Eckpunkt ist. Die oben präzisierte Überdeckung der regulären Mannigfaltigkeit durch endlich viele beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeiten gewährleistet die Gültigkeit des Satzes II‴, § 2 und seiner Erweiterung Satz X, § 2. Dieser Sachverhalt läßt sich auch folgendermaßen aussprechen:

Man bezeichne eine Richtung in bezug auf eine gegebene k-dimensionale reguläre Mannigfaltigkeit im n-dimensionalen Euklidischen Raum als „*eigentlich singulär*“, wenn die Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten von der zu dieser Richtung senkrechten $(n-1)$-dimensionalen Ebene im oben festgestellten Sinn berührt wird, und als „*singulär*“, wenn sie eigentlich singulär oder Häufungsrichtung eigentlich singulärer Richtungen ist. Man markiere jede Richtung durch das Paar der beiden diametralen „Richtungspunkte“, in welchen die Einheitskugel von dem parallelen Durchmesser geschnitten wird. *Dann bilden auf der Einheitskugel die Richtungspunkte der singulären Richtungen eine abgeschlossene Punktmenge vom äußeren Inhalt Null.*

2) Man präge dem Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1 \ldots x_n$ die Maßbestimmung

$$(1) \qquad d\bar{s}^2 = \sum_1^n {}_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} dx_\lambda dx_\mu, \quad a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda},$$

auf, wobei die Koeffizienten $a_{\lambda\mu}$ stetige Funktionen von $x_1 \ldots x_n$ sind, die Matrix einer positiv definiten quadratischen Form bilden und für $\mu \geqq 2$

$$(2) \qquad a_{1\mu} = a_{\mu 1} = 0$$

ist.

Werden zwei im Punkte $x_1 \ldots x_n$ ansetzende Richtungen durch die Vektoren U und V mit den Komponenten $u_1 \ldots u_n$ und $v_1 \ldots v_n$ repräsentiert, so hat man für den Winkel zwischen den beiden Richtungen, der mit

$$\measuredangle \{U, V\}$$

bezeichnet werden möge, in der Euklidischen Maßbestimmung die Formel

$$(3) \qquad \cos \measuredangle \{U, V\} = \frac{\sum_1^n {}_\nu u_\nu v_\nu}{\sqrt{\sum_1^n {}_\nu u_\nu^2}\sqrt{\sum_1^n {}_\nu v_\nu^2}} = \frac{(U, V)}{\sqrt{(U, U)}\sqrt{(V, V)}},$$

wobei das Klammersymbol wie üblich das innere Produkt der beiden eingeklammerten Vektoren bedeutet, und den Quadratwurzeln hier wie fortan *allen* Quadratwurzeln das positive Vorzeichen beizulegen ist.

Man definiere nun das innere Produkt der Vektoren U, V in der Maßbestimmung (1), das mit

$$(4) \qquad \overline{(U, V)}$$

bezeichnet werden möge, durch die Gleichung

$$(5) \qquad \overline{(U, V)} = \sum_1^n {}_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} u_\lambda v_\mu.$$

Dann hat man für den in der Maßbestimmung (1) gemessenen Winkel zwischen den Vektoren U und V, der mit

$$(6) \qquad \overline{\measuredangle \{U, V\}}$$

bezeichnet werden möge, die Formel

$$(7) \qquad \cos \overline{\measuredangle \{U, V\}} = \frac{\overline{(U, V)}}{\sqrt{\overline{(U, U)}}\sqrt{\overline{(V, V)}}}.$$

Durch die Gleichungen (2) wird daher sichergestellt, daß der Einheitsvektor der x_1-Achsenrichtung, d. h. der Vektor mit den Komponenten $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 \ldots = u_n = 0$ dann und nur dann zu einem anderen Vektor in der Maßbestimmung (1) senkrecht steht, wenn das auch in der Euklidischen Maßbestimmung der Fall ist, d. h. wenn dessen erste Komponente verschwindet.

3) Es sei nun im Euklidischen Modellraum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1 \dots x_n$ M_k, $1 \leqq k \leqq n-1$, eine k-dimensionale reguläre Mannigfaltigkeit, in bezug auf welche die x_1-Achsenrichtung nicht singulär ist. Dann gibt es also nur endlich viele Werte von ξ, für welche M_k im oben erklärten Sinn von der Ebene $x_1 = \xi$ berührt wird, und in jeder dieser Ebenen findet die Berührung nur in endlich vielen Punkten statt. Diese Werte von ξ sollen als die „*Ausnahmewerte*" bezeichnet werden.

Dieses vorausgeschickt — gelten die folgenden Sätze:

Satz XI. *Es bezeichne ψ eine stetige Funktion auf M_k. Dann ist das Integral*

$$\int_{M_k(x_1 \leqq \xi)} \psi \, \overline{ds_k} \tag{8}$$

für alle Werte von ξ, insbesondere also auch einschließlich der endlich vielen sogenannten Ausnahmewerte, bestimmt und als Funktion von ξ stetig. Dabei bedeutet $\overline{ds}_k$ das k-dimensionale Flächenelement in der Maßbestimmung (1) *und $M_k(x_1 \leqq \xi)$ denjenigen Teil von M_k, für welchen $x_1 \leqq \xi$ ist.*

Satz XII. *Abgesehen von den endlich vielen sogenannten Ausnahmewerten von ξ gilt ferner noch für $2 \leqq k \leqq n-1$*

$$\frac{d}{d\xi} \int_{M_k(x_1 \leqq \xi)} \psi \, \overline{ds_k} = \int_{M_k(x_1 = \xi)} \frac{\sqrt{a_{11}}\, \psi \, \overline{ds}_{k-1}}{\cos \measuredangle \{x_1, \overline{T}\}}, \tag{9}$$

und der durch diese Gleichung dargestellte Differentialquotient des Integrals (8) *ist als Funktion von ξ an der betrachteten Stelle stetig. Dabei bedeutet $M_k(x_1 = \xi)$ den Schnitt von M_k mit der Ebene $x_1 = \xi$, welcher gemäß l. c.[1] § 6 III (13) aus endlich vielen regulären $(k-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten besteht, die nur Randpunkte miteinander gemein haben können. Ferner bedeutet $\overline{T}$ die in der Maßbestimmung* (1) *senkrechte Projektion des Einheitsvektors der x_1-Achsenrichtung auf die k-dimensionale Tangentialebene von M_k.* Da voraussetzungsgemäß in keinem Punkte von M_k die k-dimensionale Tangentialebene in die Ebene $x_1 = \xi$ fällt, so ist der Einheitsvektor der x_1-Achsenrichtung in keinem Punkte zur k-dimensionalen Tangentialebene im Euklidischen Sinn orthogonal. Nach der oben gemachten Feststellung steht also auch in keinem Punkte von M_k der Einheitsvektor der x_1-Achsenrichtung zur k-dimensionalen Tangentialebene in der Maßbestimmung (1) senkrecht. Daher verschwindet der Vektor $\overline{T}$ nirgends, und der Winkel

$$\overline{\measuredangle \{x_1, \overline{T}\}} \tag{10}$$

ist mithin überall bestimmt und von einem Rechten verschieden. Da endlich gemäß l. c.[1] § 6 III (11, 12) die k-dimensionale Tangentialebene einer k-dimen-

sionalen regulären Mannigfaltigkeit sich mit dem Berührungspunkte stetig ändert, so gilt das auch für die Projektion $\overline{T}$. Mithin ist auch

$$\cos \measuredangle \{x_1, \overline{T}\} \tag{11}$$

auf M_k stetig, von Null verschieden und zwar, wie die Gleichung (43) zeigen wird, positiv.

Dem Beweise der Sätze XI und XII, welche der infinitesimalen Anschauung freilich ohne weiteres einleuchten, seien die folgenden elementaren Ausführungen vorausgeschickt.

4) Es seien $V_1 \dots V_k$ k linear unabhängige Vektoren im n-dimensionalen Euklidischen Raum. Man bilde die GRAMMschen Determinanten

$$D = \begin{vmatrix} (V_1, V_1) & \cdots & (V_1, V_k) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ (V_k, V_1) & \cdots & (V_k, V_k) \end{vmatrix}, \tag{12}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} (V_2, V_2) & \cdots & (V_2, V_k) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ (V_k, V_2) & \cdots & (V_k, V_k) \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Es sei ferner

$$\sum_2^k{}_\mu c_\mu V_\mu \tag{14}$$

die senkrechte Projektion von V_1 auf das von den Vektoren $V_2 \dots V_k$ aufgespannte lineare Vektorgebilde, so daß man also hat

$$V_1 = \sum_2^k{}_\mu c_\mu V_\mu + L, \tag{15}$$

$$(L, V_\mu) = 0, \qquad \mu = 2 \dots k, \tag{16}$$

und mithin

$$(V_1, L) = (L, L). \tag{17}$$

Multipliziert man in der Determinante (12) für $\mu = 2 \dots k$ die μ-te Zeile mit c_μ und subtrahiert sie von der ersten, so erhält man wegen (15), (16), (17), (13)

$$D = (L, L) D_1. \tag{18}$$

Diese Gleichung läßt leicht erkennen, daß die GRAMMsche Determinante von k linear unabhängigen Vektoren positiv ist, und zwar gleich dem Quadrat des Inhalts des von den Vektoren als Kanten gebildeten k-dimensionalen Parallelotops. Da nämlich L wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $V_1, V_2 \dots V_k$ nicht verschwinden kann, und (L, L) das Quadrat der Höhe

des Parallelotops auf dem von den $k-1$ Vektoren $V_2 \dots V_k$ als Kanten gebildeten Grundflächenparallelotop darstellt, so zeigt (18), daß die beiden zu beweisenden Behauptungen für k Vektoren zutreffen, wenn sie für $k-1$ gelten. Da sie nun für $k=1$ offenbar gültig sind, so sind sie damit für jeden Wert von k bewiesen.

Besteht aber zwischen $V_1 \dots V_k$ eine lineare Abhängigkeit, so besteht dieselbe auch zwischen den Zeilen der Grammschen Determinante, und diese verschwindet mithin.

Es sei nun E ein weiterer von Null verschiedener Vektor und T seine senkrechte Projektion auf das von den linear unabhängigen Vektoren $V_1 \dots V_k$ aufgespannte lineare Vektorgebilde. Dann hat man

$$T = \sum_1^k {}_\nu \alpha_\nu V_\nu, \tag{19}$$

$$E = T + P, \tag{20}$$

$$(P, V_\nu) = 0, \quad \nu = 1 \dots k, \tag{21}$$

und mithin

$$(E, T) = (T, T). \tag{22}$$

Es sei ferner

$$T \neq 0. \tag{23}$$

Dann ist entsprechend (3)

$$\cos \measuredangle \{E, T\} = \frac{(E, T)}{\sqrt{(E, E)}\sqrt{(T, T)}} \tag{24}$$

und wegen (22)

$$\cos \measuredangle \{E, T\} = \frac{\sqrt{(T, T)}}{\sqrt{(E, E)}} \tag{24'}$$

Hieraus folgt zunächst

$$\cos \measuredangle \{E, T\} > 0. \tag{25}$$

Es gelte endlich

$$(E, V_\mu) = 0, \qquad \mu = 2 \dots k. \tag{26}$$

Dann ist wegen (20), (21) auch

$$(T, V_\mu) = 0, \qquad \mu = 2 \dots k. \tag{27}$$

Ist jetzt βL die senkrechte Projektion von T auf die den Vektor L tragende Gerade, so hat man

$$T = \beta L + W, \tag{28}$$

$$(W, L) = 0. \tag{29}$$

Aus (16), (27), (28) folgt

$$(W, V_\mu) = 0, \qquad \mu = 2 \ldots k, \tag{30}$$

und mithin wegen (15), (29)

$$(W, V_1) = 0. \tag{31}$$

Wegen (30), (31), (19) ist auch

$$(W, T) = 0 \tag{32}$$

und mithin wegen (28), (29)

$$(W, W) = 0.$$

Also hat man

$$W = 0 \tag{33}$$

und wegen (28), (23)

$$T = \beta L, \qquad \beta \neq 0. \tag{34}$$

Die Einführung in (24) ergibt

$$\cos^2 \measuredangle \{E, T\} = \frac{(E, L)^2}{(E, E)(L, L)}. \tag{35}$$

Nun ist wegen (15) und (26)

$$(E, L) = (E, V_1). \tag{36}$$

Man erhält daher

$$\cos^2 \measuredangle \{E, T\} = \frac{(E, V_1)^2}{(E, E)(L, L)} \tag{37}$$

und bei Einführung von (18)

$$\cos^2 \measuredangle \{E, T\} = \frac{(E, V_1)^2 D_1}{(E, E) D}, \tag{38}$$

wobei gemäß (25)

$$\cos \measuredangle \{E, T\} > 0 \tag{39}$$

ist.

Von diesen Formeln zur Bestimmung des Winkels zwischen dem Vektor E und seiner senkrechten Projektion auf das von den Vektoren $V_1 \ldots V_k$ aufgespannte lineare Vektorgebilde, welche unter den Voraussetzungen (23) und (26) gelten, wird in der Folge Gebrauch gemacht werden. Zunächst bedarf es noch einer Verallgemeinerung.

5) Man betrachte in der Maßbestimmung (1) Vektoren, welche Richtungen repräsentieren, die in einem Punkte $x_1 \ldots x_n$ ansetzen, und bediene sich der Bezeichnungsweise (4), (5), (6), (7). Dann gilt, wie gezeigt werden soll, die der Gleichung (18) entsprechende Gleichung

$$\bar{D} = \overline{(\bar{L}, \bar{L})}\, \bar{D}_1. \tag{40}$$

Dabei ist $\bar{L}$ durch die den Gleichungen (15), (16) entsprechenden Gleichungen

$$V_1 = \sum_2^k{}_\mu \bar{c}_\mu V_\mu + \bar{L}, \quad \overline{(\bar{L}, V_\mu)} = 0, \quad \mu = 2 \ldots k, \tag{41}$$

bestimmt, und $\bar{D}$ und $\bar{D}_1$ gehen aus D und D_1 hervor, indem man in den definierenden Determinanten (12) und (13) die gewöhnlichen inneren Produkte durch die in der Maßbestimmung (1) definierten, mittels Überstreichung der Klammersymbole bezeichneten inneren Produkte ersetzt.

Es bezeichne ferner $\bar{T}$ die in der Maßbestimmung (1) senkrechte Projektion des Vektors E auf das von den k linear unabhängigen Vektoren $V_1 \ldots V_k$ aufgespannte lineare Vektorgebilde. Es sei

$$\bar{T} \neq 0. \tag{42}$$

Dann ist, wie ebenfalls gezeigt werden soll,

$$\cos \overline{\sphericalangle \{E, \bar{T}\}} = \frac{\sqrt{\overline{(\bar{T}, \bar{T})}}}{\sqrt{\overline{(E, E)}}} > 0. \tag{43}$$

Gilt endlich

$$\overline{(E, V_\mu)} = 0, \quad \mu = 2 \ldots k, \tag{44}$$

so hat man

$$\cos^2 \overline{\sphericalangle \{E, \bar{T}\}} = \frac{\overline{(E, V_1)}^2}{\overline{(E, E)}\ \overline{(\bar{L}, \bar{L})}}, \tag{45}$$

$$\cos^2 \overline{\sphericalangle \{E, \bar{T}\}} = \frac{\overline{(E, V_1)}^2\ \overline{D}_1}{\overline{(E, E)}\ \overline{D}}. \tag{46}$$

Beweis. Man transformiere bei festem $x_1 \ldots x_n$ die u_ν linear so in die u_ν^*, $\nu = 1 \ldots n$, daß

$$\sum_1^n{}_{\lambda, \mu} a_{\lambda\mu} u_\lambda u_\mu = \sum_1^n{}_\nu u_\nu^{*2}$$

wird. Dann gilt, wenn die v_ν^* aus den v_ν durch dieselbe Transformation hervorgehen, auch

$$\overline{(U, V)} = \sum_1^n{}_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} u_\lambda v_\mu = \sum_1^n{}_\nu u_\nu^* v_\nu^*. \tag{47}$$

Das innere Produkt in der Maßbestimmung (1) geht also im transformierten Raum in das gewöhnliche innere Produkt über, wodurch die auf Grund der Voraussetzungen (42), (44) zu beweisenden Gleichungen (40), (43), (45), (46) in die auf Grund der entsprechenden Voraussetzungen (23), (26) schon bewiesenen Gleichungen (18), (24′), (37), (38) übergehen.

6) Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zum Beweise der Sätze XI und XII.

Im Euklidischen Modellraum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1 \ldots x_n$ können die Richtungen der Achsen $x_2 \ldots x_n$ in bezug auf M_k singulär sein. Da aber, wie oben am Schluß des Abschnitts 1 des laufenden Paragraphen festgestellt, die Gesamtheit der singulären Richtungspunkte auf der Einheitskugel den äußeren Inhalt Null besitzt, so gibt es in beliebiger Nähe jeder der Achsenrichtungen $x_2 \ldots x_n$ eine Richtung, die nicht singulär ist. Legt man nun im Euklidischen Modellraum senkrecht zu jeder dieser Richtungen durch den Koordinatenanfangspunkt eine $(n-1)$-dimensionale Ebene, bezeichnet mit $x_2' \ldots x_n'$ die Abstände des Punktes $(x_1 \ldots x_n)$ von diesen Ebenen und setzt $x_1' = x_1$, so gehen die $x_1' \ldots x_n'$ aus den $x_1 \ldots x_n$ durch eine lineare Transformation mit konstanten Koeffizienten hervor. Dabei darf durch Einschränkung der Abweichung der gewählten nichtsingulären Richtungen von den entsprechenden x_ν-Achsenrichtungen als bewirkt vorausgesetzt werden, daß die Determinante der Substitution nicht verschwindet. Mithin sind die $x_1 \ldots x_n$ und die $x_1' \ldots x_n'$ durch eine nicht ausgeartete lineare Transformation mit konstanten Koeffizienten aufeinander bezogen. Deutet man die $x_1' \ldots x_n'$ als rechtwinklige Koordinaten in einem anderen Raum, so entspricht in diesem der Mannigfaltigkeit M_k eine Mannigfaltigkeit M_k', welche gemäß der am Eingang dieses Paragraphen gemachten Feststellung ebenfalls eine reguläre k-dimensionale Mannigfaltigkeit darstellt. Nun entsprechen den Parallelebenenscharen, welche im (x')-Raum durch die Gleichungen $x_\nu' = \text{konst}$, $\nu = 1 \ldots n$, dargestellt sind, im (x)-Raum Parallelebenenscharen, welche zu den entsprechenden nichtsingulären Richtungen senkrecht stehen, d. h. weder selbst M_k in unendlich vielen Punkten berühren, noch Häufungsscharen solcher Parallelebenenscharen sind, welche M_k in unendlich vielen Punkten berühren. Mithin sind im (x')-Raum die Achsenrichtungen in bezug auf M_k' nichtsingulär. Es gelten daher für M_k' die Sätze l. c.[1] § 8 VI (1), (2) Gl. (114), (116). Es ist also für jede auf M_k' stetige Funktion φ das Integral

$$\int\limits_{M_k'(x_1' \leqq \xi)} \varphi \, ds_k' \tag{48}$$

für *alle* Werte von ξ, d. h. einschließlich der endlich vielen sogenannten Ausnahmestellen, bestimmt und als Funktion von ξ stetig. Dabei bedeutet ds_k' das Euklidische k-dimensionale Flächenelement im (x')-Raum.

Ferner gilt für $k \geqq 2$ abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen von ξ

$$\frac{d}{d\xi} \int\limits_{M_k'(x_1' \leqq \xi)} \varphi \, ds_k' = \int\limits_{M_k'(x_1' = \xi)} \frac{\varphi \, ds_{k-1}'}{\cos \sphericalangle \{x_1', T'\}}, \tag{49}$$

und zwar ist der durch diese Gleichung dargestellte Differentialquotient des Integrals (48) als Funktion von ξ an der betrachteten Stelle stetig. Dabei besteht der Schnitt

$$M'_k(x'_1 = \xi)$$

aus endlich vielen regulären $(k-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, welche nur Randpunkte miteinander gemein haben, T' bedeutet die senkrechte Projektion des Einheitsvektors der x'_1-Achsenrichtung auf die k-dimensionale Tangentialebene von M'_k. Da voraussetzungsgemäß keine der endlich vielen Ausnahmestellen von ξ vorliegt, so fällt das k-dimensionale Tangentialgebilde in keinem Punkte in die Ebene $x'_1 = \text{konst}$, oder mit anderen Worten, die x'_1-Achsenrichtung steht nirgends senkrecht auf der k-dimensionalen Tangentialebene, und T' verschwindet daher in keinem Punkte. Mithin ist der Winkel

$$\measuredangle\{x'_1, T'\}$$

überall bestimmt, stetig, von einem Rechten verschieden und sein Kosinus entsprechend (24'), (25) von Null verschieden, und zwar positiv.

Wir wollen nun zeigen, daß

$$\frac{\overline{ds_k}}{ds'_k} \tag{50}$$

auf M'_k eindeutig, bestimmt und stetig ist, wobei $\overline{ds_k}$ das ds'_k entsprechende Flächenelement des (x)-Raumes in der Maßbestimmung (1) bedeutet. Ist nämlich in der Umgebung des betreffenden Punktes die Mannigfaltigkeit M'_k auf die Parameter $t_1 \dots t_k$ bezogen durch die Gleichungen

$$x'_\nu = x'_\nu(t_1 \dots t_k), \quad \nu = 1 \dots n, \tag{51}$$

so erhält man für die entsprechenden Punkte von M_k die Werte von x_ν durch die oben festgestellte lineare Transformation mit konstanten Koeffizienten. Man bezeichne mit V_λ, $\lambda = 1 \dots k$, den Vektor mit den Komponenten

$$\frac{\partial x_1}{\partial t_\lambda} \dots \frac{\partial x_n}{\partial t_\lambda} \tag{52}$$

im (x)-Raum und mit V'_λ den entsprechenden Vektor im (x')-Raum mit den Komponenten

$$\frac{\partial x'_1}{\partial t_\lambda} \dots \frac{\partial x'_n}{\partial t_\lambda}. \tag{53}$$

Dann sind zunächst die k Vektoren $V_1 \dots V_k$ und ebenso auch die k Vektoren $V'_1 \dots V'_k$ linear unabhängig; denn bei der Darstellung einer k-dimensionalen regulären Mannigfaltigkeit in der Umgebung einer Stelle können gemäß l. c.[1] § 5 III.b die Parameter stets so gewählt werden, daß die Funktionalmatrix den Rang k besitzt. Es mögen nun D' und D'_1 aus D und D_1 hervor-

gehen, indem man in den definierenden Determinanten (12) und (13) die inneren Produkte durch die im Euklidischen (x')-Raum gebildeten inneren Produkte (V'_p, V'_q) ersetzt, und $\overline{D}$ und $\overline{D}_1$ wie oben unter (44), indem man die in der Maßbestimmung (1) gebildeten inneren Produkte $(\overline{V_p, V_q})$ einsetzt. Dann hat man

$$ds'_k = \sqrt{D'}\, dt_1 \ldots dt_k, \tag{54}$$

$$\overline{ds_k} = \sqrt{\overline{D}}\, dt_1 \ldots dt_k, \tag{55}$$

$$\frac{\overline{ds_k}}{ds'_k} = \frac{\sqrt{\overline{D}}}{\sqrt{D'}}. \tag{56}$$

Dieser Ausdruck ist offenbar von der Wahl des Parametersystems unabhängig, da bei einer Parametertransformation $\overline{D}$ und D' sich beide mit dem Quadrat der Funktionaldeterminante der Transformation multiplizieren. Da die Parameterdarstellung (51) einer regulären k-dimensionalen Mannigfaltigkeit zweimal stetig differenzierbar ist, so wird dadurch a fortiori auch die behauptete Stetigkeit des Quotienten der Flächenelemente durch (56) sichergestellt.

Wegen $x_1 = x'_1$ ergibt sich nun der zu beweisende Satz XI aus dem zitierten, das Integral (48) betreffenden Ergebnis, indem man dort

$$\varphi = \psi \frac{\sqrt{\overline{D}}}{\sqrt{D'}} \tag{57}$$

setzt. Denn man hat

$$(8) \qquad \int\limits_{M_k(x_1 \leqq \xi)} \psi\, \overline{ds_k} = \int\limits_{M'_k(x'_1 \leqq \xi)} \psi \frac{\overline{ds_k}}{ds'_k}\, ds'_k = \int\limits_{M'_k(x'_1 \leqq \xi)} \psi \frac{\sqrt{\overline{D}}}{\sqrt{D'}}\, ds'_k.$$

Es sei jetzt $k \geqq 2$, und es liege keine Ausnahmestelle von ξ vor. Dann folgt aus (58) und (49)

$$\frac{d}{d\xi} \int\limits_{M_k(x_1 \leqq \xi)} \psi\, \overline{ds_k} = \frac{d}{d\xi} \int\limits_{M'_k(x'_1 \leqq \xi)} \psi \frac{\sqrt{\overline{D}}}{\sqrt{D'}}\, ds'_k = \int\limits_{M'_k(x'_1 = \xi)} \frac{\psi \dfrac{\sqrt{\overline{D}}}{\sqrt{D'}}\, ds'_{k-1}}{\cos \measuredangle (x'_1, T')}, \tag{59}$$

wobei der durch diese Gleichung dargestellte Differentialquotient als Funktion von ξ an der betrachteten Stelle stetig ist. Ferner wird dann M'_k von der Ebene $x'_1 = \xi$ nirgends berührt. Es kann daher, wie l. c.[1] § 6 III (13) (A) S. 727 gezeigt, in dieser Ebene das Parametersystem in der Umgebung jedes Punktes von M'_k so gewählt werden, daß

$$t_1 = x'_1$$

wird. Mithin gilt auf den endlich vielen $(k-1)$-dimensionalen regulären Mannigfaltigkeiten, aus welchen der Schnitt $M_k'(x_1' = \xi)$ besteht, entsprechend (56)

$$\frac{\overline{ds_{k-1}}}{ds_{k-1}'} = \frac{\sqrt{\overline{D}_1}}{\sqrt{D_1'}}. \tag{60}$$

Daher hat man

$$\int_{M_k(x_1=\xi)} \psi \frac{\sqrt{\overline{D}\,D_1'}}{\sqrt{D'\,\overline{D}_1}} \frac{\overline{ds_{k-1}}}{\cos \measuredangle \{x_1', T''\}} = \int_{M_k'(x_1'=\xi)} \psi \frac{\sqrt{\overline{D}}}{\sqrt{D'}} \frac{ds_{k-1}'}{\cos \measuredangle \{x_1', T''\}}. \tag{61}$$

Mithin ist wegen (59)

$$\frac{d}{d\xi} \int_{M_k(x_1 \leqq \xi)} \psi \, \overline{ds_k} = \int_{M_k(x_1=\xi)} \psi \frac{\sqrt{\overline{D}\,D_1'}}{\sqrt{D'\,\overline{D}_1}} \frac{\overline{ds_{k-1}}}{\cos \measuredangle \{x_1', T''\}}. \tag{62}$$

Nun ist wegen

$$x_1' = x_1 = t_1 \tag{63}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial t_1} = 1, \quad \frac{\partial x_1}{\partial t_\mu} = 0, \quad \mu = 2 \ldots k, \tag{64}$$

$$\frac{\partial x_1'}{\partial t_1} = 1, \quad \frac{\partial x_1'}{\partial t_\mu} = 0, \quad \mu = 2 \ldots k. \tag{64'}$$

Bei der linearen Transformation mit konstanten Koeffizienten, durch welche der (x)-Raum und der (x')-Raum aufeinander bezogen sind, folgt natürlich aus (63) nicht, daß die x_1-Achse und die x_1'-Achse ineinander übergehen. Man bezeichne im (x)-Raum den Einheitsvektor der x_1-Achsenrichtung mit E und im (x')-Raum den Einheitsvektor der x_1'-Achsenrichtung mit E''. Dann gilt wegen (64'), (53)

$$(E'', V_\mu') = 0, \qquad \mu = 2 \ldots k, \tag{65}$$

und wegen (64), (52), (2)

$$\overline{(E, V_\mu)} = 0, \qquad \mu = 2 \ldots k. \tag{66}$$

Ferner hat man wegen (64'), (53)

$$(E'', E'') = (E'', V_1') = 1 \tag{67}$$

und wegen (64), (52), (2)

$$\overline{(E, E)} = \overline{(E, V_1)} = a_{11}. \tag{68}$$

Nun ist T'' als die senkrechte Projektion von E'' auf die k-dimensionale Tangentialebene von M_k' oder mit anderen Worten auf das von den k Vektoren $V_1' \ldots V_k'$ aufgespannte lineare Vektorgebilde definiert und verschwindet, wie im Anschluß an (49) festgestellt worden ist und übrigens auch aus (67) unmittelbar hervorgeht, in keinem Punkt der Ebene $x_1' = \xi$. In Verbindung

mit (65) sind damit die Voraussetzungen (23) und (26) für die Gültigkeit der Gleichungen (38), (39) sichergestellt, und diese ergeben

$$(69)\quad \cos^2 \measuredangle \{x_1', T'\} = \cos^2 \measuredangle \{E'', T'\} = \frac{(E'', V_1')^2 D_1'}{(E'', E'') D'}, \quad \cos \measuredangle \{x_1', T'\} > 0.$$

Wegen (67) erhält man also

$$(70)\quad \cos \measuredangle \{x_1', T'\} = \frac{\sqrt{D_1'}}{\sqrt{D'}}.$$

Ebenso ist $\overline{T}$ als die in der Maßbestimmung (1) senkrechte Projektion von E auf die k-dimensionale Tangentialebene von M_k oder mit anderen Worten auf das von den k Vektoren $V_1 \ldots V_k$ aufgespannte lineare Vektorgebilde definiert und verschwindet, wie im Anschluß an (9) festgestellt und übrigens auch aus (68) unmittelbar folgt, in keinem Punkte des Schnittes $x_1 = \xi$. In Verbindung mit (66) sind damit die Voraussetzungen (42), (44) für die Gültigkeit der Relationen (43), (45), (46) sichergestellt, und diese ergeben bei Einführung von (68)

$$(71)\quad \cos \measuredangle \{x_1, \overline{T}\} = \cos \measuredangle \{E, \overline{T}\} = \frac{\sqrt{a_{11}}}{\sqrt{(\overline{L}, \overline{L})}},$$

$$(72)\quad \cos \measuredangle \{x_1, \overline{T}\} = \frac{\sqrt{a_{11}}\sqrt{\overline{D}_1}}{\sqrt{\overline{D}}}.$$

Die Einführung von (70) und (72) in (62) ergibt die zu beweisende Gleichung (9), wobei die Stetigkeit des durch diese Gleichung dargestellten Differentialquotienten als Funktion von ξ schon im Anschluß an (59) festgestellt worden ist.

Damit sind die Sätze XI und XII vollständig bewiesen.

7) Wir wollen unsere Formeln in einem Spezialfall etwas näher ausführen, und zwar unter der Voraussetzung, daß die Maßbestimmung (1) die Gestalt

$$(73)\quad ds^2 = a_1^2\, dx_1^2 + a_2^2 \sum_2^n{}_\mu\, dx_\mu^2, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad n \geqq 3$$

annimmt, wobei a_1 und a_2 stetige Funktionen von $x_1 \ldots x_n$ bedeuten.

Es bezeichne im Euklidischen (x)-Raum T die senkrechte Projektion des Einheitsvektors E der x_1-Achsenrichtung auf die k-dimensionale Tangentialebene von M_k oder mit anderen Worten auf das lineare Vektorgebilde, welches von den k durch (64) definierten Vektoren $V_1 \ldots V_k$ aufgespannt wird. Dementsprechend bezeichne

$$\measuredangle \{x_1, T\} = \measuredangle \{E, T\}$$

den Euklidischen Winkel zwischen der x_1-Achsenrichtung und ihrer Projektion T. Dann ist T durch die Gleichungen (19), (20), (21) bestimmt. Ferner bleibt, wenn ξ keiner der endlich vielen Ausnahmewerte ist, für $x_1 = \xi$

$$(74)\quad T \neq 0.$$

Endlich gilt wegen (64)

$$(E, V_\mu) = 0, \quad \mu = 2 \ldots k. \tag{75}$$

Mit den Gleichungen (74), (75) sind die Voraussetzungen (23), (26) für die Gültigkeit der Relationen (37), (39) sichergestellt. Man hat also

$$\cos \measuredangle \{x_1, T\} = \cos \measuredangle \{E, T\} = \frac{(E, V_1)}{\sqrt{(E, E)}\sqrt{(L, L)}}, \tag{76}$$

wobei L durch die Gleichungen (15), (16) bestimmt ist. Nun ist wegen (64)

$$(E, E) = (E, V_1) = 1. \tag{77}$$

Mithin gilt

$$\cos \measuredangle \{x_1, T\} = \frac{1}{\sqrt{(L, L)}}. \tag{78}$$

Ferner hat man gemäß (71) bei der Spezialisierung (73) wegen $a_{11} = a_1^2$

$$\cos \measuredangle \{x_1, \overline{T}\} = \frac{a_1}{\sqrt{(\overline{L}, \overline{L})}}. \tag{79}$$

Nun ist, da gemäß (64) die erste Komponente der Vektoren V_μ für $\mu = 2 \ldots k$ verschwindet, für jeden Vektor U

$$(\overline{U, V_\mu}) = a_2^2 (U, V_\mu). \tag{80}$$

Daher folgt aus (16)

$$(\overline{L, V_\mu}) = 0, \quad \mu = 2 \ldots k. \tag{81}$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit (15) sind der definitionsmäßige Ausdruck dafür, daß L auch in der Maßbestimmung (1) derjenige Vektor ist, der die senkrechte Projektion von V_1 auf das von den Vektoren $V_2 \ldots V_k$ aufgespannte lineare Vektorgebilde zu V_1 ergänzt. Mithin gilt bei der Spezialisierung (73)

$$L = \overline{L}. \tag{82}$$

Nun ist wegen (15) und (64) die erste Komponente von L gleich 1. Die übrigen Komponenten seien $l_2 \ldots l_n$. Dann hat man

$$(L, L) = 1 + \sum_2^n{}_\mu \, l_\mu^2 \tag{83}$$

und wegen (82) und (73)

$$(\overline{\overline{L}, \overline{L}}) = (\overline{L, L}) = a_1^2 + a_2^2 \sum_2^n{}_\mu \, l_\mu^2 . \tag{84}$$

Aus (83) und (78) folgt

$$\sum_2^n{}_\mu \, l_\mu^2 = (L, L) - 1 = \frac{1}{\cos^2 \measuredangle \{x_1, T\}} - 1 = \operatorname{tg}^2 \measuredangle \{x_1, T\}. \tag{85}$$

Bei Einführung von (84) in (79) erhält man

$$\frac{1}{\cos \measuredangle \{x_1, T\}} = \frac{1}{a_1} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 \sum_2^n{}_\mu \, l_\mu^2} \tag{86}$$

und mithin wegen (85)

$$\frac{1}{\cos \measuredangle \{x_1, T\}} = \frac{1}{a_1} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 \operatorname{tg}^2 \measuredangle \{x_1, T\}}. \tag{87}$$

Hieraus folgt noch wegen (72), (73), da $a_{11} = a_1^2$ wird,

$$\sqrt{\overline{D}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 \operatorname{tg}^2 \measuredangle \{x_1, \tau\}} \sqrt{\overline{D}_1}, \tag{88}$$

und, da wegen (80)

$$\overline{D}_1 = a_2^{2k-2} D_1 \tag{89}$$

ist,

$$\sqrt{\overline{D}} = a_2^{k-1} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 \operatorname{tg}^2 \measuredangle \{x_1, T\}} \sqrt{D_1}. \tag{90}$$

Hieraus folgt für das k-dimensionale Flächenelement in der Maßbestimmung (73) entsprechend (55) wegen (63)

$$\overline{ds_k} = \sqrt{\overline{D}}\, dt_1 \dots dt_k = a_2^{k-1} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 \operatorname{tg}^2 \measuredangle \{x_1, T\}} \sqrt{D_1}\, dx_1 dt_2 \dots dt_k \tag{91}$$

und bei festem x_1 wegen (89)

$$\overline{ds}_{k-1} = \sqrt{\overline{D}_1}\, dt_2 \dots dt_k = a_2^{k-1} \sqrt{D_1}\, dt_2 \dots dt_k = a_2^{k-1}\, ds_{k-1}, \tag{92}$$

wobei ds_{k-1} das Euklidische $(k-1)$-dimensionale Flächenelement bezeichnet.

Gemäß Satz XII gilt endlich, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten von ξ bei der Maßbestimmung (73) wegen (87)

$$\frac{d}{d\xi} \int_{M_k(x_1 \leqq \xi)} \psi\, \overline{ds_k} = \int_{M_k(x_1 = \xi)} \psi \sqrt{a_1^2 + a_2^2 \operatorname{tg}^2 \measuredangle \{x_1, T\}}\, \overline{ds_{k-1}} \tag{93}$$

und bei Einführung von (92)

$$\frac{d}{d\xi} \int_{M_k(x_1 \leqq \xi)} \psi\, \overline{ds_k} = \int_{M_k(x_1 = \xi)} \psi\, a_2^{k-1} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 \operatorname{tg}^2 \measuredangle \{x_1, T\}}\, ds_{k-1}, \tag{94}$$

wobei der durch diese Gleichung dargestellte Differentialquotient als Funktion von ξ stetig ist.

Endlich sei noch festgestellt, daß von den für die Maßbestimmung (73) abgeleiteten Formeln nur die letzten beiden Gleichungen (93) und (94) sich auf die Voraussetzung stützen, daß M_k eine reguläre k-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Alle übrigen Gleichungen dagegen bedürfen lediglich der

Voraussetzung, daß M_k in der Umgebung des betrachteten Punktes eine einmal stetig differenzierbare, den Gleichungen (64) genügende Darstellung durch k Parameter mit einer Funktionalmatrix vom Range k zuläßt, worin zugleich enthalten ist, daß die x_1-Achsenrichtung nicht senkrecht auf dem k-dimensionalen Tangentialgebilde steht.

8) Zusatz 1 zu den Sätzen XI und XII. Die Sätze XI und XII bleiben unverändert bestehen, wenn die Voraussetzung, daß die Richtung der x_1-Achse nicht singulär ist, dahin eingeschränkt wird, daß sie nicht eigentlich singulär ist.

Bei der oben auseinandergesetzten Zurückführung dieser Sätze auf die im Abschnitt 6) des laufenden Paragraphen unter (48) und (49) reproduzierten l. c.[1] bewiesenen Sätze wird nämlich nur von der letzteren Voraussetzung Gebrauch gemacht. Was nun den in der zitierten Arbeit durchgeführten Beweis anlangt, so wird dort hinsichtlich der ersten Achsenrichtung ebenfalls nur die Voraussetzung eingesetzt, daß die Richtung nicht eigentlich singulär ist. Hinsichtlich der übrigen Achsenrichtungen wird allerdings die volle Voraussetzung der Nichtsingularität herangezogen, welche aber auch in dem eben durchgeführten Beweise durch die Auswahl der Achsen $x_2' \ldots x_n'$ als erfüllt betrachtet werden kann.

Zusatz 2 zu den Sätzen XI und XII. Selbst wenn die Maßbestimmung (1) die Euklidische ist, und die Behauptungen der Sätze XI und XII daher mit den Behauptungen der hier unter (48) und (49) reproduzierten, l. c.[1] bewiesenen Sätze übereinstimmen, bringen die Sätze XI und XII gegenüber den herangezogenen doch einen Fortschritt in Gestalt einer wesentlichen Einschränkung der Voraussetzungen. Denn die Forderung der vollen Nichtsingularität aller Achsenrichtungen wird auf die nur die erste Achsenrichtung betreffende und zudem noch geringere Voraussetzung reduziert, daß die Richtung nicht eigentlich singulär sei.

9) Es sei im Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1 \ldots x_n$ K ein regulärer Körper im Sinne der Definition l. c.[1] § 6 IV. Man bezeichne eine Richtung in bezug auf K als eigentlich singulär, wenn sie in bezug auf eine der endlich vielen regulären $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, aus welchen der Rand von K besteht, eigentlich singulär ist, oder mit anderen Worten, wenn eine dieser Mannigfaltigkeiten in unendlich vielen Punkten von den zu dieser Richtung senkrechten Ebenen in dem im Abschnitt 1) des laufenden Paragraphen erklärten Sinne berührt wird. Man bezeichne eine Richtung in bezug auf K als singulär, wenn sie eigentlich singulär oder Häufungsrichtung eigentlich singulärer Richtungen ist. Aus der am Schluß des Abschnitts 1) des laufenden Paragraphen gemachten Feststellung folgt dann, *daß auf der Einheitskugel die Richtungspunkte der zu einem gegebenen*

regulären Körper singulären Richtungen eine abgeschlossene Punktmenge vom äußeren Inhalt Null bilden.

Wir machen nun die Voraussetzung, daß das Koordinatensystem so gewählt ist, daß die x_1-Achsenrichtung zum gegebenen Körper K nicht eigentlich singulär liegt. Es gibt dann also nur endlich viele Werte von ξ, die sogenannten „Ausnahmestellen", für welche eine der endlich vielen $(n-1)$-dimensionalen regulären Mannigfaltigkeiten, aus welchen der Rand von K zusammengesetzt ist, von der Ebene $x_1 = \xi$ im oben bezeichneten Sinn berührt wird, und für jeden dieser endlich vielen Werte von ξ kann die Berührung nur in endlich vielen Punkten stattfinden.

Es bezeichne nun

$$\varphi = \varphi(x_1 \ldots x_n) \tag{95}$$

eine in K definierte stetige Funktion. Man definiere die Funktion $\Phi(\xi)$ durch die Gleichung

$$\Phi(\xi) = \int_{K(x_1=\xi)} \varphi(\xi, x_2 \ldots x_n)\, dx_2 \ldots dx_n, \tag{96}$$

wobei $K(x_1 = \xi)$ den Schnitt des Körpers mit der Ebene $x_1 = \xi$ bedeutet. Dann ist, wie l. c.[1] § 8 III bewiesen, für alle Werte von ξ, also insbesondere auch für die sogenannten Ausnahmestellen, das Integral (96) bestimmt und stellt eine stetige Funktion von ξ dar. Endlich gilt

$$\int_K \varphi\, dx_1 \ldots dx_n = \int_\alpha^\beta \Phi(\xi)\, d\xi, \tag{97}$$

wobei α und β so gewählt sind, daß für alle Punkte von K

$$\alpha \leqq x_1 \leqq \beta \tag{98}$$

ist.

Dieser Satz ist zitierten Ortes zwar unter der stärkeren Voraussetzung ausgesprochen, daß die Richtung der x_1-Achse in bezug auf K nicht singulär ist. Er gilt aber auch unter der hier angegebenen Voraussetzung, daß die Richtung nicht eigentlich singulär ist. Denn nur von letzterer Annahme wird beim Beweise Gebrauch gemacht.

Ebenso wie (97) hergeleitet wurde, ergibt sich natürlich auch für $\xi' > \alpha$, und zwar für *alle* diese Werte von ξ'

$$\int_{K(x_1 \leqq \xi')} \varphi\, dx_1 \ldots dx_n = \int_\alpha^{\xi'} \Phi(\xi)\, d\xi, \tag{99}$$

wobei $K(x_1 \leqq \xi')$ denjenigen Teil von K bezeichnet, in welchem $x_1 \leqq \xi'$ ist.

10) Es sei nunmehr ξ' keine der endlich vielen sogenannten Ausnahmestellen. Dann besteht gemäß l. c.[1] § 6 IV (14) $K(x_1 \leqq \xi')$ aus endlich vielen regulären Körpern. Die endlich vielen $(n-1)$-dimensionalen regulären Randmannigfaltigkeiten dieser Körper erfüllen den Schnitt $K(x_1 = \xi')$ und die Punktmenge $R(x_1 \leqq \xi')$, d. h. denjenigen Teil des Randes R von K, für welchen $x_1 \leqq \xi'$ ist. Dabei können je zwei dieser endlich vielen regulären $(n-1)$-dimensionalen Randmannigfaltigkeiten nur Punkte gemein haben, die für beide wiederum auf dem Rande liegen, die also endlich vielen regulären $(n-2)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten angehören.

Indem man auf jeden dieser Körper das Greensche Lemma[6]) anwendet und dann das Resultat über alle Körper summiert, ergibt sich für eine in K einmal stetig differenzierbare Funktion χ

$$(100)\quad \int_{R(x_1 \leqq \xi')} \chi \cos \measuredangle \{x_1, N\}\, ds_{n-1} + \int_{K(x_1 = \xi')} \chi\, dx_2 \ldots dx_n = \int_{K(x_1 \leqq \xi')} \frac{\partial \chi}{\partial x_1}\, dx_1 \ldots dx_n,$$

wobei N die äußere Normale bezeichnet und ds_{n-1} das $(n-1)$-dimensionale Euklidische Flächenelement.

Gemäß (99) ist

$$(101)\quad \int_{K(x_1 \leqq \xi')} \frac{\partial \chi}{\partial x_1}\, dx_1 \ldots dx_n = \int_a^{\xi'} d\xi \int_{K(x_1 = \xi)} \frac{\partial \chi}{\partial x_1}\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Mithin folgt aus (100)

$$(102)\quad \int_{K(x_1 = \xi')} \chi\, dx_2 \ldots dx_n = -\int_{R(x_1 \leqq \xi')} \chi \cos \measuredangle \{x_1, N\}\, ds_{n-1} + \int_a^{\xi'} d\xi \int_{K(x_1 = \xi)} \frac{\partial \chi}{\partial x_1}\, dx_2 \ldots dx_n,$$

wobei der Faktor von $d\xi$ unter dem zweiten Integral auf der rechten Seite gemäß der Feststellung (96) eine für *alle* Werte von ξ stetige Funktion von ξ darstellt.

Es sei nun R^{ν}_{n-1} eine der endlich vielen regulären $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, aus welchen R als Rand von K zusammengesetzt ist. In bezug auf R^{ν}_{n-1} ist dann die Richtung der x_1-Achse a fortiori nicht eigentlich singulär und ξ' a fortiori kein Ausnahmewert. Daher können wir auf R^{ν}_{n-1}

[6]) Einen Beweis dieses Lemmas, der den hier geltenden Voraussetzungen angepaßt ist, findet der Leser auch l. c[1] § 9 I.

den Satz XII in seiner Spezialisierung für die Euklidische Maßbestimmung anwenden, wobei für φ die Funktion

$$\chi \cos \measuredangle \{x_1, N\} \tag{103}$$

eingesetzt werde. Man erhält, da hier $k = n - 1$ wird,

$$\frac{d}{d\xi'} \int\limits_{R_{n-1}^{\nu}(x_1 \leqq \xi')} \chi \cos \measuredangle \{x_1, N\} ds_{n-1} = \int\limits_{R_{n-1}^{\nu}(x_1 = \xi')} \frac{\chi \cos \measuredangle \{x_1, N\} ds_{n-2}}{\cos \measuredangle \{x_1, T\}}, \tag{104}$$

wobei T wie oben die Euklidische senkrechte Projektion des Einheitsvektors der x_1-Achsenrichtung auf die $(n-1)$-dimensionale Tangentialebene von R_{n-1}^{ν} bedeutet und ds_{n-2} das $(n-2)$-dimensionale Euklidische Flächenelement. Wegen

$$\cos \measuredangle \{x_1, T\} = \sin \measuredangle \{x_1, N\} \tag{105}$$

ergibt sich nach Summation über alle Randmannigfaltigkeiten R_{n-1}^{ν}

$$\frac{d}{d\xi'} \int\limits_{R(x_1 \leqq \xi')} \chi \cos \measuredangle \{x_1, N\} ds_{n-1} = \int\limits_{R(x_1 = \xi')} \chi \operatorname{cotg} \measuredangle \{x_1, N\} ds_{n-2}. \tag{106}$$

Dabei ist wegen (105) und (25)

$$\sin \measuredangle \{x_1, N\} > 0 \tag{107}$$

und mithin

$$\operatorname{sign.}(\operatorname{cotg} \measuredangle \{x_1, N\}) = \operatorname{sign.}(\cos \measuredangle \{x_1, N\}), \tag{108}$$

oder mit anderen Worten, es ist für den Winkel zwischen dem Einheitsvektor der x_1-Achsenrichtung und der äußeren Normalen der zwischen 0 und π liegende Wert zu wählen.

Durch die Differentiation von (102) nach ξ' gelangt man bei Einführung von (106) zu

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\xi'} \int\limits_{K(x_1 = \xi')} \chi \, dx_2 \ldots dx_n \\ &= - \int\limits_{K(x_1 = \xi')} \chi \operatorname{cotg} \measuredangle \{x_1, N\} ds_{n-2} + \int\limits_{K(x_1 = \xi')} \frac{\partial \chi}{\partial x_1} dx_2 \ldots dx_n. \end{aligned} \tag{109}$$

Dabei ist auf der rechten Seite das erste Integral abgesehen von den sogenannten Ausnahmewerten bestimmt und als Funktion von ξ' stetig und das zweite für alle Werte von ξ'. Das Integral

$$\int\limits_{K(x_1 = \xi')} \chi \, dx_2 \ldots dx_n \tag{110}$$

ist also als Funktion von ξ' abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen stetig differenzierbar. Aber auch an diesen bleibt das Integral selbst gemäß der unter (96) gemachten Feststellung stetig.

11) Man setze

$$V_E(\xi) = \int_{K(x_1 = \xi)} dx_2 \ldots dx_n. \tag{111}$$

Dann stellt $V_E(\xi)$ das Euklidische $(n-1)$-dimensionale Volumen des Schnittes des Körpers K mit der Ebene $x_1 = \xi$ dar und ist gemäß der unter (96) gemachten Feststellung für *alle* Werte von ξ stetig.

Bezeichnet α^* das Minimum und β^* das Maximum von x_1 in K, so ist für $\xi < \alpha^*$ und $\xi > \beta^*$

$$V_E(\xi) = 0. \tag{112}$$

Auf Grund der eben festgestellten Stetigkeit von $V_E(\xi)$ ist mithin

$$V_E(\alpha^*) = V_E(\beta^*) = 0. \tag{113}$$

Da nun wegen der Definitionseigenschaft l. c.[1] § 6 IV (d) eines regulären Körpers jeder Randpunkt von K Häufungspunkt von inneren Punkten ist, so ist α^* die untere Grenze von x_1 für alle inneren Punkte von K und β^* die obere. Ist daher

$$\alpha^* < \xi < \beta^*, \tag{114}$$

so gibt es einen inneren Punkt P'', für welchen $x_1 < \xi$ ist und einen inneren Punkt P', für welchen $x_1 > \xi$ ist. Gemäß der Definitionseigenschaft l. c.[1] § 6 IV (e) lassen sich nun P'' und P' durch einen ganz im Innern von K verlaufenden Weg verbinden. Also muß es auf der Ebene $x_1 = \xi$ innere Punkte von K geben. Diese sind a fortiori auch relativ zur Ebene $x_1 = \xi$ innere Punkte des Schnittes $K(x_1 = \xi)$. Daher verschwindet im Intervall

$$\alpha^* \leqq \xi \leqq \beta^* \tag{115}$$

$V_E(\xi)$ nur an den Stellen α^* und β^*, welche übrigens offenbar auch zu den sogenannten Ausnahmestellen gehören.

Aus den unter (109), (110) gemachten Feststellungen ergibt sich ferner für $\chi = 1$, daß abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen

$$\frac{dV_E(\xi)}{d\xi} \tag{116}$$

bestimmt und stetig ist.

Setzt man in (109) und (110) $\chi = x_\mu$, $\mu = 2 \ldots n$, so folgt, daß das Integral

$$\int_{K(x_1 = \xi)} x_\mu dx_2 \ldots dx_n \tag{117}$$

als Funktion von ξ überall stetig und abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen auch stetig differenzierbar ist.

Es sei nun

$$\alpha^* < \xi < \beta^*. \tag{118}$$

Man bezeichne die Koordinaten des Euklidischen Schwerpunktes des Schnittes $K(x_1 = \xi)$ mit $m_\mu(\xi)$, $\mu = 2 \ldots n$. Dann hat man

$$(119) \qquad m_\mu(\xi) = \frac{1}{V_E(\xi)} \int_{K(x_1 = \xi)} x_\mu \, dx_2 \ldots dx_n,$$

wobei der Nenner, wie eben festgestellt, nicht verschwindet. Die obigen Ausführungen ergeben also:

Die Koordinaten $m_\mu(\xi)$, $\mu = 2 \ldots n$, des Schwerpunktes des Schnittes, welchen der reguläre Körper K mit der Ebene $x_1 = \xi$ bildet, sind für $\alpha^* < \xi < \beta^*$ als Funktionen von ξ überall stetig und, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen, auch stetig differenzierbar.

§ 5.

Die Abrundung nach dem Vorbilde von Schwarz [7]).

1) Es sei für $n \geqq 3$ dem n-dimensionalen Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $u, v_1 \ldots v_{n-1}$ die Maßbestimmung

$$(1) \qquad \overline{ds}^2 = du^2 + a^2 \sum_1^{n-1} {}_\nu \, dv_\nu^2, \qquad n \geqq 3$$

aufgeprägt. Wir setzen ferner noch voraus, daß

$$(2) \qquad a = GH$$

ist, wobei

$$(3) \qquad G = G(u)$$

eine stetige, positive Funktion von u bedeutet, und

$$(4) \qquad H = H(v_1 \ldots v_{n-1})$$

eine stetige, positive Funktion von $v_1 \ldots v_{n-1}$. Es gelten also die Ungleichungen

$$(5) \qquad G > 0, \quad H > 0.$$

Es bezeichne im Euklidischen Modellraum mit den rechtwinkligen Koordinaten $u, v_1 \ldots v_{n-1}$ K einen regulären Körper, in bezug auf welchen die Richtung der u-Achse nicht eigentlich singulär ist, und R den Rand von K.

Auf jede der endlich vielen regulären $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, aus welchen R als Rand eines regulären Körpers definitionsgemäß

---

[1]) Vgl. H. A. Schwarz, „Beweis des Satzes, daß die Kugel kleinere Oberfläche besitzt, als jeder andere Körper gleichen Volumens". Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Bd. II, S. 327–340.

zusammengesetzt ist, wende man jetzt den Satz XI, § 4 für $\psi = 1$ an und summiere über alle Mannigfaltigkeiten. So ergibt sich das Resultat, daß das Integral

$$\int_{R(u \leqq \xi)} \overline{d s}_{n-1} \tag{6}$$

für *alle* Werte von ξ bestimmt und als Funktion von ξ stetig ist. Dabei bedeutet $\overline{d s}_{n-1}$ das $(n-1)$-dimensionale Flächenelement in der Maßbestimmung (1).

Man setze jetzt voraus, daß ξ keine der endlich vielen sogenannten Ausnahmestellen ist, für welche eine der Randmannigfaltigkeiten des Körpers K von der Euklidischen Ebene $u = \xi$ in dem im § 4, Abschnitt 1) festgelegten Sinne berührt wird. Dann ergibt der Satz XII, § 4 in der Spezialisierung § 4 (93) für $k = n-1$ und $\psi = 1$, wenn man ihn wie bei der Herleitung von (6) zunächst auf alle $(n-1)$-dimensionalen Randmannigfaltigkeiten von K anwendet und dann summiert,

$$\frac{d}{d\xi} \int_{R(u \leqq \xi)} \overline{d s}_{n-1} = \int_{R(u = \xi)} \sqrt{1 + a^2 \operatorname{tg}^2 \measuredangle \{u, T\}}\, \overline{d s}_{n-2}, \tag{7}$$

wobei $\measuredangle \{u, T\}$ den Euklidischen Winkel zwischen dem Einheitsvektor der u-Achsenrichtung und seiner Euklidisch senkrechten Projektion auf die Tangentialebene bedeutet. Bezeichnet nun N die äußere Euklidische Normale und $\measuredangle \{u, N\}$ den zwischen 0 und π gelegenen Euklidischen Winkel zwischen dieser und dem Einheitsvektor der u-Achsenrichtung, so hat man wegen § 4 (25)

$$\cos \measuredangle \{u, T\} = \sin \measuredangle \{u, N\} > 0, \tag{8}$$

$$\text{sign. } (\operatorname{cotg} \measuredangle \{u, N\} = \text{sign. } (\cos \measuredangle \{u, N\}. \tag{9}$$

Die Einführung von (8) in (7) ergibt

$$\frac{d}{d\xi} \int_{R(u \leqq \xi)} \overline{d s}_{n-1} = \int_{R(u = \xi)} \sqrt{1 + a^2 \operatorname{cotg}^2 \measuredangle \{u, N\}}\, \overline{d s}_{n-2}. \tag{10}$$

Dabei ist gemäß Satz XII, § 4 der durch diese Gleichung dargestellte Differentialquotient des Integrals auf der linken Seite an der betrachteten Stelle, d. h. also allein unter Ausschluß der endlich vielen Ausnahmestellen, als Funktion von ξ stetig. Da das Integral selbst, wie unter (6) festgestellt, für *alle* Werte von ξ stetig und zwar monoton ist, so folgt

$$\overline{O} = \int_K \overline{d s}_{n-1} = \int_{\alpha^*}^{\beta^*} d\xi \int_{R(u = \xi)} \sqrt{1 + a^2 \operatorname{cotg}^2 \measuredangle \{u, N\}}\, \overline{d s}_{n-2}, \tag{11}$$

wobei $\overline{O}$ die Oberfläche des Körpers K in der Maßbestimmung (1) bedeutet, und

$$\alpha^* = \mathrm{Min}(u) \text{ in } K, \quad \beta^* = \mathrm{Max}(u) \text{ in } K \tag{12}$$

gesetzt ist. Ferner ist dabei das innere Integral auf der rechten Seite abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen von ξ bestimmt und als Funktion von ξ stetig.

Es sei ξ keiner der Ausnahmewerte. Dann hat man, da wegen § 4 (92) $\overline{d}s_{n-2} = a_2^{n-2} ds_{n-2}$ ist, wobei hier für a_2 $a = GH$ einzusetzen ist, gemäß der Ungleichung von Schwarz [8])

$$\int_{R(u=\xi)} \sqrt{1 + a^2 \operatorname{cotg}^2 \measuredangle \{u, N\}}\, \overline{d}s_{n-2} \tag{13}$$

$$= \int_{R(u=\xi)} G(\xi)^{n-2} \sqrt{H^{2n-4} + G(\xi)^2 H^{2n-2} \operatorname{cotg}^2 \measuredangle \{u, N\}}\, ds_{n-2}$$

$$\geqq G(\xi)^{n-2} \sqrt{\Big[\int_{R(u=\xi)} H^{n-2} ds_{n-2}\Big]^2 + G(\xi)^2 \Big[\int_{R(u=\xi)} H^{n-1} \operatorname{cotg} \measuredangle \{u, N\}\, ds_{n-2}\Big]^2}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt hierbei dann und nur dann, wenn

$$H(v_1 \ldots v_{n-1}) \operatorname{cotg} \measuredangle \{u, N\} \tag{14}$$

für $u = \xi$ konstant bleibt.

Aus der Gleichung § 4 (109) für $\chi = H^{n-1}$ erhält man jetzt wegen

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \tag{15}$$

bei Berücksichtigung der Übereinstimmung der Vorzeichenbestimmungen § 4 (108) und § 5 (9)

$$\int_{R(u=\xi)} H^{n-1} \operatorname{cotg} \measuredangle \{u, N\}\, ds_{n-2} = -\frac{dJ(\xi)}{d\xi}, \tag{16}$$

wobei

$$J(\xi) = \int_{K(u=\xi)} H^{n-1}\, dv_1 \ldots dv_{n-1} \tag{17}$$

gesetzt ist, und, wie § 4 unter (109), (110) festgestellt, für alle Werte von ξ stetig und bis auf die endlich vielen Ausnahmewerte auch stetig differenzierbar ist. Die Einführung von (16) in (13) ergibt das Resultat:

Es ist, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten,

$$\int_{R(u=\xi)} \sqrt{1 + a^2 \operatorname{cotg}^2 \measuredangle \{u, N\}}\, \overline{d}s_{n-2} \tag{18}$$

$$\geqq G(\xi)^{n-2} \sqrt{\Big[\int_{R(u=\xi)} H^{n-2}\, ds_{n-2}\Big]^2 + G(\xi)^2 \Big(\frac{dJ(\xi)}{d\xi}\Big)^2},$$

[8]) Ein Beweis dieser Ungleichung findet sich auch l. c.[1] § 4 I.

wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn der Ausdruck (14) für $u = \xi$ konstant bleibt.

2) Bezeichnet $\overline{V}$ das Volumen des Körpers K in der Maßbestimmung (1), so hat man

$$(19)\quad \overline{V} = \int_K a^{n-1}\, du\, dv_1 \dots dv_{n-1} = \int_K G(u)^{n-1} H^{n-1}\, du\, dv_1 \dots dv_{n-1}.$$

Aus § 4 (96), (97) folgt daher, wenn

$$(20)\quad \varphi = a^{n-1} = G^{n-1} H^{n-1}$$

und mithin

$$(21)\quad \Phi(\xi) = G(\xi)^{n-1} \int_{K(u=\xi)} H^{n-1}\, dv_1 \dots dv_{n-1} = G(\xi)^{n-1} J(\xi)$$

gesetzt wird, das Ergebnis

$$(22)\quad \overline{V} = \int_{\alpha^*}^{\beta^*} G(\xi)^{n-1} J(\xi)\, d\xi,$$

wobei α^* und β^* durch (12) erklärt sind.

3) Nunmehr spezialisieren wir weiter, indem wir im Hinblick auf § 3 (52)

$$(23)\quad H(v_1 \dots v_{n-1}) = \frac{2}{1 + \mathsf{K} \sum_1^{n-1} v_\nu^2}$$

setzen, wobei K eine Konstante bedeutet. Ist dabei $\mathsf{K} < 0$, so wird der Modellraum nur von demjenigen Bereich des (u, v)-Raumes gebildet, der durch die Gleichung

$$1 + \mathsf{K} \sum_1^{n-1} v_\nu^2 > 0$$

oder gleichbedeutend

$$(23')\quad \sum_1^{n-1} v_\nu^2 < \frac{1}{|\mathsf{K}|}$$

bestimmt ist. Da K als regulärer Körper abgeschlossen ist, so besitzt die Funktion

$$1 + \mathsf{K} \sum_1^{n-1} v_\nu^2$$

in K ein Minimum, das mit $d(K)$ bezeichnet werden möge. Es gilt also für alle Punkte von K die Ungleichung

$$(23'')\quad 1 + \mathsf{K} \sum_1^{n-1} v_\nu^2 \geqq d(K) > 0.$$

Ist ferner $\mathsf{K} \neq 0$, so erhält die Maßbestimmung (1) durch die Substitution

$$v_\nu = \frac{1}{\sqrt{|\mathsf{K}|}} v'_\nu$$

die Gestalt

$$d\bar{s}^2 = du^2 + \frac{G(u)^2}{|\mathsf{K}|} H'^2 \sum_1^{n-1} {}_\nu dv_\nu'^2,$$

wobei

$$H' = \frac{2}{1 + \frac{\mathsf{K}}{|\mathsf{K}|} \sum_1^{n-1} {}_\nu v_\nu'^2}$$

ist. Wir können uns daher darauf beschränken, K die Werte $0, -1, +1$ zu erteilen.

Die Maßbestimmung

$$d\bar{s}^2 = H^2 \sum_1^{n-1} {}_\nu dv_\nu^2 \tag{24}$$

besitzt das konstante Krümmungsmaß K und definiert daher je nachdem, ob K verschwindet, negativ oder positiv ist, im $(n-1)$-dimensionalen (v)-Raum eine Euklidische, hyperbolische oder sphärische Geometrie. Jeder Bewegung des (v)-Raumes in dieser Geometrie entspricht im (u, v)-Raum bei festgehaltenem u, da die beiden Maßbestimmungen sich bei festem u nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, in der Maßbestimmung (1) ebenfalls eine Bewegung, d. h. eine ein-eindeutige Transformation des Raumes, welche die Maßbestimmung invariant läßt. Jeder Drehung des (v)-Raumes um einen festen Punkt mit den Koordinaten $v_\nu = c_\nu$, $\nu = 1 \ldots n-1$, entspricht daher im (u, v)-Raum bei festgehaltenem u in der Maßbestimmung (1) eine Bewegung, bei welcher jeder Punkt der durch die Gleichungen $v_\nu = c_\nu$, $\nu = 1 \ldots n-1$ gegebenen geodätischen Linie festbleibt, und die mithin als eine Rotationsbewegung um diese geodätische Linie als Achse zu bezeichnen ist. Als Rotationskörper um diese Achse ist dementsprechend ein solcher Körper zu bezeichnen, der bei allen Rotationsbewegungen um die Achse in sich selbst übergeht. Das ist offenbar damit gleichbedeutend, daß jeder Schnitt des Körpers mit einer Euklidischen Ebene $u = \text{konst}$ in der durch die Maßbestimmung (24) definierten Geometrie von konzentrischen Kugeln begrenzt wird, deren Mittelpunkt die Koordinaten $v_\nu = c_\nu$, $\nu = 1 \ldots n-1$, besitzt.

Wir nehmen jetzt als bewiesen an, daß in der $(n-1)$-dimensionalen, durch die Maßbestimmung (24) definierten Geometrie die Kugel eine kleinere Oberfläche besitzt als jeder andere reguläre Körper gleichen Volumens. Mit anderen Worten, wir setzen die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in dieser Formulierung im $(n-1)$-dimensionalen Raum – und zwar für $\mathsf{K} = 0$

im Euklidischen, für $K = -1$ im hyperbolischen und für $K = 1$ im sphärischen — voraus.

Man bezeichne im $(n-1)$-dimensionalen Euklidischen, hyperbolischen oder sphärischen Raum die Oberfläche und das Volumen einer Kugel vom Radius r mit

$$O^* = O^*(r) \quad \text{und} \quad V^* = V^*(r), \tag{25}$$

wobei diese Funktionen natürlich noch von der Dimensionenzahl und vom Krümmungsmaß abhängen, welches auf die Werte 0, -1, $+1$ beschränkt sein möge. Die Funktionen $O^*(r)$ und $V^*(r)$ sind dann im Euklidischen und hyperbolischen Fall für $r \geqq 0$ definiert und verschwinden für $r = 0$. Im sphärischen Fall dagegen sind sie nur für $0 \leqq r \leqq \pi$ definiert, für $r = 0$ verschwinden $O^*(r)$ und $V^*(r)$, während für $r = \pi$ $O^*(r)$ verschwindet und $V^*(r)$ gleich dem Volumen des Gesamtraumes, d. h. also gleich der Gesamtoberfläche der Einheitskugel im Euklidischen n-dimensionalen Raum wird, so daß man also hat

$$V^*(\pi) = nE_n, \tag{25'}$$

wobei E_n das Volumen der n-dimensionalen Euklidischen Einheitskugel bedeutet. Man betrachte jetzt die Oberfläche einer Kugel als Funktion ihres Volumens und setze

$$O^* = O^*[V^*], \tag{25''}$$

wobei auch diese Funktion von der Dimensionenzahl und von dem auf die Werte 0, -1, $+1$ beschränkten Krümmungsmaß abhängt. Die Funktion $O^*[V^*]$ ist im Euklidischen und hyperbolischen Fall für $V^* \geqq 0$ definiert und verschwindet für $V^* = 0$. Im sphärischen Fall ist sie nur für $0 \leqq V^* \leqq nE_n$ definiert und verschwindet für $V^* = 0$ und $V^* = nE_n$. Bei Einführung dieser Funktion läßt sich unsere oben gemachte isoperimetrische Voraussetzung dahin formulieren, daß in dem $(n-1)$-dimensionalen, durch die Maßbestimmung (24) definierten, je nach dem Betrage des Krümmungsmaßes K Euklidischen, hyperbolischen oder sphärischen Raum für jeden regulären Körper die Ungleichung

$$O \geqq O^*[V] \tag{26}$$

gilt, wobei O und V Oberfläche und Volumen des Körpers bedeuten, und das Gleichheitszeichen allein der Kugel vorbehalten bleibt.

Zunächst besteht durchweg die triviale Gleichung

$$\frac{dV^*}{dr} = O^* \text{ [9)]}, \tag{27}$$

[9)] Siehe l. c.[2] S. 221, Gl. (75) und l. c.[3] S. 770, Gl. (83), (84).

und man hat mithin im Euklidischen und hyperbolischen Fall für $r > 0$ und im sphärischen für $0 < r < \pi$

$$\frac{dO^*}{dV^*} = \frac{1}{O^*}\frac{dO^*}{dr}, \tag{28}$$

$$\frac{d^2O^*}{dV^{*2}} = \frac{1}{O^*}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{O^*}\frac{dO^*}{dr}\right). \tag{29}$$

Bezeichnet ferner E_{n-1} das Volumen der $(n-1)$-dimensionalen Euklidischen Einheitskugel, so gelten im $(n-1)$-dimensionalen Raum die Formeln[10])

(30) für $K = 0$, $r > 0$, $O^* = (n-1)E_{n-1}r^{n-2}$,

$$\frac{1}{O^*}\frac{dO^*}{dr} = \frac{n-2}{r}, \quad \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{O^*}\frac{dO^*}{dr}\right) = -\frac{n-2}{r^2},$$

(31) für $K = -1$, $r > 0$, $O^* = (n-1)E_{n-1}\sinh^{n-2} r$,

$$\frac{1}{O^*}\frac{dO^*}{dr} = (n-2)\operatorname{cotgh} r, \quad \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{O^*}\frac{dO^*}{dr}\right) = -\frac{n-2}{\sinh^2 r},$$

(32) für $K = 1$, $0 < r < \pi$, $O^* = (n-1)E_{n-1}\sin^{n-2} r$,

$$\frac{1}{O^*}\frac{dO^*}{dr} = (n-2)\operatorname{cotg} r, \quad \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{O^*}\frac{dO^*}{dr}\right) = -\frac{n-2}{\sin^2 r}.$$

Die Einführung dieser Formeln in (29) zeigt, daß in der Euklidischen und hyperbolischen Geometrie für $V^* > 0$ und in der sphärischen für $0 < V^* < nE_n$

$$\frac{d^2O^*}{dV^{*2}} < 0 \tag{33}$$

bleibt. Bezeichnet nun $F(x)$ eine für $x > 0$ zweimal stetig differenzierbare, an der Stelle $x = 0$ noch stetig verschwindende Funktion, deren zweite Ableitung $F''(x)$ für $x > 0$ negativ bleibt, so hat man für $c_1 > 0$, $c_2 > 0$

$$F(c_1 + c_2) - F(c_1) - F(c_2) = \int_0^{c_1} dx \int_0^{c_2} F''(x+y)\,dy < 0. \tag{34}$$

Hieraus folgt für $V_1^* > 0$, $V_2^* > 0$

$$O^*[V_1^* + V_2^*] < O^*[V_1^*] + O^*[V_2^*] \tag{35}$$

und durch wiederholte Anwendung dieser Ungleichung

$$\text{für } V_\mu^* > 0,\ \mu = 1 \ldots m,\ m \geqq 2,\quad O^*\left[\sum_1^m{}_\mu V_\mu^*\right] < \sum_1^m{}_\mu O^*[V_\mu^*], \tag{36}$$

wobei im sphärischen Fall natürlich noch die Voraussetzung

$$\sum_1^m{}_\mu V_\mu^* \leqq nE_n$$

erfüllt sein muß.

---

[10]) Siehe Anmerkung [9]).

Schreibt man in dieser Funktionalungleichung statt der willkürlichen V_μ^* V_μ, so ergibt sich

(37) für $m \geqq 2$, $V_\mu > 0$, $\mu = 1 \ldots m$, $O^*[\sum_1^m{}_\mu V_\mu] < \sum_1^m{}_\mu O^*[V_\mu]$,

wobei in der sphärischen Geometrie die Summe der V_μ $n E_n$ nicht überschreiten darf.

Es seien nun in dem durch die Maßbestimmung (24) definierten $(n-1)$-dimensionalen Euklidischen, hyperbolischen oder sphärischen Raum m reguläre Körper mit den Volumina V_μ und den Oberflächen O_μ, $\mu = 1 \ldots m$, gegeben, von denen je zwei nur Punkte gemein haben sollen, die für keinen von beiden innere Punkte oder Randpunkte sind, die im Innern einer seiner regulären $(n-2)$-dimensionalen Randmannigfaltigkeiten liegen. Bezeichnet dann V das Volumen der Vereinigungsmenge dieser Körper und O die Oberfläche, so hat man zunächst

(38) $$V_\mu > 0, \ \mu = 1 \ldots m, \quad V = \sum_1^m{}_\mu V_\mu, \quad O = \sum_1^m{}_\mu O_\mu.$$

Auf Grund von (26) erhält man

(39) $$O_\mu \geqq O^*[V_\mu] \text{ und mithin } O \geqq \sum_1^u{}_\mu O^*[V_\mu].$$

Die Einführung von (37) ergibt für $m \geqq 2$

(40) $$O > O^*[\sum_1^m{}_\mu V_\mu] = O^*[V].$$

Es gilt also auch in diesem Falle

(41) $$O \geqq O^*[V],$$

wobei das Gleichheitszeichen nur dann besteht, wenn es sich um einen einzigen Körper handelt, und dieser eine Kugel ist.

Mit diesem Ergebnis kehren wir nun zu unserer Ungleichung (18) zurück. Wir schicken voraus, daß im folgenden durchweg $\alpha^* \leqq \xi \leqq \beta^*$ vorausgesetzt wird. Ist dann ξ keine der endlich vielen Ausnahmestellen, zu welchen auch α^* und β^* zu zählen sind, so enthält der Schnitt $K(u = \xi)$, wie § 4, Abschnitt 11) festgestellt, innere Punkte von K und besteht gemäß l. c.[1] § 6 IV (13) aus endlich vielen regulären $(n-1)$-dimensionalen Körpern, welche den Voraussetzungen der Ungleichung (41) genügen. Bezeichnet daher in der Maßbestimmung (24) $\bar{O}$ die Oberfläche und $\bar{V}$ das Volumen des Schnittes $K(u = \xi)$, so hat man

(42) $$\bar{O} = \int_{K(u=\xi)} H^{n-2}\, ds_{n-2}, \quad \bar{V} = \int_{K(u=\xi)} H^{n-1}\, dv_1 \ldots dv_{n-1}$$

und mithin wegen (17)

(43) $$\bar{V} = J(\xi).$$

Die Einführung dieser Gleichungen in (41) ergibt

$$\int_{K(u=\xi)} H^{n-2} ds_{n-2} \geqq O^*[J(\xi)]. \tag{44}$$

Dabei gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn der Schnitt $K(u = \xi)$ aus einer einzigen Vollkugel des $(n-1)$-dimensionalen (v)-Raumes besteht, und die Funktion O^* ist, wie wiederholt werden darf, noch von der Dimensionenzahl und dem Krümmungsmaß abhängig.

Die Einführung von (44) in (18) und (10) ergibt, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten von ξ,

$$\frac{d}{d\xi} \int_{R(u \leqq \xi)} \overline{ds}_{n-1} \geqq G(\xi)^{n-2} \sqrt{O^*[J(\xi)]^2 + G(\xi)^2 \left(\frac{dJ(\xi)}{d\xi}\right)^2}\, d\xi, \tag{45}$$

wobei beide Seiten als Funktionen von ξ, abgesehen von den Ausnahmestellen, stetig sind. Ebenso folgt aus (11)

$$\overline{O} \geqq \int_{\alpha^*}^{\beta^*} G(\xi)^{n-2} \sqrt{O^*[J(\xi)]^2 + G(\xi)^2 \left(\frac{dJ(\xi)}{d\xi}\right)^2}\, d\xi, \tag{45'}$$

wobei der Integrand, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen, bestimmt und stetig ist. Das Gleichheitszeichen in (45) für alle Werte von ξ bis auf die endlich vielen Ausnahmewerte oder, was damit gleichbedeutend ist, das Gleichheitszeichen in (45′) gilt dann und nur dann, wenn, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen, der Schnitt $K(u = \xi)$ in der Maßbestimmung (24) durch eine $(n-1)$-dimensionale Vollkugel dargestellt wird, während ferner noch auf dem Schnitt der Ausdruck (14) konstant bleibt.

4) Wir wollen jetzt zeigen, daß die im letzten Absatz festgestellten notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in der Ungleichung (45′) dann und nur dann erfüllt sind, wenn es sich um einen Rotationskörper in der Maßbestimmung (1) handelt, dessen Achse durch Gleichungen von der Gestalt

$$v_\nu = c_\nu, \quad \nu = 1 \ldots n-1 \tag{46}$$

bestimmt ist, wobei die c_ν Konstanten bedeuten, und dessen Schnitte mit den Modellraumebenen $u =$ konst in der Maßbestimmung (24) $(n-1)$-dimensionale Vollkugeln sind.

Voraussetzungsgemäß bildet, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen, der Schnitt $K(u = \xi)$ im (v)-Raum bei der Maßbestimmung (24) eine Vollkugel. Diese wird im (v)-Raum als Euklidischem Modellraum ebenfalls durch eine Vollkugel oder durch einen von einer Ebene begrenzten Halbraum

dargestellt. Da aber der Körper K voraussetzungsgemäß im Euklidischen (u, v)-Raum regulär und mithin auch beschränkt ist, so ist auch jeder Schnitt $K(u = \xi)$ im Euklidischen (v)-Raum beschränkt. Daher wird, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten, jeder Schnitt $K(u = \xi)$ in dem das Euklidische Modell bildenden (v)-Raum durch eine Vollkugel dargestellt.

Man bezeichne nun für *alle* Werte von ξ das Euklidische Volumen des Schnittes $K(u = \xi)$ mit $V_E(\xi)$. Dann ist also

$$V_E(\xi) = \int_{K(u=\xi)} dv_1 \dots dv_{n-1}. \tag{47}$$

Wie § 4, Abschnitt 11) festgestellt, ist die Funktion $V_E(\xi)$ für alle Werte von ξ stetig, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten auch stetig differenzierbar und verschwindet im Intervall $\alpha^* \leqq \xi \leqq \beta^*$ nur an den Stellen α^* und β^*, die ebenfalls zu den Ausnahmewerten zählen.

Man definiere jetzt die Funktion $\varrho(\xi)$ durch die Gleichung

$$E_{n-1}\varrho(\xi)^{n-1} = V_E(\xi), \tag{48}$$

wobei E_{n-1} wie oben das Volumen der $(n-1)$-dimensionalen Euklidischen Einheitskugel bedeutet. Dann folgt aus den über $V_E(\xi)$ gemachten Feststellungen, daß auch $\varrho(\xi)$ im Intervall $\alpha^* \leqq \xi \leqq \beta^*$ nur an den Stellen α^* und β^* verschwindet, für alle Werte von ξ stetig und, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten, stetig differenzierbar ist.

Endlich definiere man im offenen Intervall $\alpha^* < \xi < \beta^*$ die Funktionen $m_\nu(\xi)$, $\nu = 1 \dots n-1$, durch die Gleichung

$$m_\nu(\xi) = \frac{1}{V_E(\xi)} \int_{K(u=\xi)} v_\nu \, dv_1 \dots dv_{n-1}. \tag{49}$$

Dann stellen die Funktionen $m_\nu(\xi)$ die Koordinaten des Schwerpunktes des Schnittes $K(u = \xi)$ in dem das Euklische Modell bildenden (v)-Raum dar und sind, wie § 4, Abschnitt 11) festgestellt, in ihrem offenen Definitionsintervall $\alpha^* < \xi < \beta^*$ ebenfalls für alle Werte von ξ stetig und, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten, auch stetig differenzierbar. Da nun, abgesehen von diesen Ausnahmewerten, der Schnitt in dem das Euklidische Modell bildenden (v)-Raum durch eine Vollkugel dargestellt wird, so wird ihr Radius durch die Funktion $\varrho(\xi)$ gegeben, während die Koordinaten ihres Mittelpunktes, weil dieser mit dem Schwerpunkt zusammenfällt, durch die Funktionen $m_\nu(\xi)$ bestimmt sind.

Ist also ξ keiner der endlich vielen Ausnahmewerte, so hat die Oberfläche der Vollkugel, aus welcher der Schnitt $K(u = \xi)$ besteht, die Gleichung

$$\sum_1^{n-1}{}_\nu (v_\nu - m_\nu(\xi))^2 - \varrho(\xi)^2 = 0. \tag{50}$$

Die Oberfläche des Körpers K hat daher, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten von u, die Gleichung

$$F = F(u, v_1 \dots v_{n-1}) = \sum_1^{n-1}{}_\nu (v_\nu - m_\nu(u))^2 - \varrho(u)^2 = 0. \tag{51}$$

Es sei nun ξ' einer der endlich vielen Ausnahmewerte im offenen Intervall $\alpha^* < \xi' < \beta^*$. Liegt dann der Punkt $v_1^* \dots v_{n-1}^*$ im Innern der Kugel

$$\sum_1^{n-1}{}_\nu (v_\nu - m_\nu(\xi'))^2 - \varrho(\xi')^2 = 0, \tag{52}$$

so liegt wegen der Stetigkeit der Funktionen $m_\nu(\xi)$ und $\varrho(\xi)$ bei genügend kleinem $|u - \xi'|$ der Punkt auch im Innern der bei festem u durch (51) bestimmten Kugel. Da bei genügend kleinem von Null verschiedenem $|u - \xi'|$ u kein Ausnahmewert ist, so gehört daher bei genügend kleinem von Null verschiedenem $|u - \xi'|$ der Punkt $(u, v_1^* \dots v_{n-1}^*)$ zum Körper K, und da dieser abgeschlossen ist, so gehört auch der Punkt $(\xi', v_1^* \dots v_{n-1}^*)$ zu K. Also gehören alle Punkte im Innern der Kugel (52) zu K und mithin wegen der Abgeschlossenheit von K auch ihre Oberfläche. Ebenso schließt man, daß, wenn der Punkt $v_1^* \dots v_{n-1}^*$ im Äußern der Kugel (52) liegt, alle nicht auf der Ebene $u = \xi'$ gelegenen Punkte des (u, v)-Raumes in einer gewissen Umgebung des Punktes $(\xi', v_1^* \dots v_{n-1}^*)$ dem Körper K nicht angehören. Der Punkt $(\xi', v_1^* \dots v_{n-1}^*)$ kann daher nicht Häufungspunkt von inneren Punkten von K sein. Gemäß der Definitionseigenschaft l. c.[1] § 6 IV (d) muß aber jeder Punkt eines regulären Körpers Häufungspunkt von inneren Punkten sein. Also gehört der Punkt $(\xi', v_1^* \dots v_{n-1}^*)$ nicht zu K. Damit ist gezeigt, daß die Gleichung (51) auch an den endlich vielen Ausnahmestellen von u zwischen α^* und β^* die Oberfläche des Körpers K darstellt. An den Stellen $u = \alpha^*$ und $u = \beta^*$ ist die Gleichung (51) dagegen zunächst überhaupt nicht definiert.

Es sei nun u keiner der endlich vielen Ausnahmewerte. Da die Funktion $F(u, v_1 \dots v_{n-1})$ im Äußern der Schnittkugel (51) positiv und im Innern negativ wird, so erhält man

$$\begin{aligned}
\cos \measuredangle \{u, N\} &= \frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{+\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2 + \sum_1^{n-1}{}_\nu \left(\frac{\partial F}{\partial v_\nu}\right)^2}}, \\
\cos \measuredangle \{v_\nu, N\} &= \frac{\frac{\partial F}{\partial v_\nu}}{+\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2 + \sum_1^{n-1}{}_\nu \left(\frac{\partial F}{\partial v_\nu}\right)^2}},
\end{aligned} \tag{53}$$

und entsprechend der Vorzeichenbestimmung (9)

$$\text{(54)}\qquad \operatorname{cotg} \measuredangle \{u, N\} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}}{+\sqrt{\sum_1^{n-1}{}_\nu \left(\dfrac{\partial F}{\partial v_\nu}\right)^2}}.$$

Nun ist

$$\text{(55)}\qquad \sum_1^{n-1}{}_\nu \left(\frac{\partial F}{\partial v_\nu}\right)^2 = 4 \sum_1^{n-1}{}_\nu (v_\nu - m_\nu(u))^2 = 4\,\varrho(u)^2,$$

$$\text{(56)}\qquad \frac{\partial F}{\partial u} = -2 \sum_1^{n-1}{}_\nu (v_\nu - m_\nu(u))\, m_\nu'(u) - 2\,\varrho(u)\,\varrho'(u).$$

Mithin ist

$$\text{(57)}\qquad \operatorname{cotg} \measuredangle \{u, N\} = -\sum_1^{n-1}{}_\nu \frac{(v_\nu - m_\nu(u))\, m_\nu'(u) + \varrho(u)\,\varrho'(u)}{\varrho(u)}.$$

Da der Ausdruck (14) voraussetzungsgemäß eine Funktion von u darstellen soll, so hat man, wenn diese mit $q(u)$ bezeichnet wird,

$$\text{(58)}\qquad H \operatorname{cotg} \measuredangle \{u, N\} = q(u).$$

Die Einführung von (23) und (57) ergibt

$$\text{(59)}\qquad \sum_1^{n-1}{}_\nu 2\, m_\nu'(u)\,(v_\nu - m_\nu(u)) + 2\,\varrho(u)\,\varrho'(u) + q(u)\,\varrho(u)\left(1 + \mathsf{K} \sum_1^{n-1}{}_\nu v_\nu^2\right) = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung $m_\nu = m_\nu(u)$, $m_\nu' = m_\nu'(u)$, $\varrho = \varrho(u)$, $\varrho' = \varrho'(u)$, $q = q(u)$, und subtrahiert die mit $\mathsf{K} q \varrho$ multiplizierte Gleichung (51) von der Gleichung (59), so ergibt sich

$$\text{(60)}\qquad \sum_1^{n-1}{}_\nu 2(m_\nu' + \mathsf{K} q \varrho m_\nu)\, v_\nu + \left(2\,\varrho\,\varrho' - \sum_1^{n-1}{}_\nu 2\, m_\nu m_\nu'\right) + \mathsf{K} q \varrho \left(\varrho^2 - \sum_1^{n-1}{}_\nu m_\nu^2\right) + q\varrho = 0.$$

Es sei jetzt

$$\text{(61)}\qquad \mathsf{K} \neq 0.$$

Man definiere die Funktion $m_0 = m_0(u)$ durch die Gleichung

$$\text{(62)}\qquad m_0 = \frac{1 + \mathsf{K}\left(\varrho^2 - \sum_1^{n-1}{}_\nu m_\nu^2\right)}{2}.$$

Dann erhält die Gleichung (60) die Gestalt

$$\text{(63)}\qquad \sum_1^{n-1}{}_\nu 2\,(m_\nu' + \mathsf{K} q \varrho m_\nu)\, v_\nu + \frac{2}{\mathsf{K}}\,(m_0' + \mathsf{K} q \varrho m_0) = 0.$$

Diese Gleichung stellt bei festem u, wenn sie nicht identisch verschwindet, im (v)-Raum eine Ebene dar, was unmöglich ist, da auf ihr alle Punkte der Kugeloberfläche (51) liegen müßten. Also hat man die Gleichungen

$$m_0' + \mathsf{K} q \varrho m_0 = 0, \quad m_\nu' + \mathsf{K} q \varrho m_\nu = 0, \quad \nu = 1 \ldots n-1. \tag{64}$$

Man definiere jetzt die Funktion $m = m(u)$ durch die Gleichung

$$m^2 = m_0^2 + \mathsf{K} \sum_1^{n-1}{}_\nu m_\nu^2, \quad m \geqq 0. \tag{65}$$

Man erhält

$$m m' = m_0 m_0' + \mathsf{K} \sum_1^{n-1}{}_\nu m_\nu m_\nu'. \tag{66}$$

Addiert man zu (66) die mit $\mathsf{K} q \varrho$ multiplizierte Gleichung (65), so ergibt sich wegen (64)

$$m (m' + \mathsf{K} q \varrho m) = 0. \tag{67}$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß m nirgends verschwindet.

Man hat bei Einführung von (62)

$$\begin{aligned} 4m^2 &= \Big(1 + \mathsf{K}\Big(\varrho^2 - \sum_1^{n-1}{}_\nu m_\nu^2\Big)\Big)^2 + 4\,\mathsf{K} \sum_1^{n-1}{}_\nu m_\nu^2 \\ &= 1 + 2\,\mathsf{K}\Big(\varrho^2 + \sum_1^{n-1}{}_\nu m_\nu^2\Big) + \mathsf{K}^2\Big(\varrho^2 - \sum_1^{n-1}{}_\nu m_\nu^2\Big)^2 \\ &= \Big(1 + \mathsf{K}\Big(\varrho + \sqrt{\sum_1^{n-1}{}_\nu m_\nu^2}\Big)^2\Big)\Big(1 + \mathsf{K}\Big(\varrho - \sqrt{\sum_1^{n-1}{}_\nu m_\nu^2}\Big)^2\Big). \end{aligned} \tag{68}$$

Bezeichnen nun $\overline{v}_\nu = \overline{v}_\nu(u)$ und $\underline{v}_\nu = \underline{v}_\nu(u)$, $\nu = 1 \ldots n-1$ bei festem u die Koordinaten des vom Punkte $v_\nu = 0$, $\nu = 1 \ldots n-1$, Euklidisch weitesten und nächsten Punktes der Kugeloberfläche (51), so ist

$$\Big(\varrho + \sqrt{\sum_1^{n-1}{}_\nu m_\nu^2}\Big)^2 = \sum_1^{n-1}{}_\nu \overline{v}_\nu^2, \quad \Big(\varrho - \sqrt{\sum_1^{n-1}{}_\nu m_\nu^2}\Big)^2 = \sum_1^{n-1}{}_\nu \underline{v}_\nu^2. \tag{69}$$

Mithin ist

$$m^2 = \tfrac{1}{4}\Big(1 + \mathsf{K} \sum_1^{n-1}{}_\nu \overline{v}_\nu^2\Big)\Big(1 + \mathsf{K} \sum_1^{n-1}{}_\nu \underline{v}_\nu^2\Big). \tag{70}$$

Hieraus folgt für

$$\mathsf{K} > 0 \qquad m \geqq \tfrac{1}{2} \tag{71}$$

und wegen (23″) für

$$\mathsf{K} < 0 \qquad m \geqq \frac{d(K)}{2} > 0. \tag{72}$$

Diese Ungleichungen sind zunächst nur bis auf die endlich vielen Ausnahmewerte von u bewiesen. Da aber die Funktionen $m_\nu(u)$ und $\varrho(u)$ für *alle* Werte

von u im offenen Intervall zwischen α^* und β^* definiert und stetig sind, so gilt dasselbe auch von den durch (62) und (65) definierten Funktionen $m_0(u)$ und $m(u)$. Es gelten daher auch die Ungleichungen (71), (72) für alle diese Werte von u. Daher sind auch die Funktionen

$$\frac{m_0}{m},\ \frac{m_\nu}{m},\ \nu = 1 \dots n-1 \tag{73}$$

im offenen Intervall zwischen α^* und β^* für alle Werte von u definiert und stetig. Abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten folgt aus (67) wegen (71), (72)

$$m' + \mathsf{K} q \varrho m = 0. \tag{74}$$

Diese Gleichung ergibt in Verbindung mit den Gleichungen (64)

$$\frac{d}{du}\left(\frac{m_0}{m}\right) = 0,\ \frac{d}{du}\left(\frac{m_\nu}{m}\right) = 0,\ \nu = 1 \dots n-1. \tag{75}$$

Da die letzten Gleichungen, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen gesichert sind, während die Funktionen $\frac{m_0}{m}, \frac{m_\nu}{m}$ auch in diesen Punkten stetig bleiben, so bleiben die Funktionen im gesamten offenen Intervall zwischen α^* und β^* konstant. Man kann also setzen

$$\frac{m_0}{m} = \eta_0,\ \frac{m_\nu}{m} = -\eta_\nu, \tag{76}$$

wobei $\eta_0, \eta_1 \dots \eta_{n-1}$ Konstanten bezeichnen.

Ist endlich

$$\mathsf{K} = 0,$$

so stellt schon die Gleichung (59), bei festem u, wenn sie nicht identisch verschwindet, eine Ebene dar. Man erhält daher durch dieselbe Schlußweise wie oben die Gleichungen

$$m_\nu' = 0, \qquad \nu = 1 \dots n-1, \tag{77}$$

und kann mithin setzen

$$m_\nu = -\eta_\nu, \qquad \nu = 1 \dots n-1, \tag{78}$$

wobei die η_ν Konstanten bedeuten.

Die Gleichung (51) gewinnt also für $\mathsf{K} = 0$ die Gestalt

$$\sum_1^{n-1}{}_\nu (v_\nu + \eta_\nu)^2 - \varrho(u)^2 = 0, \tag{79}$$

wobei $\eta_1 \dots \eta_{n-1}$ Konstanten bezeichnen.

Für $\mathsf{K} \neq 0$ gilt die identische Umformung

$$\sum_1^{n-1}{}_\nu (v_\nu - m_\nu)^2 - \varrho^2 = m_0\left(\sum_1^{n-1}{}_\nu v_\nu^2 - \frac{1}{\mathsf{K}}\right) - 2\sum_1^{n-1}{}_\nu m_\nu v_\nu + \frac{1 - \mathsf{K}\left(\varrho^2 - \sum_1^{n-1}{}_\nu m_\nu^2\right)}{2}\left(\sum_1^{n-1}{}_\nu v_\nu^2 + \frac{1}{\mathsf{K}}\right).$$

Dadurch erhält die Gleichung (51) nach Division durch m die Gestalt

$$\eta_0\left(\sum_1^{n-1}{}_\nu v_\nu^2 - \frac{1}{\mathsf{K}}\right) + 2\sum_1^{n-1}{}_\nu \eta_\nu v_\nu + \lambda(u)\left(\sum_1^{n-1}{}_\nu v_\nu^2 + \frac{1}{\mathsf{K}}\right) = 0, \tag{80}$$

wobei $\lambda(u)$ durch die Gleichung

$$\lambda(u) = \frac{1 - \mathsf{K}\left(\varrho^2 - \sum_1^{n-1}{}_\nu m_\nu^2\right)}{2m} \tag{81}$$

im offenen Intervall zwischen α^* und β^* als stetige Funktion von u definiert ist, und die Konstanten $\eta_0, \eta_1 \ldots \eta_{n-1}$ wegen (65) durch die Gleichung

$$\eta_0^2 + \mathsf{K}\sum_1^{n-1}{}_\nu \eta_\nu^2 = 1 \tag{82}$$

normiert sind.

Für $\mathsf{K} = -1$ nimmt die Gleichung (80) die Gestalt der Gleichung § 2 (18) an, wobei durch (82) die Ungleichung § 2 (24) sichergestellt ist. Wie am Schluß von § 2, Abschnitt 4) festgestellt, sind daher die durch die Gleichung (51) des laufenden Paragraphen bei festem u bestimmten Kugeln im hyperbolischen (v)-Raum vom Krümmungsmaß -1 *konzentrisch*. Bezeichnen $c_1 \ldots c_{n-1}$ die Koordinaten des gemeinsamen Mittelpunktes der Kugeln, so erhält man aus § 2 (33), da die dort figurierende Größe λ_0 wegen § 2 (25) und der Gleichung (82) des laufenden Paragraphen gleich 1 wird,

$$c_\nu = \frac{-\eta_\nu}{\eta_0 + \operatorname{sign}(\eta_0)}, \quad \nu = 1 \ldots n-1.$$

Aus (62) und (76) folgt wegen $\mathsf{K} = -1$

$$\eta_0 \geqq \frac{1 - \varrho(u)^2}{2m(u)},$$

und hieraus ergibt sich, da $\varrho(u)$, wie im Anschluß an (48) festgestellt, mit $(u - \alpha^*)$ gegen Null konvergiert, während η_0 eine Konstante darstellt,

$$\eta_0 > 0. \tag{83}$$

Man hat also die Gleichungen

$$c_\nu = \frac{-\eta_\nu}{1 + \eta_0}, \quad \nu = 1 \ldots n-1, \quad \eta_0 > 0. \tag{84}$$

Für $\mathsf{K} = +1$ nimmt die Gleichung (80) die Gestalt der Gleichung § 2 (74) an, wobei das gleichzeitige Verschwinden sämtlicher $\eta_0, \eta_1 \ldots \eta_{n-1}$ durch (82) ausgeschlossen ist. Mithin sind die durch die Gleichung (51) bei festem u bestimmten Kugeln in dem mit der nunmehr sphärischen Maßbestimmung (24) versehenen (v)-Raum ebenfalls *konzentrisch*. Für die Koordinaten $c_1 \ldots c_{n-1}$ desjenigen der beiden Mittelpunkte dieser konzentrischen Kugeln, der im Innern der durch (51) bestimmten Euklidischen Kugeln des (v)-Raumes liegt und mithin für $\alpha^* < u < \beta^*$ dem Körper K angehört, erhält man gemäß § 2 (75) und der Gleichung (82) des laufenden Paragraphen

$$c_\nu = \frac{-\eta_\nu}{1+\eta_0}; \tag{85}$$

denn es gilt für diesen Mittelpunkt das erste der beiden Formelsysteme § 2 (75), da wegen (62), (71), (72), (76), (81)

$$\eta_0 + \lambda = \frac{1}{m} > 0 \tag{86}$$

bleibt.

Für $\mathsf{K} = 0$ zeigt endlich die Gleichung (79) unmittelbar, daß es sich um konzentrische Kugeln handelt. Für die Koordinaten $c_1 \ldots c_{n-1}$ des gemeinsamen Mittelpunktes im (v)-Raum erhält man in diesem Fall

$$c_\nu = -\eta_\nu. \tag{87}$$

Da in allen drei Fällen der Punkt $(u, c_1, \ldots c_{n-1})$ für $\alpha^* < u < \beta^*$ dem Körper K angehört, so gehören die Punkte $(\alpha^*, c_1 \ldots c_{n-1})$, $(\beta^*, c_1 \ldots c_{n-1})$, da K abgeschlossen ist, ebenfalls zu K. Da ferner, wie im Anschluß an (48) festgestellt, der Euklidische Radius $\varrho(u)$ der „Breitenkugeln" mit $(u - \alpha^*)$ und $(\beta^* - u)$ gegen Null konvergiert, so kann kein anderer Punkt der beiden Ebenen $u = \alpha^*$ und $u = \beta^*$ Häufungspunkt von inneren Punkten von K sein. Gemäß der Definitionseigenschaft l. c.[1] § 6 IV (d) eines regulären Körpers kann daher kein anderer Punkt dieser beiden Ebenen K angehören. Also schneiden die Ebenen $u = \alpha^*$ und $u = \beta^*$ den Körper K nur in den Punkten $(\alpha^*, c_1 \ldots c_{n-1})$ und $(\beta^*, c_1 \ldots c_{n-1})$.

Damit ist der am Eingang dieses Abschnitts angekündigte Beweis vollständig durchgeführt, und wir haben also festgestellt, daß in der Ungleichung (45′) *das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn der Körper K in der Maßbestimmung* (1) *einen Rotationskörper darstellt, dessen Achse durch die Gleichungen $v_\nu = c_\nu$, $\nu = 1 \ldots n = 1$, gegeben ist.*

Bringt man im (v)-Raum mit der Maßbestimmung (24) durch eine Bewegung, der ja bei festgehaltenem u auch eine Bewegung im (u, v)-Raum in der Maßbestimmung (1) entspricht, den Punkt $(c_1 \ldots c_{n-1})$ mit dem Koordinatenanfangspunkt zur Deckung, so folgt aus der Symmetrie der Maßbestimmung (1) in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt, daß ein solcher Rotations-

körper der Maßbestimmung (1) nunmehr auch im Euklidischen (u, v)-Raum einen Rotationskörper bildet.

5) Wir konstruieren nun zu dem gegebenen Körper K einen Euklidischen Rotationskörper K' nach der folgenden Vorschrift:

Die Rotationsachse sei die u-Achse. Die Schnitte mit den Ebenen $u = \text{konst}$ seien Vollkugeln, welche in der Maßbestimmung (24) das gleiche $(n-1)$-dimensionale Volumen besitzen wie der Querschnitt mit K. Dann stimmen die beiden Volumina auch in der Maßbestimmung (1) miteinander überein, da die beiden Maßbestimmungen bei festem u sich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, und der Körper K' ist wegen der Rotationssymmetrie der Maßbestimmung (1) auch in dieser ein Rotationskörper. Bezeichnet $r = r(\xi)$ den in der Maßbestimmung (24) gemessenen Radius der auf der Ebene $u = \xi$ liegenden Vollkugel, die auch als Breitenkugel bezeichnet werden kann, so ist die Funktion $r(\xi)$ bestimmt durch die Gleichung

$$V^*(r) = J(\xi), \tag{88}$$

wobei die Funktion $V^*(r)$ wie in der Gleichung (25) das Volumen der Kugel vom Radius r in der Maßbestimmung (24) ausdrückt, und die das Volumen des Querschnitts $K(u = \xi)$ darstellende Funktion $J(\xi)$ durch die Gleichung (17) gegeben ist. Wie im Anschluß an diese Gleichung festgestellt, ist $J(\xi)$ für alle Werte von ξ stetig und, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten, zu denen, wie wiederholt werden darf, auch α^* und β^* zählen, stetig differenzierbar. Da die Funktion $J(\xi)$ für $\xi < \alpha^*$ und $\xi > \beta^*$ verschwindet, so folgt aus ihrer Stetigkeit, daß sie auch an den Stellen α^* und β^* verschwindet. Da ferner, wie § 4, Abschnitt 11) festgestellt, für $\alpha^* < \xi < \beta^*$ der Querschnitt $K(u = \xi)$ innere Punkte von K enthält, so verschwindet $J(\xi)$ an keiner dieser Stellen. Die Funktion $J(\xi)$ verschwindet also im Intervall $\alpha^* \leqq \xi \leqq \beta^*$ nur an den Stellen α^* und β^*. Aus diesen Feststellungen folgt wegen (88), daß auch die Funktion $r(\xi)$ im Intervall $\alpha^* \leqq \xi \leqq \beta^*$ für alle Werte von ξ stetig bleibt, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten stetig differenzierbar ist und nur an den Stellen α^* und β^* verschwindet. Da die Euklidischen Geraden durch den Koordinatenanfangspunkt des (v)-Raumes auch in der Maßbestimmung (24) Geraden darstellen, so hat man für die vom Koordinatenanfangspunkt in der Maßbestimmung (24) gemessene Entfernung t und für die Euklidische Entfernung t_E die Gleichung

$$\frac{dt}{dt_E} = \frac{2}{1 + \mathrm{K} t_E^2}. \tag{89}$$

Es ist daher

$$r(\xi) = \int_0^{r_E(\xi)} \frac{2\,dt}{1 + \mathrm{K} t^2}, \qquad \frac{dr}{dr_E} = \frac{2}{1 + \mathrm{K} r_E^2}, \tag{90}$$

wobei $r_E = r_E(\xi)$ den Euklidischen Radius der auf der Ebene $u = \xi$ liegenden Breitenkugel bedeutet. Die Oberfläche der Breitenkugel wird gemäß (25), (25′) und (88) gegeben durch die Funktionen

$$O^*(r) = O^*[V^*(r)] = O^*[J(\xi)]. \tag{91}$$

Da nun der Quotient des $(n-2)$-dimensionalen Oberflächenelements in der Maßbestimmung (24) durch das entsprechende Euklidische Oberflächenelement gleich H^{n-2} ist, und auf der Breitenkugel

$$H = \frac{2}{1 + \mathsf{K} r_E^2} \tag{92}$$

bleibt, so hat man

$$O^*(r) = (n-1)\, E_{n-1}\, r_E^{n-2} \left(\frac{2}{1+\mathsf{K} r_E^2}\right)^{n-2}, \tag{93}$$

wobei E_{n-1} wie früher das Volumen der Euklidischen Einheitskugel im $(n-1)$-dimensionalen Raum bezeichnet.

Die Gleichung der Oberfläche des Rotationskörpers K' ist

$$\sum_1^{n-1} v_\nu^2 - r_E(u)^2 = 0. \tag{94}$$

Man hat daher auf der Oberfläche abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten von u gemäß (54), (55), (56)

$$\operatorname{cotg} \measuredangle \{u, N\} = - r_E'(u), \tag{95}$$

und wegen (92)

$$H \operatorname{cotg} \measuredangle \{u, N\} = \frac{-2 r_E'(u)}{1 + \mathsf{K} r_E(u)^2}. \tag{96}$$

Mithin erhält man bei Einführung von (90) abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten von u

$$H \operatorname{cotg} \measuredangle \{u, N\} = - \frac{dr}{dr_E} r_E'(u) = - r'(u). \tag{97}$$

$$\sqrt{1 + G(u)^2 H^2 \operatorname{cotg}^2 \measuredangle \{u, N\}} = \sqrt{1 + G(u)^2 r'(u)^2}. \tag{98}$$

Wir dürfen nun nicht etwa ohne weiteres schließen, daß für den Rotationskörper K' die Gleichung (22) und die Ungleichung (45) bei ausgeschlossenem Ungleichheitszeichen, d. h. also als Gleichung, Geltung besitzen. Denn diese Relationen sind für einen regulären Körper hergeleitet worden. Der Körper K' braucht aber nicht regulär zu sein, da die zweimalige Differenzierbarkeit von $r(u)$ und mithin auch von $r_E(u)$ nach u nicht gesichert ist. Es ist aber leicht, diese Gleichungen direkt nachzuweisen.

Es bezeichnen K' die Oberfläche von K' als Punktmenge und $\overline{O}'$ ihren Flächeninhalt in der Maßbestimmung (1). Dann hat man zunächst

$$\overline{O}' = \int_{K'} \overline{d s}_{n-1}. \tag{99}$$

Führt man hier die Gleichungen § 4, Abschnitt 7) (91), (92) für $k = n-1$ bei Berücksichtigung der Schlußbemerkung dieses Abschnitts ein, so ergibt sich

$$\overline{O}' = \int_{K'} G(u)^{n-2} H^{n-2} \sqrt{1 + G^2 H^2 \operatorname{tg}^2 \measuredangle \{u, T\}}\, du\, ds_{n-2}, \tag{100}$$

wobei ds_{n-2} das Euklidische Oberflächenelement der Breitenkugel bedeutet. Wegen (8), (9), (92), (98) erhält man

$$\overline{O}' = \int_{K'} G(u)^{n-2} \Big(\frac{2}{1 + \mathsf{K} r_E(u)^2}\Big)^{n-2} \sqrt{1 + G(u)^2 r'(u)^2}\, du\, ds_{n-2}, \tag{101}$$

wobei die Funktionen $G(u)$ und $r_E(u)$ überall stetig sind und $r'(u)$ bis auf die endlich vielen Ausnahmewerte, in welchen diese Ableitung nicht zu existieren braucht.

Integriert man jetzt zuerst bei festem u über die Breitenkugel, so erhält man

$$\overline{O}' = \int_{\alpha^*}^{\beta^*} G(u)^{n-2} (n-1) E_{n-1} r_E(u)^{n-2} \Big(\frac{2}{1 + \mathsf{K} r_E(u)^2}\Big)^{n-2} \sqrt{1 + G(u)^2 r'(u)^2}\, du. \tag{102}$$

Schreibt man hier ξ statt u und führt (93) ein, so ergibt sich

$$\overline{O}' = \int_{\alpha^*}^{\beta^*} G(\xi)^{n-2} O^*(r(\xi)) \sqrt{1 + G(\xi)^2 r'(\xi)^2}\, d\xi. \tag{103}$$

Nun ist gemäß (27)

$$O^*(r(\xi)) = \frac{dV^*(r(\xi))}{dr(\xi)} \tag{104}$$

und mithin wegen (88)

$$O^*(r(\xi)) = \frac{dJ(\xi)}{dr(\xi)}, \tag{105}$$

$$O^*(r(\xi))\, r'(\xi) = \frac{dJ(\xi)}{d\xi}. \tag{106}$$

Andererseits ist gemäß (25′) und (88)

$$O^*(r(\xi)) = O^*[V^*(r(\xi))] = O^*[J(\xi)]. \tag{107}$$

Die Einführung der beiden letzten Gleichungen in (103) ergibt

$$\overline{O}' = \int_{\alpha^*}^{\beta^*} G(\xi)^{n-2} \sqrt{O^*[J(\xi)]^2 + G(\xi)^2 \Big(\frac{dJ(\xi)}{d\xi}\Big)^2}\, d\xi. \tag{108}$$

Bezeichnet endlich $\overline{V}'$ das Volumen von K' in der Maßbestimmung (1), so hat man

$$\overline{V}' = \int_{K'} G(u)^{n-1} H(v_1 \dots v_{n-1})^{n-1} \, du \, dv_1 \dots dv_{n-1}. \tag{109}$$

Integriert man zuerst bei festem u über die Breitenkugel, so erhält man, da das Volumenelement des (v)-Raumes in der Maßbestimmung (24) durch

$$H(v_1 \dots v_{n-1})^{n-1} \, dv_1 \dots dv_{n-1} \tag{110}$$

gegeben wird,

$$\overline{V}' = \int_{\alpha^*}^{\beta^*} G(u)^{n-1} V^*(r(u)) \, du. \tag{111}$$

Führt man hier (88) ein und schreibt ξ statt u, so ergibt sich

$$\overline{V}' = \int_{\alpha^*}^{\beta^*} G(\xi)^{n-1} J(\xi) \, d\xi. \tag{112}$$

Die Zusammenstellung der Gleichung (112) mit der Gleichung (22) und der Gleichung (108) mit der Ungleichung (45′) und der am Schluß des Abschnitts 4) festgestellten notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in dieser Ungleichung ergibt, daß in der Maßbestimmung (1) der konstruierte Körper K' im Vergleich mit dem gegebenen Körper K bei gleichem Volumen eine, wenn die beiden Körper nicht kongruent sind, kleinere Oberfläche aufweist.

6) Wir können diese Feststellungen zu dem folgenden Hauptsatz zusammenfassen:

Das erste Abrundungstheorem.

Es sei $n \geqq 3$. Man setze voraus, daß in dem durch die Maßbestimmung (24) *definierten $(n-1)$-dimensionalen Euklidischen, hyperbolischen oder sphärischen Raum die Kugel eine kleinere Oberfläche besitzt als jeder andere Körper gleichen Volumens.*

Es sei im Modellraum mit den rechtwinkligen Koordinaten $u, v_1 \dots v_{n-1}$ K ein regulärer Körper, auf dessen Randmannigfaltigkeiten nicht unendlich viele Punkte vorhanden sind, in welchen eine Berührung mit einer Ebene $u =$ konst im Sinne von § 4 *Abschnitt* 1) *stattfindet.*

Es sei K' derjenige Euklidische Rotationskörper um die u-Achse, dessen Schnitte mit jeder Ebene $u =$ konst Vollkugeln sind, welche in der Maßbestimmung (1), (23) *das gleiche $(n-1)$-dimensionale Volumen besitzen wie der Querschnitt mit K.*

Dann besitzt der Körper K', welcher auch in der Maßbestimmung (1), (23) *einen Rotationskörper um die u-Achse darstellt, bei dieser Maßbestimmung im Vergleich mit K bei gleichem Volumen eine, wenn die beiden Körper nicht kongruent sind, kleinere Oberfläche.*

Zusatz zum ersten Abrundungstheorem. Wie aus dem Beweise unmittelbar hervorgeht, gestattet das Abrundungstheorem die folgende Verallgemeinerung:

Es bestehen für jedes Paar positiver stetiger Funktionen $\sigma(u)$, $\tau(u)$ die Relationen

$$(113)\qquad \int_K \tau(u)\,(G(u)H(v_1\dots v_{n-1}))^{n-1}\,du\,dv_1\dots dv_{n-1} = \int_{K'} \tau(u)\,(G(u)H(v_1\dots v_{n-1}))^{n-1}\,du\,dv_1\dots dv_{n-1}.$$

$$(114)\qquad \int_R \sigma(u)\,\overline{ds}_{n-1} \geqq \int_{R'} \sigma(u)\,\overline{ds}_{n-1}.$$

Dabei ist der Rotationskörper K' durch die oben gegebene Vorschrift bestimmt und also von der Wahl der Funktionen $\sigma(u)$ und $\tau(u)$ unabhängig, R und R' bezeichnen die Berandungen von K und K', und das Gleichheitszeichen gilt in der zweiten Relation nur dann, wenn die beiden Körper in der Maßbestimmung (1), (23) kongruent sind.

7) Zum Schluß wollen wir noch über die Länge der Meridiankurve unseres Rotationskörpers K' Klarheit gewinnen.

Zunächst folgt aus (11) und (18)

$$\int_{\alpha^*}^{\beta^*} G(\xi)^{n-1}\left|\frac{dJ(\xi)}{d\xi}\right| d\xi \leqq \bar{O}$$

und mithin

$$(115)\qquad \int_{\alpha^*}^{\beta^*} \left|\frac{dJ(\xi)}{d\xi}\right| d\xi \leqq \frac{1}{\mu^{n-1}}\,\bar{O},$$

wobei μ das wegen (5) positive Minimum von $G(\xi)$ für $\alpha^* \leqq \xi \leqq \beta^*$ bedeutet.

Für das Euklidische Bogenelement der Meridiankurve erhält man gemäß (94) und (90)

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dr_E(u)}{du}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1+\mathsf{K}r_E(u)^2}{2}\right)^2 \left(\frac{dr(u)}{du}\right)^2$$

und bei Einführung von (106), (107)

$$(116)\qquad \left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1+\mathsf{K}r_E(u)}{2}\right)^2 \frac{1}{O^*[J(u)]^2}\left(\frac{dJ(u)}{du}\right)^2,$$

$$(117)\qquad \left(\frac{ds}{du}\right) \leqq 1 + \left(\frac{1+\mathsf{K}r_E(u)^2}{2}\right) \frac{1}{O^*[J(u)]}\left|\frac{dJ(u)}{du}\right|.$$

Nun sind, wie im Abschnitt 5) mehrfach hervorgehoben, die Funktionen $J(u)$ und mithin auch $r(u)$, $r_E(u)$, $O^*[J(u)]$ im Intervall $\alpha^* \leqq u \leqq \beta^*$ stetig, bis auf endlich viele Punkte stetig differenzierbar und verschwinden nur an den Stellen α^* und β^*. Daher gewährleistet die Ungleichung (117) in Ver-

bindung mit (115) die Endlichkeit der Euklidischen Länge der Meridiankurve auf jedem Bogen, der von keinem ihrer beiden Endpunkte begrenzt wird, welche durch ihre beiden auf den Ebenen $u = \alpha^*$ und $u = \beta^*$ liegenden Schnittpunkte mit der Rotationsachse gegeben sind. Dagegen muß zugelassen werden, daß die Länge bis zu einem oder beiden Endpunkten unendlich wird. Da ferner das Verhältnis des Euklidischen Linienelements und des Linienelements in der Maßbestimmung (1) in jeder beschränkten abgeschlossenen Punktmenge des Modellraumes wegen (23′) zwischen zwei positiven endlichen Größen bleibt, so gelten dieselben Feststellungen auch für die Bogenlänge der Meridiankurve in der Maßbestimmung (1).

§ 6.

Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im Euklidischen und hyperbolischen Raum.

1) *Unter der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel soll in der Folge stets die Eigenschaft der Kugel verstanden werden, eine kleinere Oberfläche zu besitzen als jeder andere reguläre Körper gleichen Volumens.*

Es bezeichne wie § 5 (25″) im Euklidischen, hyperbolischen und sphärischen Raum das Symbol

$$O^*[V] \tag{1}$$

die Oberfläche einer Kugel als Funktion ihres Volumens, wobei die Funktion natürlich noch von der Dimensionszahl und dem Krümmungsmaß abhängt. Dann läßt sich die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel auch in Gestalt der Ungleichung

$$O \geqq O^*[V] \tag{2}$$

schreiben, wobei O und V Oberfläche und Volumen eines regulären Körpers bedeuten, und die Gleichheit nur von der Kugel erreicht wird.

Nun ist im Euklidischen und hyperbolischen Raum die Funktion (1) für alle nicht negativen Werte von V stetig definiert und wächst mit V eigentlich monoton von Null über alle Grenzen. In der sphärischen Geometrie dagegen ist die Funktion, wenn wir etwa den auf der $(n+1)$-dimensionalen Euklidischen Einheitskugel ausgebreiteten n-dimensionalen sphärischen Raum zugrunde legen, nur für

$$0 \leqq V \leqq (n+1)E_{n+1} \tag{3}$$

definiert, wächst für

$$0 \leqq V \leqq \tfrac{n+1}{2} E_{n+1} \tag{4}$$

mit V stetig und eigentlich monoton von 0 bis nE_n und nimmt für

$$\frac{n+1}{2} E_{n+1} \leqq V \leqq (n+1) E_{n+1} \tag{5}$$

mit wachsendem V stetig und eigentlich monoton von nE_n bis 0 ab. Dabei bedeutet wie schon früheren Ortes E_m das Volumen der m-dimensionalen Euklidischen Einheitskugel.

In der Euklidischen und hyperbolischen Geometrie läßt daher die Gleichung

$$O^*[V] = \Omega \tag{6}$$

die eindeutige Umkehrung

$$V = V^*\{\Omega\} \tag{7}$$

zu, wobei die Umkehrungsfunktion ebenfalls für alle nicht negativen Werte von Ω stetig definiert ist, mit Ω eigentlich monoton über alle Grenzen wächst und das Volumen einer Kugel als Funktion ihrer Oberfläche ausdrückt. Aus der isoperimetrischen Ungleichung (2) folgt daher

$$V^*\{O\} \geqq V^*\{O^*[V]\} = V \tag{8}$$

— und umgekehrt. Die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel läßt sich mithin auch dahin definieren, daß die Kugel größeres Volumen besitzt als jeder andere Körper gleicher Oberfläche.

Im sphärischen Raum ist diese Umkehrung der isoperimetrischen Aussage offenbar nicht zulässig. Sie gilt nur dann, wenn lediglich solche Körper und Kugeln in Betracht gezogen werden, deren Volumen die Schranke $\frac{n+1}{2} E_{n+1}$, d. h. die Hälfte des Gesamtraumes nicht überschreitet. Bei dieser Einschränkung ist nämlich die Umkehrungsfunktion (7) eindeutig und wächst für

$$0 \leqq \Omega \leqq nE_n$$

eigentlich monoton mit Ω von 0 bis $\frac{n+1}{2} E_{n+1}$. Es folgt daher unter dieser Einschränkung aus (2) (8) und aus (8) (2).

Ferner läßt im Euklidischen und hyperbolischen Raum die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel noch die folgenden beiden Formulierungen zu:

Erstens: Zu jedem von einer Kugel verschiedenen regulären Körper gibt es eine Kugel von kleinerer Oberfläche und nicht kleinerem Volumen.

Denn es besitzt dann wegen der Monotonie der Funktion (1) die Kugel gleichen Volumens a fortiori kleinere Oberfläche.

Zweitens: Zu jedem von einer Kugel verschiedenen regulären Körper gibt es eine Kugel von nicht größerer Oberfläche und größerem Volumen.

Denn es besitzt wegen der Monotonie der Funktion (7) die Kugel gleicher Oberfläche a fortiori größeres Volumen.

In der sphärischen, etwa auf der Oberfläche der $(n+1)$-dimensionalen Euklidischen Einheitskugel veranschaulichten Geometrie dagegen besitzt die Kugel vom Radius π die Oberfläche Null und das Volumen des Gesamtraumes, und es sind daher die Aussagen der beiden letzten Formulierungen trivial und für die Einsicht in die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel belanglos. Die beiden Formulierungen bleiben wiederum nur insoweit ein äquivalenter Ausdruck für die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel, als man nur solche Körper in Betracht zieht, deren Volumen die Hälfte des Gesamtraumes nicht überschreitet. Diese Bedingung, an welche die Schlüsse a fortiori, die durch die letzten beiden Formulierungen an die Hand gegeben werden, geknüpft sind, kompliziert die isoperimetrischen Betrachtungen in der sphärischen Geometrie, in welcher die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel daher erst im § 8 zum Beweis gelangen wird.

2) Man verstehe in der Euklidischen, hyperbolischen und sphärischen Geometrie unter einer „*einfachen*" *Rotationsfläche* eine solche, deren Meridiankurve aus einem einfachen Jordanbogen besteht, welcher die Rotationsachse nur in seinen beiden Endpunkten trifft. Dementsprechend bezeichne man als einen „*einfachen*" *Rotationskörper* einen solchen, dessen Oberfläche von einer einfachen Rotationsfläche gebildet wird.

Unter der Voraussetzung, daß die Koordinaten des laufenden Punktes der Meridiankurve sich als stetige und bis auf endlich viele Punkte stetig differenzierbare Funktionen der Bogenlänge darstellen lassen, habe ich an früherer Stelle[11]) die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel im Vergleich mit einfachen Rotationskörpern im n-dimensionalen Euklidischen hyperbolischen und sphärischen Raum bewiesen.

Dabei habe ich in der Euklidischen und hyperbolischen Geometrie die Fassung gewählt:

Die Kugel besitzt größeres Volumen als jeder andere einfache Rotationskörper gleicher Oberfläche.

Das ist die der Ungleichung (8) entsprechende Fassung, welche, wie oben festgestellt, in der Euklidischen und hyperbolischen Geometrie mit der ersten der Ungleichung (2) entsprechenden Formulierung gleichbedeutend ist.

---

[11]) l. c.[1] § 3 I, II; l. c.[3] § 3; l. c.[3] § 4. In dem unter l. c.[1] § 3 I, II zitierten Beweise findet sich noch die Voraussetzung, daß die Gesamtlänge der Meridiankurve endlich ist. Jedoch bleibt der Beweis unverändert bestehen, wenn die Voraussetzung dahin erweitert wird, daß zwar jeder Teilbogen, der nicht von einem der beiden Endpunkte der Meridiankurve begrenzt wird, endliche Länge besitzt, während die Länge bis zu einem oder beiden Endpunkten unendlich werden kann. Einfache Beweise für die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel im Vergleich mit Rotationskörpern gab auch A. DINGHAS, „Zum isoperimetrischen Problem in Räumen konstanter Krümmung", Math. Zeitschr. 47 (1942), S. 677—737.

In der sphärischen Geometrie, in welcher jede einfache Rotationsfläche die Oberfläche zweier einfacher Rotationskörper bildet, die sich zum Gesamtraum ergänzen, habe ich zitierten Ortes die folgende Fassung gewählt:

Die nicht größere der beiden Vollkugeln, in welche der Gesamtraum durch eine Kugelfläche zerlegt wird, besitzt größeres Volumen als der nicht größere der beiden Rotationskörper, in welche der Gesamtraum durch jede andere oberflächengleiche einfache Rotationsfläche zerlegt wird.

Das ist wiederum die der Ungleichung (8) entsprechende Fassung, aber unter der, wie oben besprochen, bei dieser Fassung notwendigen Einschränkung auf Körper, deren Volumen die Hälfte des Gesamtraumes nicht überschreitet. Unter dieser Einschränkung ist, wie oben festgestellt, die gewählte Fassung ebenfalls mit der ersten, der Ungleichung (2) entsprechenden Formulierung gleichbedeutend. In dieser letzteren Formulierung folgt aber aus der Gültigkeit der Aussage für Volumina, welche die Hälfte des Gesamtraumes nicht übersteigen, ihre Geltung auch ohne diese Einschränkung. Denn liegen eine Vollkugel und ein einfacher Rotationskörper gleichen Volumens vor, welches die Hälfte des Gesamtraumes überschreitet, so besitzen die von denselben Flächen begrenzten Komplementärkörper ebenfalls gleiches Volumen. Dieses ist aber jetzt kleiner als die Hälfte des Gesamtraumes, und daher ist, wenn sie nicht kongruent sind, die Oberfläche der Vollkugel kleiner.

Damit ist gezeigt, daß in der Euklidischen, hyperbolischen und sphärischen Geometrie von beliebig viel Dimensionen die Kugel eine kleinere Oberfläche besitzt als jeder andere einfache Rotationskörper gleichen Volumens, dessen Meridiankurve eine bis auf endlich viele Punkte stetig differenzierbare Darstellung der Koordinaten als Funktionen der Bogenlänge erlaubt.

Diese Voraussetzung involviert also insbesondere nicht die Endlichkeit der Gesamtlänge der Meridiankurve. Denn für die Darstellbarkeit ihrer Koordinaten als Funktionen der Bogenlänge genügt es, wenn jeder Teilbogen, der nicht von einem der beiden Endpunkte der Meridiankurve begrenzt wird, endliche Länge besitzt, während die Länge bis zu einem oder beiden Endpunkten unendlich werden kann.

3) *Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im Euklidischen Raum.*

Es sei $n \geqq 3$. Wir setzen im $(n-1)$-dimensionalen Euklidischen Raum die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der am Eingang dieses Paragraphen formulierten Fassung, *welche fortan durchweg festgehalten werden soll*, als bewiesen voraus.

Es sei im n-dimensionalen Euklidischen Raum der reguläre Körper K gegeben.

Man wähle das rechtwinklige Koordinatensystem $u, v_1 \ldots v_n$ dergestalt, daß die Richtung der u-Achse in bezug auf den Körper nicht eigentlich singulär

ist. Das ist stets möglich, da die Richtungspunkte der singulären Richtungen auf der Einheitskugel, wie am Eingang von § 4 Abschnitt 9) ausgeführt, den äußeren Inhalt Null besitzen. Da

$$ds^2 = du^2 + \sum_1^{n-1} {}_\nu\, dv_\nu^2$$

wird, so ist in den Gleichungen § 5 (1), (2), (3), (23)

$$K = 0, \quad H = 2, \quad G = \tfrac{1}{2}$$

zu setzen. Laut dem ersten Abrundungstheorem läßt sich nun zu K ein Rotationskörper K' konstruieren, der, wenn die beiden Körper nicht kongruent sind, bei gleichem Volumen eine kleinere Oberfläche aufweist. Dabei wird die Rotationsachse von der u-Achse gebildet, und die Entfernung des laufenden Punktes der Meridiankurve von ihr ist eine für $\alpha^* \leqq u \leqq \beta^*$ definierte stetige, bis auf endliche viele Punkte stetig differenzierbare Funktion von u, welche nur an den beiden Endpunkten α^* und β^* verschwindet. Da endlich gemäß § 5 Abschnitt 7) auf der Meridiankurve jeder nicht von einem ihrer beiden Endpunkte begrenzte Bogen endliche Länge besitzt, so ist K' ein einfacher Rotationskörper, der den Voraussetzungen des Satzes genügt, welcher am Schlusse des vorigen Abschnitts über die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel im Vergleich mit einfachen Rotationskörpern formuliert worden ist. Diesem Satz zufolge besitzt der Rotationskörper K', wenn er keine Kugel ist, eine größere Oberfläche als die ihm volumengleiche Kugel. Faßt man die Ergebnisse des Vergleichs zwischen dem gegebenen regulären Körper K und dem konstruierten volumengleichen einfachen Rotationskörper K' und zwischen letzterem und der ihm volumengleichen Kugel zusammen, so folgt, daß ein regulärer Körper, wenn er keine Kugel ist, eine größere Oberfläche besitzt, als die volumengleiche Kugel. Damit ist die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der Euklidischen Geometrie für n Dimensionen bewiesen unter der Voraussetzung, daß sie für $n - 1$ Dimensionen gilt. Da sie endlich für zwei Dimensionen gilt, d. h. dem Kreise zukommt, *so ist auf Grund des Induktionsschlusses der Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im Euklidischen Raum für jede Dimensionenzahl erbracht.*

4) *Erster Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im hyperbolischen Raum.*

Es sei dem Innern der Einheitskugel

$$\sum_1^n {}_\nu\, y_\nu^2 < 1 \tag{9}$$

die Maßbestimmung

$$ds^2 = \left(\frac{2}{1 - \sum_1^n {}_\nu\, y_\nu^2}\right) \sum_1^n {}_\nu\, dy_\nu^2 \tag{10}$$

aufgeprägt. Dadurch wird ein hyperbolischer Raum mit dem Krümmungsmaß -1 definiert. Es sei K in diesem ein gegebener regulärer Körper.

Nun läßt sich, wie § 4 Abschnitt 1) ausgeführt, jede der endlich vielen regulären Randmannigfaltigkeiten aller Dimensionenzahlen von K durch endlich viele beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeiten überdecken. Aus dem Satze VII'' § 2 Abschnitt 6) in seiner Verallgemeinerung durch den Satz IX § 2 Abschnitt 8) folgt daher, daß die Gesamtheit der absoluten Punkte derjenigen äquidistanten Orizykelflächenscharen, von welchen die Randmannigfaltigkeiten von K in unendlich vielen Punkten berührt werden, auf der Oberfläche der Euklidischen Einheitskugel (9) den äußeren Inhalt Null besitzt. Man kann daher die Orizykelflächenschar so wählen, daß die Gesamtheit aller Randmannigfaltigkeiten aller Dimensionenzahlen von K von ihr nur in endlich vielen Punkten berührt wird. Führt man jetzt wie § 3 Abschnitt 4) das dieser Schar entsprechende Koordinatensystem ein, so erhält man gemäß § 3 (35), indem man statt x_1 u und statt $x_2 \dots x_n$ $v_1 \dots v_{n-1}$ schreibt,

$$ds^2 = du^2 + e^{-2u} \sum_1^{n-1}{}_\nu \, dv_\nu^2, \tag{11}$$

wobei sichergestellt ist, daß auf den Randmannigfaltigkeiten von K nicht unendlich viele Punkte vorhanden sind, in welchen eine Berührung mit einer der die Orizykelflächen darstellenden Ebenen $u = \text{konst}$ stattfindet. Setzt man in den Gleichungen § 5 (1), (2), (3), (23) $\mathsf{K} = 0$, $H = 2$, $G = \frac{1}{2} e^{-u}$, so nimmt das Linienelement § 5 (1) die Gestalt unseres Linienelementes (11) an. Da ferner für $\mathsf{K} = 0$, also im Euklidischen Fall, die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel für alle Dimensionenzahlen im vorigen Abschnitt bewiesen worden ist, so ist die vom Abrundungstheorem als Voraussetzung geforderte Gültigkeit der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im $(n-1)$-dimensionalen (v)-Raum gewährleistet. Damit sind alle Voraussetzungen des ersten Abrundungstheorems sichergestellt. Laut diesem läßt sich in der Maßbestimmung (11) zu K ein einfacher Rotationskörper K' konstruieren, welcher, wenn die beiden Körper nicht kongruent sind, bei gleichem Volumen eine kleinere Oberfläche aufweist, und über dessen Meridiankurve alle die Feststellungen sich wiederholen lassen, welche im vorigen Abschnitt hinsichtlich der Meridiankurve des dort konstruierten Rotationskörpers gemacht worden sind.

Da nun kraft des am Schlusse des Abschnitts 2) formulierten Satzes in der Maßbestimmung (10), (11) des hyperbolischen Raumes ein solcher Rotationskörper K', wenn er keine Kugel ist, eine größere Oberfläche besitzt als die volumengleiche Kugel, so gilt dasselbe a fortiori für den gegebenen regulären Körper K. *Damit ist die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel im*

hyperbolischen Raum von n Dimensionen für $n \geqq 3$ vollständig bewiesen. Für $n = 2$ ist sie an früherer Stelle[12]) von mir bewiesen worden.

5) *Zweiter Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im hyperbolischen Raum.*

Der im vorigen Abschnitt auseinandergesetzte Beweis macht den Induktionsschluß entbehrlich, indem er die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel im Euklidischen Raum heranzieht. Wir wollen jetzt einen Beweis geben, der ohne Anleihe bei der Euklidischen Geometrie sich auf den Induktionsschluß stützt.

Durch dieselbe Schlußweise wie im vorigen Abschnitt folgt aus dem Satz V § 2 Abschnitt 5) in seiner Verallgemeinerung durch den Satz IX § 2 Abschnitt 8):

Im $(n+1)$-dimensionalen Euklidischen Raum der hyperbolischen Ebenenkoordinaten besitzt die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche hyperbolischen Ebenen entsprechen, deren Abstandsflächenschar die Randmannigfaltigkeiten eines gegebenen regulären Körpers K in unendlich vielen Punkten berührt, den äußeren Inhalt Null. Man kann daher eine hyperbolische Ebene so wählen, daß auf den Randmannigfaltigkeiten von K nicht unendlich viele Punkte vorhanden sind, in welchen eine Berührung mit einer Abstandsfläche dieser Ebene stattfindet. Führt man jetzt gemäß § 3 Abschnitt 5) ein dieser Schar entsprechendes Koordinatensystem ein, so erhält man gemäß § 3 (51), wenn statt x_1 u und statt $x_2 \ldots x_n$ $v_1 \ldots v_{n-1}$ geschrieben wird,

$$(12) \qquad ds^2 = du^2 + \cosh^2 u \left(\frac{2}{1 - \sum_1^{n-1} v_\nu^2} \right)^2 \sum_1^{n-1} dv_\nu^2,$$

wobei sichergestellt ist, daß auf den Randmannigfaltigkeiten von K nicht unendlich viele Punkte vorhanden sind, in welchen eine Berührung mit einer der die Abstandsflächen darstellenden Ebenen $u = \text{konst}$ stattfindet. Setzt man in den Gleichungen § 5 (1), (2), (3), (23)

$$K = -1, \quad H = \frac{2}{1 - \sum_1^{n-1} v_\nu^2}, \quad G = \cosh u,$$

so nimmt das Linienelement § 5 (1) die Gestalt unseres Linienelements (12) an.

Es sei nun $n \geqq 3$. Man mache die Voraussetzung, daß die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel im $(n-1)$-dimensionalen hyperbolischen Raum bewiesen sei. Dann sind für unser Linienelement (12) alle Voraussetzungen des ersten Abrundungstheorems sichergestellt. Laut diesem läßt sich in der Maßbestimmung (12) zu K ein einfacher Rotationskörper K' bestimmen, welcher,

[12]) l. c.[2] S. 204–218.

wenn die beiden Körper nicht kongruent sind, bei gleichem Volumen eine kleinere Oberfläche aufweist, und über dessen Meridiankurve alle die Feststellungen sich wiederholen lassen, die im Abschnitt 3) hinsichtlich der Meridiankurve des dort konstruierten Rotationskörpers gemacht worden sind.

Hieraus ergibt sich jetzt genau so wie im Abschnitt 4), daß der gegebene reguläre Körper K, wenn er keine Kugel ist, eine größere Oberfläche besitzt als die volumengleiche Kugel. Damit ist in der hyperbolischen Geometrie die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel für n Dimensionen bewiesen unter der Voraussetzung, daß sie für $n-1$ Dimensionen gilt. Da sie endlich, wie an früherer Stelle[12]) von mir bewiesen, für zwei Dimensionen gilt, d. h. dem Kreise zukommt, *so ist auf Grund des Induktionsschlusses der Beweis für die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel im hyperbolischen Raum für jede Dimensionenzahl erbracht.*

§ 7.

Das zweite Abrundungstheorem.

1) Es sei M_k eine reguläre k-dimensionale Mannigfaltigkeit, $1 \leqq k \leqq n-1$, im Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1 \ldots x_n$. Wir sagen, die Mannigfaltigkeit werde in einem ihrer Punkte von einer Kugel

$$\sum_1^n{}_\nu (x_\nu - c_\nu)^2 = r^2$$

berührt, wenn deren $(n-1)$-dimensionale Tangentialebene die k-dimensionale Tangentialebene von M_k enthält, oder wenn der Berührungspunkt einer k'-dimensionalen Randmannigfaltigkeit, $1 \leqq k' < k$, angehört, deren k'-dimensionale Tangentialebene in die $(n-1)$-dimensionale Tangentialebene der Kugel fällt, oder endlich, wenn der Punkt einer nulldimensionalen Randmannigfaltigkeit angehört, d. h. ein Eckpunkt ist.

Es werde nun M_k von einer Kugel

$$\sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 = u^2 \tag{1}$$

dergestalt geschnitten, daß eine Berührung nirgends stattfindet.

Dann besteht, wie wir alsbald beweisen wollen, der Schnitt aus endlich vielen regulären $(k-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Wenn zwei derselben Punkte gemein haben, so müssen diese für beide Mannigfaltigkeiten Randpunkte sein — und zwar Randpunkte höherer Ordnung, d. h. solche Randpunkte, welche nicht im Innern einer $(k-2)$-dimensionalen Randmannigfaltigkeit liegen und mithin einer $(k-3)$-dimensionalen Randmannigfaltigkeit angehören. Ferner geht jeder innere Punkt von M_k in einen inneren

[12]) l. c.[3], S. 204—218.

Punkt einer der endlich vielen regulären $(k-1)$-dimensionalen Schnittmannigfaltigkeiten über, während jeder Randpunkt von M_k zu einem Randpunkt der gesamten Schnittmannigfaltigkeit im Sinne der Definition l. c.[1] § 5 III (b) wird.

Endlich wird die Mannigfaltigkeit M_k selbst durch die Kugel in endlich viele reguläre k-dimensionale Mannigfaltigkeiten zerlegt, von denen das Innere mindestens einer ganz im Äußeren der Vollkugel liegt und das Innere mindestens einer ganz im Innern.

Beweis. Man betrachte M_k als eine reguläre k-dimensionale auf der Ebene $x_0 = 0$ gelegene Mannigfaltigkeit im $(n+1)$-dimensionalen Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_0, x_1 \ldots x_n$. Man spiegele den Raum an der Kugel mit dem Mittelpunkt $x_0 = 1,\ x_1 = 0,\ \ldots x_n = 0$ und dem Radius $\sqrt{2}$. Dabei gehe der Punkt $x_0, x_1 \ldots x_n$ in den Punkt $x_0', x_1' \ldots x_n'$ über. Man erhält

$$(2)\qquad x_0' - 1 = \frac{2(x_0-1)}{(x_0-1)^2 + \sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2}, \qquad x_\nu' = \frac{2x_\nu}{(x_0-1)^2 + \sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2}, \qquad \nu = 1, \ldots n.$$

$$(3)\qquad dx_0'^2 + \sum_1^n{}_\nu\, dx_\nu'^2 = \left(\frac{2}{(x_0-1)^2 + \sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2}\right)^2 \left(dx_0^2 + \sum_1^n{}_\nu\, dx_\nu^2\right).$$

Die Ebene $x_0 = 0$ wird dabei stereographisch auf die Einheitskugel mit dem Mittelpunkt im Koordinatenanfangspunkt projiziert, und die Formeln (2), (3) gewinnen die Gestalt

$$x_0 = 0,$$

$$(4)\qquad x_0' = \frac{\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 - 1}{\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 + 1}, \qquad x_\nu' = \frac{2x_\nu}{\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 + 1},$$

$$(5)\qquad dx_0'^2 + \sum_1^n{}_\nu\, dx_\nu'^2 = \left(\frac{2}{\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 + 1}\right)^2 \sum_1^n{}_\nu\, dx_\nu^2,$$

$$\sum_1^n{}_\nu\, dx_\nu^2 = \left(\frac{1}{1-x_9'}\right)^2 \left(dx_0'^2 + \sum_1^n{}_\nu\, dx_\nu'^2\right).$$

Da die Transformation, abgesehen vom Transformationszentrum, eindeutig, eindeutig umkehrbar und zweimal stetig differenzierbar ist, so entspricht, wie § 4 Abschnitt 1) festgestellt, jeder regulären k-dimensionalen Mannigfaltigkeit auf der Ebene $x_0 = 0$ eine nicht durch das Transformationszentrum gehende reguläre k-dimensionale Mannigfaltigkeit, welche auf der Einheitskugel ausgebreitet ist — und umgekehrt. Das mithin reguläre k-dimensionale

auf der Einheitskugel gelegene Spiegelbild von M_k werde mit M_k' bezeichnet. Einer auf der n-dimensionalen Ebene $x_0 = 0$ gelegenen Kugel

$$\sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 = u^2 \tag{6}$$

entspricht jetzt gemäß (4) der Schnitt der Einheitskugel mit der Ebene

$$x_0' = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}. \tag{7}$$

Dabei geht eine im obigen Sinn erklärte Berührung von M_k mit der Kugel (6) in eine im gleichen Sinn erklärte Berührung, d. h. also eine gemäß § 4 Abschnitt 1) definierte Berührung von M_k' mit der Ebene (7) über — und umgekehrt. Machen wir also die Voraussetzung, daß M_k die Kugel nicht berührt, so findet zwischen M_k' und der Ebene (7) ebenfalls keine Berührung statt. Es gelten daher für M_k' die Sätze l. c.[1] § 6 III (13) und (14), aus deren Übertragung auf M_k die zu beweisenden Behauptungen sich ablesen lassen.

2) Wir machen jetzt die Voraussetzung, daß es auf M_k nicht unendlich viele Punkte gibt, in welchen M_k von einer Kugel der konzentrischen Kugelschar (6) berührt wird. Man bezeichne denjenigen Teil von M_k, für welchen

$$\sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 \leqq \xi^2, \quad \xi \geqq 0$$

ist, mit dem Symbol

$$M_k\left(\sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 \leqq \xi^2\right).$$

Dann ist, wie wir alsbald beweisen wollen, das Integral

$$\int\limits_{M_k\left(\sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 \leqq \xi^2\right)} \varphi \, ds_k, \tag{8}$$

wobei φ eine auf M_k stetige Funktion bedeutet und ds_k das k-dimensionale Flächenelement, für alle Werte von ξ bestimmt, als Funktion von ξ stetig und, abgesehen von den endlich vielen sogenannten Ausnahmewerten, für welche M_k von der Kugel

$$\sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 = \xi^2$$

berührt wird, auch stetig differenzierbar. Man hat daher für alle Werte von ξ

$$\int\limits_{M_k\left(\sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 \leqq \xi^2\right)} \varphi \, ds_k = \int_0^\xi \frac{d}{du}\left(\int\limits_{M_k\left(\sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 \leqq u^2\right)} \varphi \, ds_k\right) du, \tag{9}$$

wobei auf der rechten Seite der Integrand unter dem äußeren Integral bis auf die höchstens endlich vielen Ausnahmewerte definiert und als Funktion von u stetig ist.

Beweis. Es habe M_k' dieselbe Bedeutung wie bei dem im vorigen Abschnitt durchgeführten Beweise. Dann folgt aus den dort gemachten Feststellungen, daß M_k' nicht in unendlich vielen Punkten von der Ebenenschar (7) berührt wird. Aus den Sätzen XI, XII § 4 in ihrer Spezialisierung auf die Euklidische Maßbestimmung folgt daher zunächst:

Das Integral

$$\int\limits_{M_k'(x_0' \leqq \eta)} \psi \, ds_k', \tag{10}$$

wobei ψ eine auf M_k' stetige Funktion bedeutet und ds_k' das k-dimensionale Euklidische Flächenelement, ist für alle Werte von η bestimmt, als Funktion von η stetig und bis auf die endlich vielen Ausnahmewerte, für welche M_k' von der Ebene $x_0' = \eta$ berührt wird, auch stetig differenzierbar.

Nun ist gemäß (4)

$$x_0' = \frac{\sum_1^n x_\nu^2 - 1}{\sum_1^n x_\nu^2 + 1} = 1 - \frac{2}{1 + \sum_1^n x_\nu^2}$$

Wegen

$$\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1} = 1 - \frac{2}{1 + \xi^2}$$

sind mithin die Ungleichungen

$$\sum_1^n x_\nu^2 \leqq \xi^2 \quad \text{und} \quad x_0' \leqq \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1}$$

miteinander gleichbedeutend. Man hat daher wegen (5)

$$\int\limits_{M_k\left(\sum_1^n x_\nu^2 \leqq \xi^2\right)} \varphi \, ds_k = \int\limits_{M_k'\left(x_0' \leqq \frac{\xi^2-1}{\xi^2+1}\right)} \frac{\varphi}{(1 - x_0')^k} \, ds_k' = \int\limits_{M_k'(x_0' \leqq \eta)} \psi \, ds_k', \tag{11}$$

wobei

$$\eta = \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1}, \quad \psi = \frac{\varphi}{(1 - x_0')^k}$$

gesetzt ist, und ds_k und ds_k' die einander entsprechenden Flächenelemente bedeuten. Also gilt, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten von ξ

$$\frac{d}{d\xi} \int\limits_{M_k\left(\sum_1^n x_\nu^2 \leqq \xi^2\right)} \varphi \, ds_k = \frac{4\xi}{(\xi^2 + 1)^2} \frac{d}{d\eta} \int\limits_{M_k'(x_0' \leqq \eta)} \psi \, ds_k'. \tag{12}$$

Die über das Integral (10) gemachten Feststellungen in Verbindung mit (11) und (12) ergeben die zu beweisenden, das Integral (8) betreffenden Behauptungen.

3) Da bei der gewählten Transformation (2), (3), (4), (5) ein im Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1 \ldots x_n$ gelegener regulärer Körper in eine auf der Einheitskugel ausgebreitete, das Transformationszentrum nicht enthaltende reguläre n-dimensionale Mannigfaltigkeit übergeht, so erhält man durch dieselbe Übertragung wie oben unter 1) aus dem Satz l. c.[1] § 6 III (13) das folgende Ergebnis:

Es werde im Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1 \ldots x_n$ der reguläre Körper K von einer Kugel dergestalt geschnitten, daß sie nirgends eine der Randmannigfaltigkeiten im oben erklärten Sinn berührt. Dann besteht der Schnitt aus endlich vielen regulären $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Wenn zwei derselben Punkte gemein haben, so müssen diese für beide Randpunkte sein — und zwar für beide Randpunkte höherer Ordnung, d. h. solche Randpunkte, welche nicht im Innern einer ihrer regulären $(n-2)$-dimensionalen Randmannigfaltigkeiten liegen und mithin einer $(n-3)$-dimensionalen Randmannigfaltigkeit angehören. Ferner geht jeder Randpunkt von K in einen Randpunkt des Schnittes im Sinne der Definition l. c.[1] § 5 III (b) über und jeder innere Punkt von K in einen inneren Punkt einer der endlich vielen regulären Mannigfaltigkeiten, aus welchen der Schnitt besteht.

Wir wollen jetzt zeigen, daß ein Randpunkt des Schnittes in der Definition l. c.[1] § 5 III b auch im gewöhnlichen Sinn ein Randpunkt der den Schnitt bildenden Punktmenge relativ zur Kugeloberfläche (6) sein muß. Gemäß der Definition l. c.[1] § 5 III b gilt ein Punkt dann als ein Randpunkt des Schnittes, wenn es kein $(n-1)$-dimensionales Grundgebilde gibt, das diesen Punkt nebst den Punkten des Schnittes in einer gewissen Umgebung im Innern enthält und ganz aus Punkten des Schnittes besteht. Wäre nun der betrachtete Randpunkt P des Schnittes kein Randpunkt im gewöhnlichen Sinn relativ zur Kugeloberfläche, so bestände eine gewisse Umgebung von P auf dieser ganz aus Punkten des Schnittes, und innerhalb einer solchen ließe sich ein P noch im Innern enthaltendes $(n-1)$-dimensionales Grundgebilde abgrenzen — im Widerspruch zur Voraussetzung. Wir sehen also, daß, wenn auf einer den Rand von K nicht berührenden Kugel (6) Randpunkte von K liegen, auf ihr auch Punkte liegen müssen, die nicht zu K gehören.

Ebenso folgt aus l. c.[1] § 6 III (14), daß der Körper K durch eine ihn schneidende, aber den Rand im obigen Sinne nirgends berührende Kugel (6) in endlich viele reguläre Körper zerlegt wird, so daß jedes der beiden offenen Raumgebiete, in welche der Gesamtraum durch die Kugel zerlegt wird, das Innere mindestens eines der Teilkörper enthält. Durch Wiederholung folgt hieraus, daß der reguläre Körper K durch zwei ihn schneidende, aber den

Rand nirgends berührende konzentrische Kugeln (6) in endlich viele reguläre Körper zerlegt wird, so daß jedes der drei offenen Gebiete, in welche der Gesamtraum durch die beiden Kugelflächen zerlegt wird, das Innere mindestens eines der Teilkörper enthält. Dabei bleibt jeder Randpunkt ein Randpunkt, und die inneren Punkte auf den beiden konzentrischen Kugeloberflächen werden ebenfalls Randpunkte. Abgesehen von diesen geht jeder innere Punkt in einen inneren Punkt eines der Teilkörper über. Wenn endlich zwei Teilkörper, welche beide in demselben der drei von den beiden Kugeloberflächen abgegrenzten Gebiete liegen, also etwa beide sich zwischen den beiden Kugeloberflächen befinden, Punkte gemein haben, so müssen diese für beide Randpunkte höherer Ordnung sein, d. h. einer $(n-2)$-dimensionalen Randmannigfaltigkeit angehören.

4) Wir machen jetzt wieder die Voraussetzung, daß es auf den Randmannigfaltigkeiten des regulären Körpers K nicht unendlich viele Punkte gibt, in welchen eine Berührung mit einer Kugel der konzentrischen Kugelschar (6) stattfindet. Man bezeichne mit R den Rand von K, mit R_{n-1}^{λ}, $\lambda = 1, 2, \ldots$ die endlich vielen regulären Randmannigfaltigkeiten, aus welchen R besteht, und mit φ eine stetige Funktion auf R. Gemäß den unter 2), (8) (9) gemachten Feststellungen ist dann das Integral

$$\int_{R_{n-1}^{\lambda}\left(\sum_1^n x_\nu^2 \leqq \xi^2\right)} \varphi \, ds_{n-1}$$

bestimmt, für alle Werte von ξ stetig und, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten, für welche die Mannigfaltigkeit von der Kugel

$$\sum_1^n x_\nu^2 = \xi^2$$

berührt wird, auch stetig differenzierbar. Nun ist

$$\int_{R\left(\sum_1^n x_\nu^2 \leqq \xi^2\right)} \varphi \, ds_{n-1} = \sum_\lambda \int_{R_{n-1}^{\lambda}\left(\sum_1^n x_\nu^2 \leqq \xi^2\right)} \varphi \, ds_{n-1},$$

wobei auf der rechten Seite über alle Randmannigfaltigkeiten zu summieren ist. Denn da wegen l. c.[1] § 6 III (f) zwei Randmannigfaltigkeiten nur Punkte gemein haben können, die für beide wiederum Randpunkte sind, d. h. also einer $(n-2)$-dimensionalen regulären Randmannigfaltigkeit angehören, so liefern die in der Summe auf der rechten Seite mehrfach in Anschlag kommenden Teile von R keinen endlichen Beitrag zu den Integralen. Daher ist auch das Integral

(13)
$$\int_{R\left(\sum_1^n x_\nu^2 \leqq \xi^2\right)} \varphi \, ds_{n-1}$$

für alle Werte von ξ bestimmt, als Funktion von ξ stetig, und abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten, für welche eine der Randmannigfaltigkeiten von K von der Kugel

$$\sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 = \xi^2$$

berührt wird, auch stetig differenzierbar. Man hat folglich

$$(14) \qquad \int_{R\left(\sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 \leqq \xi^2\right)} \varphi \, ds_{n-1} = \int_0^\xi \frac{d}{dt}\left(\int_{R\left(\sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 \leqq t^2\right)} \varphi \, ds_{n-1} \right) dt,$$

wobei auf der rechten Seite der Integrand unter dem äußeren Integral bis auf die höchstens endlich vielen Ausnahmewerte definiert und als Funktion von t stetig ist.

5) Wir bleiben bei der Voraussetzung, daß auf den Randmannigfaltigkeiten des regulären Körpers K nicht unendlich viele Punkte vorhanden sind, in welchen eine Berührung mit einer Kugel der konzentrischen Schar (6) stattfindet, und bezeichnen die endlich vielen Radien der berührenden Kugeln als die Ausnahmewerte von u.

Ferner setzen wir voraus, daß der Koordinatenanfangspunkt nicht auf dem Rande von K liegt.

Es bezeichne α^* den kleinsten und β^* den größten Abstand des regulären und mithin abgeschlossenen Körpers K vom Koordinatenanfangspunkt. Dann liegt der Koordinatenanfangspunkt, da er voraussetzungsgemäß nicht Randpunkt ist, für $\alpha^* = 0$ im Innern des Körpers, für $\alpha^* > 0$ im Äußern. Da ferner wegen der Definitionseigenschaft l. c.[1] §6 III (d) eines regulären Körpers jeder Randpunkt von K Häufungspunkt von inneren Punkten ist, so ist α^* auch die untere Grenze des Abstandes der inneren Punkte von K vom Koordinatenanfangspunkt und β^* die obere Grenze. Ist daher

$$\alpha^* < u < \beta^*,$$

so gibt es einen inneren Punkt P', dessen Entfernung vom Koordinatenanfangspunkt größer als u ist, und einen inneren Punkt P'', dessen Entfernung kleiner als u ist. Gemäß der Definitionseigenschaft l. c.[1] § 6 IV (e) lassen sich nun P' und P'' durch einen ganz im Innern von K verlaufenden Weg verbinden. Also muß es auf der Kugel

$$(15) \qquad \sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 = u^2$$

innere Punkte von K geben. Diese sind a fortiori auch relativ zur Kugeloberfläche innere Punkte des Schnittes, welchen diese mit dem Körper bildet, und welcher mit dem Symbol

$$K\left(\sum_1^n x_\nu^2 = u^2\right) \tag{16}$$

bezeichnet werden möge.

Liegt also u im offenen Intervall zwischen α^* und β^*, so sind nur die folgenden drei Fälle möglich:

I. Die Kugeloberfläche (6) besteht nur aus inneren Punkten von K.

II. Die Kugeloberfläche enthält innere und Randpunkte, aber keinen äußeren Punkt von K.

Da, wie im vorletzten Absatz des Abschnitts 3) festgestellt, auf eine die Randmannigfaltigkeiten von K nirgends berührenden Kugel, auf welche Randpunkte von K liegen, auch äußere Punkte von K vorhanden sein müssen so kann der Fall II nur eintreten, wenn die Kugel eine der Randmannigfaltigkeiten von K berührt, d. h. wenn u einen der endlich vielen Ausnahmewerte annimmt.

III. Die Kugeloberfläche enthält sowohl innere als äußere und mithin auch Randpunkte von K.

Für die Kugeloberfläche

$$\Sigma x_\nu^2 = \beta^{*2} \tag{17}$$

gilt auf Grund der Definition von β^* das folgende: Die Kugeloberfläche kann keinen inneren Punkt von K enthalten, und da sie Punkte von K enthalten muß, so liegen auf ihr Randpunkte von K. In jedem dieser Randpunkte muß sie eine Randmannigfaltigkeit berühren. Es sei nämlich P ein auf der Kugel gelegener Randpunkt von K, k die niedrigste Dimensionenzahl der ihn enthaltenden Randmannigfaltigkeiten, und R_k^ν eine solche. Ist dann $k = 0$, so ist P ein Eckpunkt, und in einem solchen berührt definitionsmäßig jede durch ihn gehende Kugel den Rand. Ist aber $k > 0$, so muß P ein innerer Punkt von $R_k^{(\nu)}$ sein, denn sonst müßte P einer der $(k-1)$-dimensionalen Randmannigfaltigkeiten von $R_k^{(\nu)}$ angehören — im Widerspruch zur Definition von k. Fände nun in P keine Berührung statt, so könnte dort die k-dimensionale Tangentialebene von $R_k^{(\nu)}$ nicht in die $(n-1)$-dimensionale Tangentialebene der Kugel fallen. Es gäbe also auf $R_k^{(\nu)}$ eine P im Innern enthaltende Kurve, welche die Tangentialebene der Kugel (17) nicht berührt. Auf dieser müßte es aber Punkte geben, deren Entfernung vom Koordinatenanfangspunkt β^* übersteigt — im Widerspruch zur Definition von β^*. Da voraussetzungsgemäß auf dem Rande von K nicht unendlich viele Punkte vorhanden sind, in welchen eine Berührung mit einer Kugel der Schar (6) stattfindet, so liegen auf der Kugel (17) nur endlich viele Randpunkte von K. Sie besteht

also, abgesehen von diesen, nur aus äußeren Punkten von K. Dasselbe gilt für $\alpha^* > 0$ auch von der Kugel

$$\sum_1^n x_\nu^2 = \alpha^{*2}, \quad \alpha^* > 0. \tag{18}$$

Für die Kugel mit dem Radius β^* und im Falle $\alpha^* > 0$ auch noch für die Kugel mit dem Radius α^* und nur für diese beiden Kugeln gilt also der Fall IV:

IV. Die Kugel enthält keine inneren und nur endlich viele, aber mindestens einen Randpunkt von K.

Auf der Halbgeraden $u > 0$ bilden diejenigen Punkte, für welche der Fall I eintritt, eine offene Punktmenge. Ebenso diejenigen Punkte, für welche der Fall III Platz greift. Es sei nun l die, wie oben festgestellt, endliche Anzahl derjenigen Punkte, welche zum Fall II gehören, wobei l natürlich auch verschwinden kann. Die Werte von u in diesen Punkten der Größe nach geordnet seien

$$\gamma_1 < \gamma_2 \ldots < \gamma_l. \tag{19}$$

Dann können die Randpunkte relativ zur Halbgeraden $u \geqq 0$ sowohl derjenigen Punktmenge, für welche der Fall I Platz greift, als auch derjenigen, welche zum Fall III gehören, nur von den Punkten

$$\gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 \ldots < \gamma_l < \gamma_{l+1}, \quad \gamma_0 = \alpha^*, \quad \gamma_{l+1} = \beta^*, \tag{20}$$

gestellt werden. Jede der beiden Punktmengen besteht also aus endlich vielen offenen Intervallen, deren jedes von zwei aufeinanderfolgenden Punkten der $l + 2$ Punkte (20) begrenzt wird. Dabei können für $1 \leqq \lambda \leqq l$ in keinem Punkte γ_λ zwei der offenen Intervalle aneinanderstoßen, in welchen der Fall I stattfindet. Dann müßte nämlich das gesamte von den beiden konzentrischen Kugeloberflächen

$$\sum_1^n x_\nu^2 = \gamma_{\lambda-1}^2, \quad \sum_1^n x_\nu^2 = \gamma_{\lambda+1}^2$$

begrenzte Gebiet des n-dimensionalen Raumes zu K gehören, und es könnten daher auf der Kugel

$$\sum_1^n x_\nu^2 = \gamma_\lambda^2$$

keine Randpunkte von K liegen — im Widerspruch zur Voraussetzung, daß für $u = \gamma_\lambda$ der Fall II eintritt. Für $1 \leqq \lambda \leqq l$ ist also jeder Punkt γ_λ Randpunkt von einem oder zwei der offenen Intervalle, welche zum Fall III gehören. Der Punkt γ_{l+1} ist wegen $\gamma_{l+1} = \beta^*$ Endpunkt eines zum Fall III gehörigen Intervalls. Ebenso ist der Punkt γ_0 wegen $\gamma_0 = \alpha^*$ für $\alpha^* > 0$ Anfangspunkt eines solchen, während er für $\alpha^* = 0$ Anfangspunkt eines zum Fall I gehörigen Intervalls ist.

Es sei nun m die Anzahl der offenen zum Fall III gehörigen Intervalle, und es mögen γ'_μ und γ''_μ, $\mu = 1 \ldots m$, ihre Anfangs- und Endpunkte sein. Dann hat man

$$\gamma'_\mu < \gamma''_\mu, \quad \mu = 1 \ldots m, \quad \gamma''_\mu \leqq \gamma'_{\mu+1}, \quad \mu = 1 \ldots m-1, \tag{21}$$

$$\gamma''_m = \beta^*, \quad \gamma'_1 = \alpha^* \text{ für } \alpha^* > 0, \quad \gamma'_1 > \alpha^* \text{ für } \alpha^* = 0. \tag{22}$$

Dabei gehören sämtliche Punkte, für welche der Fall II eintritt, zu den Anfangs- und Endpunkten dieser Intervalle, und es tritt in diesen Anfangs- und Endpunkten auch der Fall II ein mit Ausnahme des Punktes $\gamma''_m = \beta^*$ und für $\alpha^* > 0$ noch des Punktes $\gamma'_1 = \alpha^*$, in welchen der Fall IV Platz greift.

6) Unter den Voraussetzungen des vorigen Abschnitts projizieren wir vom Koordinatenanfangspunkt M aus den Schnitt

$$K\left(\sum_1^n {}_\nu x_\nu^2 = u^2\right) \tag{23}$$

auf die Einheitskugel

$$\sum_1^n {}_\nu x_\nu^2 = 1 \tag{24}$$

und bezeichnen den Flächeninhalt der Projektion mit $J(u)$. Dann ist, wie wir zunächst beweisen wollen, die Funktion $J(u)$ für alle Werte von u bestimmt und stetig und, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen, auch stetig differenzierbar.

Für $u > \beta^*$ ist $J(u)$ konstant gleich Null, ebenso im Falle $\alpha^* > 0$ für $u < \alpha^*$. Ist $\alpha^* = 0$, so läßt sich ein $\alpha' > 0$ so bestimmen, daß für $0 < u < \alpha'$ $J(u)$ konstant gleich der Gesamtoberfläche der Einheitskugel bleibt, so daß also

$$J(u) = nE_n \tag{25}$$

gilt, wobei wie schon früheren Ortes E_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel bedeutet. Ebenso gilt die letzte Gleichung in allen Punkten, für welche der Fall I eintritt, und welche, wie wiederholt werden darf, eine offene Punktmenge bilden. In allen den genannten Gebieten ist also $J(u)$ konstant und mithin, da sie offen sind, auch stetig. Definiert man $J(0)$ im Falle $\alpha^* = 0$ durch nE_n und im Falle $\alpha^* > 0$ durch 0, so bleibt die Funktion auch an der Stelle $u = 0$ stetig.

7) Es liege nun an der Stelle $u = \xi'$ der Fall III vor. Dann gehört ξ' einem der m offenen Intervalle (21), (22) an. Es sei also

$$\gamma'_\mu < \xi' < \gamma''_\mu. \tag{26}$$

Da im Falle III auf der Kugel

$$\sum_1^n {}_\nu x_\nu^2 = \xi'^2$$

sowohl innere als auch äußere Punkte von K liegen, so gilt zunächst

$$nE_n > J(\xi') > 0. \tag{27}$$

Es sei ferner N ein auf dieser Kugel gelegener Punkt, der nicht zu K gehört, und N' seine Projektion auf die Einheitskugel (24). Dann kann man $\underline{\xi}$ und $\bar{\xi}$ so bestimmen, daß

$$\gamma'_\mu < \underline{\xi} < \xi' < \bar{\xi} < \gamma''_\mu \tag{28}$$

ist, daß weder $\underline{\xi}$ noch $\bar{\xi}$ in eine der endlich vielen Ausnahmestellen fallen, und daß auf dem von M nach N' gerichteten Halbstrahl die Punkte in der Entfernung u von M für $\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi}$ noch im Äußeren von K liegen. Man projiziere jetzt die Einheitskugel stereographisch vom Nordpol N' aus auf die durch M gehende, zum Halbstrahl MN' senkrechte Ebene. Es sei P ein beliebiger Punkt mit den Koordinaten $x_1 \ldots x_n$, P' seine Projektion von M aus auf die Einheitskugel. Es sei

$$u = \overline{MP} = \sqrt{\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2}, \tag{29}$$

und es seien auf der Ebene der stereographischen Projektion $v_1 \ldots v_{n-1}$ die rechtwinkligen Koordinaten der stereographischen Projektion von P'. Man erhält entsprechend der Formel § 3 (9)

$$ds^2 = \sum_1^n{}_\nu\, dx_\nu^2 = du^2 + u^2 \left(\frac{2}{1 + \sum_1^{n-1}{}_\nu\, v_\nu^2}\right)^2 \sum_1^{n-1}{}_\nu\, dv_\nu^2. \tag{30}$$

Es bezeichne K^* das Bild von K im Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $u, v_1 \ldots v_{n-1}$. Da die Transformation bei Ausschluß des von M über N' hinausweisenden Halbstrahls eindeutig, eindeutig umkehrbar und zweimal stetig differenzierbar ist, so ist sie berührungserhaltend und führt, wie § 4 1) festgestellt, reguläre Mannigfaltigkeiten und Körper in ebensolche über. Der zwischen den beiden konzentrischen Kugeln mit den Radien $\underline{\xi}$ und $\bar{\xi}$ gelegene Teil von K, der in unserer Schreibweise mit dem Symbol

$$K(\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi})$$

zu bezeichnen ist, besteht nun, wie im laufenden Paragraphen unter 3) festgestellt, aus endlich vielen regulären Körpern, welche nur Randpunkte höherer Ordnung miteinander gemein haben können. Da dieser abgeschlossene Teil von K keinen Punkt des von M nach N' gerichteten Halbstrahls enthält, so folgt, daß im Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $u, v_1 \ldots v_{n-1}$ auch der zwischen den beiden Ebenen $u = \underline{\xi}$ und $u = \bar{\xi}$ liegende Teil von K^*

$$K^*(\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi})$$

aus endlich vielen regulären Körpern besteht, welche nur Randpunkte höherer Ordnung miteinander gemein haben können. Ebenso entspricht jeder Berührung einer Kugel

$$\sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 = u_1^2, \quad \underline{\xi} \leqq u_1 \leqq \bar{\xi}$$

mit einer der Randmannigfaltigkeiten von K bei der Transformation in dem Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $u, v_1 \dots v_{n-1}$ eine Berührung der Ebene $u = u_1$ mit der entsprechenden Randmannigfaltigkeit von K^* und umgekehrt. Es gibt daher im Bereich $\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi}$ auf den Randmannigfaltigkeiten von K^* nur endlich viele Punkte, in welchen eine Berührung mit einer Ebene der Ebenenschar $u =$ konst stattfindet. Man bezeichne mit $K^{*\lambda}$, $\lambda = 1, 2 \dots$, die endlich vielen regulären Teilkörper, aus welchen K^* $(\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi})$ besteht. Dann folgt aus den obigen Feststellungen gemäß (30) für

$$\underline{\xi} < \xi < \bar{\xi} \tag{31}$$

$$J(\xi) = \sum\nolimits_\lambda \int_{K^{*\lambda}(u=\xi)} \left(\frac{2}{1 + \sum_1^{n-1}{}_\nu v_\nu}\right)^{n-1} d v_1 \dots d v_{n-1}. \tag{32}$$

Dabei ist, wie den Feststellungen im Anschluß an § 5 (17) entspricht, auf der rechten Seite jedes einzelne der Integrale und mithin auch ihre Summe $J(\xi)$ als Funktion von ξ für alle Werte des Intervalls stetig und, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten, für welche eine Berührung der Kugel

$$\sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 = \xi^2$$

mit dem Rande von K stattfindet, auch stetig differenzierbar.

Damit sind unsere hinsichtlich des Verhaltens der Funktion $J(u)$ unter 6) ausgesprochenen Behauptungen für alle Werte von u bis auf die Anfangs- und Endpunkte γ'_μ, γ''_μ, $\mu = 1 \dots m$ der m Intervalle (21), (22) bewiesen. In diesen Punkten haben wir, da sie zu den endlich vielen Ausnahmestellen zu zählen sind, lediglich die Stetigkeit der Funktion nachzuweisen, was jetzt geschehen soll.

8) Im Punkte $\gamma''_m = \beta^*$ verschwindet $J(u)$; denn auf der Kugeloberfläche

$$\sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 = \beta^{*2}$$

liegen, wie oben festgestellt, nur endlich viele Punkte von K. Dasselbe gilt im Falle $\alpha^* > 0$ für den Punkt $\gamma'_1 = \alpha^*$. Die übrigen Punkte γ'_μ, γ''_μ gehören alle zum Fall II, und es gilt daher in diesen Punkten

$$J(u) = n E_n.$$

Es sei nun N ein auf der Kugel

$$\sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 = \beta^{*2}$$

gelegener Punkt, der nicht zu K gehört, und N' seine Projektion auf die Einheitskugel. Dann kann man $\underline{\xi}$ und $\bar{\xi}$ so bestimmen, daß

$$\gamma'_m < \underline{\xi} < \beta^* < \bar{\xi}$$

ist, daß $\underline{\xi}$ in keine der endlich vielen Ausnahmestellen fällt, was bei $\bar{\xi}$ durch $\bar{\xi} > \beta^*$ gesichert ist, und daß auf dem von M nach N' gerichteten Halbstrahl alle Punkte in der Entfernung u von M für $\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi}$ noch im Äußeren von K liegen. Dann ergibt genau dieselbe Koordinatentransformation wie oben auf dem Wege über die Gleichung (32) die Stetigkeit der Funktion $J(\xi)$ im Intervall $\underline{\xi} < \xi < \bar{\xi}$, und mithin auch an der Stelle

$$u = \beta^* = \gamma''_m.$$

Ebenso beweist man im Falle $\alpha^* > 0$ die Stetigkeit von $J(u)$ an der Stelle

$$u = \alpha^* = \gamma'_1.$$

Wir wenden uns jetzt zum Beweise der Stetigkeit der Funktion $J(u)$ in denjenigen Anfangs- und Endpunkten der m Intervalle (21), (22), welche nicht mit β^* oder α^* zusammenfallen, d. h. also nach den unter 5) gemachten Feststellungen in allen etwa vorhandenen Punkten, in welchen der Fall II eintritt. Es sei nun γ eine solche Stelle. Dann ist zunächst, wie oben festgestellt, $J(\gamma) = nE_n$. Es sei ferner N ein innerer Punkt von K auf der Kugel

$$\sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 = \gamma^2$$

und N' die Projektion von N auf die Einheitskugel. Dann kann man ein $\underline{\xi}$ und ein $\bar{\xi}$ so bestimmen, daß $0 < \underline{\xi} < \gamma < \bar{\xi}$ ist, daß keiner der beiden Werte in eine der Ausnahmestellen fällt, und daß auf dem von M nach N' gerichteten Halbstrahl die Punkte in der Entfernung u von M für $\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi}$ noch im Innern von K liegen. Zunächst besteht dann wie oben $K(\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi})$ aus endlich vielen regulären Körpern K', die nur Randpunkte höherer Ordnung miteinander gemein haben können. Ferner läßt sich ein Winkel $\eta > 0$ so bestimmen, daß jeder Punkt P, für welchen

$$\text{(33)} \qquad \sphericalangle PMN' \leqq \eta, \quad \underline{\xi} \leqq \overline{MP} \leqq \bar{\xi}$$

gilt, noch im Innern von K liegt. Alle diese Punkte gehören offenbar ein und demselben der endlich vielen Teilkörper an, aus welchen $K(\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi})$

besteht. Dieser Teilkörper möge mit K^1 bezeichnet werden. Man schneide nun aus K^1 denjenigen Teil heraus, für dessen Punkte P

$$\measuredangle PMN' < \eta \tag{34}$$

gilt. Der übrigbleibende Teil bildet dann offenbar wieder einen regulären Körper, der mit $\widetilde{K}^1$ bezeichnet werden möge. Bezeichnet also $\widetilde{K}(\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi})$ denjenigen Teil von $K(\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi})$, der nach dem Herausschneiden des Teiles (34) übrigbleibt, so besteht auch $\widetilde{K}(\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi})$ aus endlich vielen regulären Körpern, die nur Randpunkte höherer Ordnung miteinander gemein haben. Bezeichnet $\widetilde{J}(\xi)$ den $(n-1)$-dimensionalen Flächeninhalt der Projektion von $\widetilde{K}(u = \xi)$ auf die Einheitskugel, so hat man

$$J(\xi) = \widetilde{J}(\xi) + J_\eta, \tag{35}$$

wobei J_η den $(n-1)$-dimensionalen Flächeninhalt der Projektion des herausgeschnittenen Teiles auf die Einheitskugel bedeutet und mithin gleich dem Volumen der Kugel mit dem sphärischen Radius η im $(n-1)$-dimensionalen auf der Einheitskugel ausgebreiteten sphärischen Raum ist. Da nunmehr $\widetilde{K}(\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi})$ keinen Punkt des von M nach N' weisenden Halbstrahles enthält, so ergibt dieselbe Schlußweise wie oben, daß im Intervall $\underline{\xi} < \xi < \bar{\xi}$ die Funktion $\widetilde{J}(\xi)$ für alle Werte von ξ stetig ist. Da endlich J_η in dem Intervall eine Konstante darstellt, so ist auch die Funktion $J(\xi)$ in dem Intervall und mithin auch an der Stelle γ stetig, was zu beweisen war.

9) Wir machen jetzt die Voraussetzung, daß im $(n-1)$-dimensionalen sphärischen Raum, d. h. also auf der Oberfläche der n-dimensionalen Euklidischen Einheitskugel die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der am Eingang des § 6 präzisierten Formulierung bewiesen sei.

Es liege an der Stelle $u = \xi'$ der Fall III vor. Dann gehört ξ' einem der m offenen Intervalle (21), (22) an. Es sei also wie im Abschnitt 7) (26)

$$\gamma'_\mu < \xi' < \gamma''_\mu. \tag{36}$$

Wir kehren zu der im Abschnitt 7) eingeführten Koordinatentransformation unter Beibehaltung sämtlicher in diesem Abschnitt benutzten Bezeichnungen zurück.

Es bezeichne $\sigma(u)$ eine in K definierte positive stetige Funktion der Entfernung u vom Koordinatenanfangspunkt, R den Rand von K und R^* den Rand von K^*. Dann hat man für

$$\underline{\xi} \leqq \xi \leqq \bar{\xi} \tag{37}$$

$$\int_{R(\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi})} \sigma(u)\, ds_{n-1} = \int_{R^*(\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi})} \sigma(u)\, d\bar{s}^*_{n-1}, \tag{38}$$

wobei ds_{n-1} das $(n-1)$-dimensionale Euklidische Flächenelement im Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1 \ldots x_n$ bedeutet, und $\bar{ds}^*_{n-1}$ das in der Maßbestimmung (30) gemessene entsprechende Flächenelement im Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $u, v_1 \ldots v_{n-1}$.

Genau so, wie im § 5 die Ungleichung (45) hergeleitet und die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in dieser Ungleichung festgestellt wurden, gelangt man zu den folgenden Ergebnissen:

Es gilt im Intervall

$$\underline{\xi} < \xi < \bar{\xi},$$

abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen,

$$(39) \quad \frac{d}{d\xi} \int\limits_{R^*(\underline{\xi} \leqq u \leqq \xi)} \sigma(u)\, \bar{ds}^*_{n-1} \geqq \sigma(\xi)\, \xi^{n-2} \sqrt{O^*[J(\xi)]^2 + \xi^2 \left(\frac{dJ(\xi)}{d\xi}\right)^2},$$

wobei wie § 5 (25″) die Funktion $O^*[V]$ in dem auf der Oberfläche der Einheitskugel ausgebreiteten $(n-1)$-dimensionalen sphärischen Raum die Oberfläche einer Kugel als Funktion ihres Volumens ausdrückt. Beide Seiten der Ungleichung sind, abgesehen von den Ausnahmestellen, als Funktionen von ξ stetig, und das Gleichheitszeichen greift, abgesehen von den Ausnahmestellen, dann und nur dann im gesamten Intervall $\underline{\xi} < \xi < \bar{\xi}$ Platz, wenn $K^*(\underline{\xi} < u < \bar{\xi})$ in der Maßbestimmung (30) einen Rotationskörper darstellt — und zwar dergestalt, daß die Schnitte mit den Ebenen $u =$ konst für alle Werte von u im Intervall $\underline{\xi} < u < \bar{\xi}$ in der Maßbestimmung (30) $(n-1)$-dimensionale Vollkugeln sind, deren Radius wegen (27) nirgends verschwindet, und deren innerer Mittelpunkt durch die Gleichungen

$$(40) \qquad v_\nu = c_\nu, \quad \nu = 1 \ldots n-1,$$

bestimmt ist, wobei die c_ν Konstanten bedeuten. Die Rotationsachse wird also durch die Gleichungen (40) gegeben.

Durch Übertragung auf den (x)-Raum erhält dies Ergebnis die folgende Gestalt:

Das Gleichheitszeichen für das gesamte Intervall $\underline{\xi} < \xi < \bar{\xi}$, abgesehen von den Ausnahmestellen, gilt dann und nur dann, wenn im Euklidischen Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1 \ldots x_n$ $K(\underline{\xi} < u < \bar{\xi})$ einen Rotationskörper um die Achse MC bildet, wobei der Punkt C als stereographisches Bild des Punktes $v_\nu = c_\nu$, $\nu = 1 \ldots n-1$ auf der Einheitskugel liegt. Dabei müssen noch die Schnitte $K(u = \xi)$ des Körpers K mit den Kugeloberflächen

$$(41) \qquad \sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 = \xi^2$$

für alle Werte von ξ des Intervalls $\underline{\xi} < \xi < \bar{\xi}$ $(n-1)$-dimensionale sphärische Vollkugeln sein, deren Radius nirgends verschwindet, und deren innerer Mittelpunkt durch den Schnittpunkt der Kugeloberfläche (41) mit dem Halbstrahl MC gegeben ist.

Die Ungleichung (39) ist wegen (38) und der selbstverständlichen Identität

$$\frac{d}{d\xi}\int\limits_{R(u\leqq\xi)}\sigma(u)\,ds_{n-1}=\frac{d}{d\xi}\int\limits_{R(\underline{\xi}\leqq u\leqq\xi)}\sigma(u)\,ds_{n-1}$$

gleichbedeutend mit der Ungleichung

$$\frac{d}{d\xi}\int\limits_{R(u\leqq\xi)}\sigma(u)\,ds_{n-1}\geqq\sigma(\xi)\,\xi^{n-2}\sqrt{O^*[J(\xi)]^2+\xi^2\left(\frac{dJ(\zeta)}{d\xi}\right)^2}. \tag{42}$$

Diese Ungleichung gilt also, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen, im Intervall $\underline{\xi} < \xi < \bar{\xi}$, wobei beide Seiten, abgesehen von diesen Ausnahmestellen, stetig sind, und die für das gesamte Intervall, abgesehen von den Ausnahmestellen, bestehende Gültigkeit des Gleichheitszeichens an die eben formulierten notwendigen und hinreichenden Bedingungen geknüpft ist.

Nun läßt sich zu jedem Punkt ξ' des offenen Intervalls

$$\gamma'_\mu < \xi' < \gamma''_\mu$$

ein solches ihn im Innern enthaltendes Teilintervall mit dem Anfangspunkt $\underline{\xi}$ und dem Endpunkt $\bar{\xi}$ bestimmen, daß für dieses die eben gemachten Feststellungen gelten. Daraus folgt, daß, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen, die Ungleichung (42) für alle Punkte ξ des offenen Intervalls

$$\gamma'_\mu < \xi < \gamma''_\mu \tag{43}$$

Gültigkeit besitzt, und daß das Gleichheitszeichen dann und nur dann im gesamten Intervall (43), abgesehen von den Ausnahmestellen, Platz greift, wenn der Schnitt $K(u=\xi)$ des Körpers K mit der Kugeloberfläche

$$\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2=\xi^2$$

für alle Werte von ξ, welche dem offenen Intervall (43) angehören, eine $(n-1)$-dimensionale sphärische Vollkugel bildet. Dabei muß die Projektion des inneren Mittelpunktes dieser sphärischen Vollkugeln auf die Einheitskugel, da sie für jeden Wert ξ' nach den obigen Feststellungen in einer gewissen von einem $\underline{\xi} < \xi'$ und einem $\bar{\xi} > \xi'$ begrenzten Umgebung konstant bleibt, im gesamten offenen Intervall (43) fest bleiben. Man bezeichne sie mit C_μ.

10) Setzt man in der Gleichung (14)

$$\varphi = \sigma(u), \quad u = \sqrt{\sum_1^n x_\nu^2}, \quad \xi = \beta^* \tag{44}$$

und berücksichtigt, daß außerhalb der m Intervalle $\gamma_\mu' \leqq u \leqq \gamma_\mu''$ Randpunkte des Körpers K nicht vorhanden sind, so ergibt sich

$$\int_R \sigma(u)\, d s_{n-1} = \sum_1^m{}_\mu \int_{\gamma_\mu'}^{\gamma_\mu''} \frac{d}{dt}\Big(\int_{R(u \leqq t)} \sigma(u)\, d s_{n-1}\Big) dt, \tag{45}$$

und mithin wegen (42)

$$\int_R \sigma(u)\, d s_{n-1} \geqq \sum_1^m{}_\mu \int_{\gamma_\mu'}^{\gamma_\mu''} \sigma(\xi)\, \xi^{n-2} \sqrt{O^*[J(\xi)]^2 + \xi^2 \left(\frac{dJ(\xi)}{d\xi}\right)^2}\, d\xi. \tag{46}$$

Dabei sind auf der rechten Seite die Integranden bis auf die endlich vielen Ausnahmewerte bestimmt und stetig. Das Gleichheitszeichen gilt nach den im vorigen Abschnitt gemachten Feststellungen dann und nur dann, wenn für alle Punkte ξ, welche einem der m offenen Intervalle zwischen γ_μ' und γ_μ'', $\mu = 1 \ldots m$, angehören, der Schnitt $K(u = \xi)$ des Körpers K mit der Kugel

$$\sum_1^n x_\nu^2 = \xi^2 \tag{47}$$

aus einer $(n-1)$-dimensionalen sphärischen Vollkugel besteht, deren innerer Mittelpunkt, durch den Schnittpunkt der Kugel (47) mit dem Halbstrahl MC_μ, $\mu = 1 \ldots m$, gegeben wird. Hierbei bedeutet C_μ einen Punkt auf der Einheitskugel, der für jedes der m Intervalle $\gamma_\mu' < \xi < \gamma_\mu''$ fest bleibt. Die Projektion des Schnittes $K(u = \xi)$ auf die Einheitskugel besitzt voraussetzungsgemäß den $(n-1)$-dimensionalen Euklidischen Flächeninhalt $J(\xi)$, oder mit anderen Worten — in dem auf der Einheitskugel ausgebreiteten sphärischen Raum das sphärische Volumen $J(\xi)$. Bezeichnet also $r(\xi)$ den sphärischen Radius der sphärischen Vollkugel, aus welcher im Falle der Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (46) die Projektion besteht, so ist $r(\xi)$ bestimmt durch die Gleichung

$$V^*(r(\xi)) = J(\xi), \tag{48}$$

wobei die Funktion $V^*(r)$ wie § 5 (25) in dem auf der Euklidischen Einheitskugel ausgebreiteten $(n-1)$-dimensionalen sphärischen Raum das Volumen einer Kugel als Funktion ihres sphärischen Radius ausdrückt. Da gemäß (27) für alle Punkte ξ der offenen Intervalle $\gamma_\mu' < \xi < \gamma_\mu''$, $\mu = 1 \ldots m$,

$$n E_n > J(\xi) > 0 \tag{49}$$

gilt, so ist in allen diesen Punkten auch

$$\pi > r(\xi) > 0. \tag{50}$$

In denjenigen Punkten zwischen α^* und β^*, welche weder als innere Punkte noch als Anfangs- und Endpunkte einem der Intervalle γ'_μ, γ''_μ, $\mu = 1 \ldots m$ angehören, tritt der Fall I ein, und besteht mithin der Schnitt $K(u = \xi)$ aus der gesamten Kugeloberfläche

$$\sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 = \xi^2.$$

Scheiden wir zunächst den Punkt $\gamma''_m = \beta^*$, und im Falle $\alpha^* > 0$ noch den Punkt $\gamma'_1 = \alpha^*$ aus, so gehören die übrigen Punkte γ'_μ, γ''_μ zum Falle II, und es erfüllen daher auch die Schnitte $K(u = \gamma'_\mu)$, $K(u = \gamma''_\mu)$ die gesamten Kugeloberflächen

$$\sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 = \gamma_\mu'^2, \quad \sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 = \gamma_\mu''^2. \tag{51}$$

Im Falle $\alpha^* = 0$ besteht der Schnitt $K(u = \alpha^*)$ nur aus dem Koordinatenanfangspunkt M, der dann ein innerer Punkt von K ist. Es erübrigt also nur noch die Klarstellung des Schnittes $K(u = \beta^*)$, und im Falle $\alpha^* > 0$ noch des Schnittes $K(u = \alpha^*)$.

Im offenen Intervall

$$\gamma'_m < \xi < \gamma''_m = \beta^* \tag{52}$$

liegt der innere Mittelpunkt der $(n-1)$-dimensionalen sphärischen Vollkugel, aus welcher der Schnitt $K(u = \xi)$ im Falle der Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (46) besteht, auf dem festen Halbstrahl MC_m, während ihr Radius wegen (50) nicht verschwindet. Daraus folgt, daß der Schnittpunkt des Halbstrahls mit der Kugel

$$\sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 = \beta^{*2} \tag{53}$$

als Häufungspunkt von Punkten des abgeschlossenen Körpers K dem Körper angehört. Andererseits verschwindet, wie unter 8) festgestellt, $J(\xi)$ an der Stelle $\xi = \beta^*$ und bleibt dort stetig. Man hat mithin wegen (48) für $\xi \to \beta^*$

$$r(\xi) \to 0. \tag{54}$$

Daher konvergieren im offenen Intervall (52) sämtliche Punkte des Schnittes $K(u = \xi)$ für $\xi \to \beta^*$ gegen den Schnittpunkt des Halbstrahls MC_m mit der Kugel (53). Daraus folgt, daß ein von diesem Schnittpunkt verschiedener Punkt auf der Kugel (53), der mit P bezeichnet werden möge, nicht Häufungspunkt von Punkten des Körpers K sein kann, deren Entfernung vom Koordinatenanfangspunkt $< \beta^*$ ist. Da auf Grund der Definition von β^* der Körper Punkte, deren Entfernung vom Koordinatenanfangspunkt β^* über-

steigt, überhaupt nicht enthält, so kann P nicht Häufungspunkt von Punkten des Körpers sein, welche nicht auf der Kugel (53) liegen.

Mithin kann P weder innerer Punkt von K sein, noch Häufungspunkt von inneren Punkten. Da gemäß der Definitionseigenschaft l. c.[1] § 6 IV (d) jeder Randpunkt eines regulären Körpers Häufungspunkt von inneren Punkten sein muß, so kann P auch kein Randpunkt von K sein und mithin überhaupt nicht zu K gehören. Also besteht der Schnitt $K(u = \beta^*)$ nur aus dem Schnittpunkt des Halbstrahls MC_m mit der Kugel (53). Ebenso beweist man, daß im Fall $\alpha^* > 0$ der Schnitt $K(u = \alpha^*)$ nur aus dem Schnittpunkt des Halbstrahls MC_1 mit der Kugel

$$\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 = \alpha^{*2}$$

besteht.

Damit haben wir vollständig festgestellt, an welche Gestalt sämtlicher Schnitte $K(u = \xi)$ die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in der Ungleichung (46) als notwendige und hinreichende Bedingung geknüpft ist. Nunmehr wollen wir uns die dadurch festgelegte Gestalt des Körpers näher veranschaulichen: Randpunkte besitzt er überhaupt nur in einer Entfernung u vom Koordinatenanfangspunkt, welche einem der m abgeschlossenen Intervalle $\gamma'_\mu, \gamma''_\mu$, $\mu = 1 \ldots m$, angehört. Der Rand wird durch Rotation von m Meridiankurven erzeugt, welche den Intervallen $\gamma'_\mu \leqq u \leqq \gamma''_\mu$, $\mu = 1 \ldots m$, angehören, oder mit anderen Worten in den abgeschlossenen Bereichen zwischen den beiden Kugeln

$$\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 = \gamma_\mu'^2, \quad \sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 = \gamma_\mu''^2, \quad \mu = 1 \ldots m,$$

verlaufen, und deren jede um eine zugehörige Achse MC_μ rotiert. Es bezeichne $x(u)$ die von O aus in der Richtung MC_μ gemessene senkrechte Projektion des in der Entfernung u von O befindlichen laufenden Punktes der Meridiankurve auf die Rotationsachse MC_μ und $\varrho(u)$ seine Entfernung von der Achse. Dann erhält man

$$x(u) = u \cos r(u), \quad \varrho(u) = u \sin r(u). \tag{55}$$

Dabei ist die Funktion $r(u)$ wegen (48) auf Grund der im Abschnitt 6) betreffs der Funktion $J(u)$ gemachten Feststellungen für alle Werte von u stetig und bis auf die endlich vielen Ausnahmewerte stetig differenzierbar. Ferner gilt wegen (50) für

$$\gamma'_\mu < u < \gamma''_\mu, \quad \mu = 1 \ldots m, \tag{56}$$

$$\varrho(u) > 0. \tag{57}$$

Wie eingangs des Abschnitts 8) festgestellt, gilt wegen $\gamma''_m = \beta^*$

$$J(\gamma''_m) = J(\beta^*) = 0 \tag{58}$$

und mithin

$$r(\gamma_m'') = r(\beta^*) = 0. \tag{59}$$

Im Falle $\alpha^* > 0$ gilt wegen $\gamma_1' = \alpha^*$ auch noch

$$J(\gamma_1') = J(\alpha^*) = 0 \tag{60}$$

und mithin

$$r(\gamma_1') = r(\alpha^*) = 0. \tag{61}$$

In allen übrigen Punkten $\gamma_\mu', \gamma_\mu''$ ist dagegen

$$J(\gamma_\mu') = nE_n, \quad J(\gamma_\mu'') = nE_n \tag{62}$$

und mithin

$$r(\gamma_\mu') = \pi, \quad r(\gamma_\mu'') = \pi. \tag{63}$$

In jedem der Intervalle $\gamma_\mu' \leqq u \leqq \gamma_\mu''$ verläuft also die zugehörige Meridiankurve dergestalt, daß sie die Rotationsachse MC_u nur in denjenigen beiden Punkten trifft, welche die Entfernungen $u = \gamma_\mu'$ und $u = \gamma_\mu''$ von M besitzen — und zwar gilt in diesen beiden Schnittpunkten wegen (55), (59), (61)

$$x(\gamma_m'') = x(\beta^*) = \beta^*, \tag{64}$$

und im Falle $\alpha^* > 0$ noch

$$x(\gamma_1') = x(\alpha^*) = \alpha^*, \tag{65}$$

während in allen übrigen Punkten $\gamma_\mu', \gamma_\mu''$ wegen (63)

$$x(\gamma_\mu') = -\gamma'; \quad x(\gamma_\mu'') = -\gamma_\mu'' \tag{66}$$

ist.

Es bezeichne nun F_μ, $\mu = 1 \ldots m$, die einfache Rotationsfläche, welche durch Rotation der im Intervall $\gamma_\mu' \leqq u \leqq \gamma_\mu''$ verlaufenden Meridiankurve erzeugt wird, und K_μ den von ihr umschlossenen einfachen Rotationskörper. Sind P_1 und P_2 zwei von M um weniger als γ_μ' entfernte Punkte, so trifft die Strecke P_1P_2, da F_μ in dem von den beiden konzentrischen Kugeloberflächen

$$\sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 = \gamma_\mu'^2, \quad \sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 = \gamma_\mu''^2 \tag{67}$$

begrenzten Bereich verläuft, keinen Punkt von F_μ. Daher liegen entweder alle Punkte der offenen Vollkugel

$$\sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 < \gamma_\mu'^2 \tag{68}$$

im Innern oder alle im Äußern von K_μ. Im ersteren Fall gehört mithin auch die abgeschlossene Vollkugel zu K_μ. Der erstere Fall tritt offenbar dann ein,

wenn der Koordinatenanfangspunkt M im Innern des von den beiden Schnittpunkten der Meridiankurve mit der Rotationsachse MC_μ auf dieser gebildeten Intervalls liegt, der letztere — wenn M im Äußern dieses Intervalls sich befindet. Es liegt mithin die offene Vollkugel (68) ganz im Innern oder ganz im Äußern von K_μ, je nachdem ob $x(\gamma'_\mu)$ und $x(\gamma''_\mu)$ entgegengesetztes oder gleiches Vorzeichen haben. In letzterem Fall liegt also der Körper K_μ ganz in dem von den beiden Kugelflächen

$$\sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 = \gamma_\mu'^2 \quad \text{und} \quad \sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 = \gamma_\mu''^2$$

begrenzten Bereich, in beiden Fällen — ganz in dem von der zweiten Kugelfläche umschlossenen Raum.

Da wegen (66) für $\mu = 2, 3 \ldots m-1$ die Vorzeichen von $x(\gamma'_\mu)$ und $x(\gamma''_\mu)$ übereinstimmend negativ sind, so folgt, daß unter den Körpern $K_2, K_3 \ldots K_{m-1}$ keine zwei einen inneren Punkt gemein haben. Ebenso folgt, daß keiner von ihnen mit dem Körper K_1 einen inneren Punkt gemein hat.

Unter den Oberflächen $F_1, F_2 \ldots F_{m-1}$ dieser Körper können nur zwei unmittelbar aufeinander folgende F_λ und $F_{\lambda+1}$ einen Punkt gemein haben — und zwar nur einen einzigen. Das tritt nämlich dann und nur dann ein, wenn $\gamma''_\lambda = \gamma'_{\lambda+1}$ ist und C_λ mit $C_{\lambda+1}$ zusammenfällt, indem in diesem Falle der auf der Kugel $u = \gamma''_\lambda$ gelegene Punkt von F_λ mit dem auf der Kugel $u = \gamma'_{\lambda+1}$ befindlichen Punkt von $F_{\lambda+1}$ koinzidiert. Im Falle $m \geqq 2$ ist endlich wegen (66) $x(\gamma'_m)$ negativ und wegen (64) $x(\gamma''_m) = x(\beta^*) = \beta^*$ und mithin positiv. Daher überdeckt der Körper K_m die gesamte Vollkugel

$$\sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 \leqq \gamma_m'^2 \tag{69}$$

und mithin auch die in dieser enthaltenen Körper $K_1, K_2 \ldots K_{m-1}$. Die Oberfläche F_m kann wiederum nur einen einzigen Punkt mit einer der Flächen $F_1 \ldots F_{m-1}$ gemein haben, und zwar nur mit der Fläche F_{m-1}, wo das dann und nur dann eintritt, wenn $\gamma''_{m-1} = \gamma'_m$ ist und der Punkt C_{m-1} mit dem Punkt C_m zusammenfällt.

Da die Berandung des Körpers K aus den Flächen $F_1, F_2 \ldots F_m$ besteht, so tritt uns seine Gestalt in der folgenden Erzeugung vor Augen:

Der Körper K entsteht, indem man aus dem einfachen Rotationskörper K_m die in ihm enthaltenen einfachen Rotationskörper $K_1, K_2 \ldots K_{m-1}$ herausschneidet. Dabei verstehen wir laut § 6, Abschnitt 2) unter einem „einfachen" Rotationskörper einen solchen, dessen Oberfläche durch Rotation einer Meridiankurve erzeugt wird, welche aus einem einfachen Jordanbogen besteht,

der die Rotationsachse nur in seinen beiden Endpunkten trifft. Die Körper K_μ, $\mu = 2 \ldots m-1$, liegen in den konzentrischen Schichten

$$\gamma_\mu'^2 \leqq \sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 \leqq \gamma_\mu''^2, \tag{70}$$

während der Körper K_m die alle diese Schichten enthaltende Vollkugel

$$\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 \leqq \gamma_m'^2 \tag{71}$$

überdeckt. Der Körper K_1 liegt wegen (65), (66) im Falle $\alpha^* = 0$ in der Schicht

$$0 < \gamma_1'^2 \leqq \sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 \leqq \gamma_1''^2, \tag{72}$$

während er im Falle $\alpha^* > 0$ in der Vollkugel mit dem Radius γ_1'' enthalten ist und die Vollkugel mit dem Radius $\gamma_1' = \alpha^*$ überdeckt. Die Körper K_μ, $\mu = 2 \ldots m-1$, haben mit den beiden Kugeloberflächen mit den Radien γ_μ' und γ_μ'' je einen Punkt gemein, ebenso der Körper K_m mit der Kugeloberfläche mit dem Radius β^* und der Körper K_1 mit der Kugeloberfläche mit dem Radius γ_1'' und im Falle $\alpha^* = 0$ auch noch mit der Kugeloberfläche mit dem Radius γ_1'.

Der Körper K, der im allgemeinen kein Rotationskörper ist, gestattet eine beliebige Verdrehung der m konzentrischen Schichten $\gamma_\mu'^2 \leqq \sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 \leqq \gamma_\mu''^2$ gegeneinander, ohne dabei der Eigenschaft verlustig zu gehen, in der Ungleichung (46) die Gleichheit zu erreichen. Das leuchtet auch unmittelbar ein, da bei jeder Drehung einer der Schichten um O sowohl die Funktion $J(u)$ als auch das Oberflächenintegral auf der linken Seite von (46) invariant bleiben.

11) Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zur Formulierung des folgenden Satzes:

Das zweite Abrundungstheorem.

Man mache die Voraussetzung, daß die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel im $(n-1)$-dimensionalen sphärischen Raum, d. h. also auf der Oberfläche der n-dimensionalen Euklidischen Kugel bewiesen sei.

Es sei im Euklidischen Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1 \ldots x_n$ K ein regulärer Körper, auf dessen Randmannigfaltigkeiten nur endlich viele Punkte vorhanden sind, in welchen eine Berührung mit einer der Kugeln um den Koordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt stattfindet.

Der Koordinatenanfangspunkt M liege nicht auf dem Rande von K. Es bezeichne K' denjenigen abgeschlossenen Euklidischen Rotationskörper um die x_1-Achse, dessen Durchschnitt mit jeder Kugeloberfläche

$$\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 = u^2 \tag{73}$$

eine sphärische Vollkugel bildet, welche dasselbe sphärische Volumen, d. h. also denselben $(n-1)$-dimensionalen Euklidischen Flächeninhalt besitzt wie der Durchschnitt von K mit der Kugeloberfläche. Dabei ist der innere Mittelpunkt der sphärischen Vollkugel im Schnittpunkt der Kugeloberfläche mit dem positiven Halbstrahl der x_1-Achse zu fixieren. Dann gilt für jedes Paar positiver stetiger Funktionen $\sigma(u)$ und $\tau(u)$

$$\int_K \tau(u)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{K'} \tau(u)\, dx_1 \ldots dx_n, \tag{74}$$

$$\int_R \sigma(u)\, ds_{n-1} \geqq \int_{R'} \sigma(u)\, ds_{n-1}. \tag{75}$$

Dabei bedeuten R und R' die Berandungen von K und K', ds_{n-1} das $(n-1)$-dimensionale Euklidische Flächenelement und u die Entfernung vom Koordinatenanfangspunkt. Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn der Körper die am Schlusse des vorigen Abschnitts festgestellte Gestalt besitzt, oder mit anderen Worten, wenn er mit K' zur Deckung gebracht werden kann, indem man jeder einzelnen der m konzentrischen Kugelschichten

$$\gamma_\mu'^2 \leqq \sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 \leqq \gamma_\mu''^2, \quad \mu = 1 \ldots m, \tag{76}$$

eine passende Drehung um M erteilt.

Beweis. Da die Funktion $J(u)$, wie eingangs des Abschnitts 6) festgestellt, für alle Werte von u stetig ist, und der Durchschnitt von K mit der Kugeloberfläche

$$\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 = u^2 \tag{77}$$

den Flächeninhalt

$$u^{n-1} J(u) \tag{78}$$

besitzt, so erhält man

$$\int_K \tau(u)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{\alpha^*}^{\beta^*} \tau(u) u^{n-1} J(u) du. \tag{79}$$

Ebenso ergibt sich aus der Konstruktionsvorschrift von K'

$$\int_{K'} \tau(u)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{\alpha^*}^{\beta^*} \tau(u) u^{n-1} J(u) du. \tag{80}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt die zu beweisende Gleichung (74).

Wir können nun nicht ohne weiteres behaupten, daß für den Körper K' in der Ungleichung (46) das Gleichheitszeichen gilt, d. h. also, daß die Gleichung

$$(81)\qquad \int_{R'} \sigma(u)\, d s_{n-1} = \sum_1^m{}_\mu \int_{\gamma'_\mu}^{\gamma''_\mu} \sigma(\xi)\, \xi^{n-2} \sqrt{O^*[J(\xi)]^2 + \xi^2 \left(\frac{dJ(\xi)}{d\xi}\right)^2}\, d\xi$$

besteht. Denn der Körper K' erfüllt zwar die in den vorigen Abschnitten an die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in dieser Ungleichung geknüpften notwendigen und hinreichenden Bedingungen. Diese wurden jedoch unter der Voraussetzung hergeleitet, daß der Körper ein regulärer ist, was für K' nicht zuzutreffen braucht, da die zweimalige Differenzierbarkeit auf den Randmannigfaltigkeiten von K' nicht gesichert ist. Es ist jedoch leicht, die Gleichung (81) direkt zu beweisen. Man bezeichne wie im vorigen Abschnitt mit K'_μ, $\mu = 1 \ldots m$, diejenigen einfachen Rotationskörper um die x_1-Achse, deren Oberfläche F'_μ durch Rotation der in der Schicht

$$(82)\qquad \gamma'^2_\mu \leqq \sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 \leqq \gamma''^2_\mu$$

verlaufenden Meridiankurve erzeugt wird. Dann entsteht also der Körper K', indem aus dem Körper K'_m die in ihm enthaltenen Körper $K'_1 \ldots K'_{m-1}$ herausgeschnitten werden. Die x_1-Koordinate des in der Entfernung u von M befindlichen laufenden Punktes der erzeugenden Meridiankurve von F'_μ werde mit $x_1(u)$ bezeichnet, die Entfernung des laufenden Punktes von der x_1-Achse mit $\varrho(u)$. Dann wird entsprechend (48), (55) die Meridiankurve durch die Gleichungen

$$(83)\qquad x_1(u) = u \cos r(u), \quad \varrho(u) = u \sin r(u), \quad \gamma'_\mu \leqq u \leqq \gamma''_\mu,$$

dargestellt, wobei die Funktion $r(u)$ wie unter (48) durch die Gleichung

$$(84)\qquad V^*(r(u)) = J(u)$$

gegeben ist. Entsprechend l. c.[1] § 3 IV (7″) ergibt sich hieraus

$$(85)\qquad \int_{F'_\mu} \sigma(u)\, d s_{n-1} = (n-1) E_{n-1} \int_{\gamma'_\mu}^{\gamma''_\mu} \sigma(u) u^{n-2} \sin^{n-2} r(u) \sqrt{x'_1(u)^2 + \varrho'(u)^2}\, du$$

$$= \int_{\gamma'_\mu}^{\gamma''_\mu} \sigma(u) u^{n-2} (n-1) E_{n-1} \sin^{n-2} r(u) \sqrt{1 + u^2 r'(u)^2}\, du.$$

Nun ist wegen § 5 (25), (27), (32)

$$(86)\qquad \frac{d V^*(r(u))}{d r(u)} = O^*(r(u)) = (n-1) E_{n-1} \sin^{n-2} r(u)$$

und mithin wegen (84)

$$(87)\qquad \frac{d J(u)}{d u} = O^*(r(u)) r'(u) = (n-1) E_{n-1} \sin^{n-2} r(u) r'(u).$$

Man erhält also

$$(88)\quad (n-1)E_{n-1}\sin^{n-2}r(u)\sqrt{1+u^2\,r'(u)^2} = \sqrt{O^*(r(u))^2+u^2\left(\frac{dJ(u)}{du}\right)^2},$$

und da wegen § 5 (25), (25'')

$$(89)\qquad O^*(r(u)) = O^*[V^*(r(u))]$$

ist bei Einführung von (84)

$$(90)\qquad O^*(r(u)) = O^*[J(u)].$$

Mithin ergibt sich

$$(91)\quad (n-1)E_{n-1}\sin^{n-2}r(u)\sqrt{1+u^2\,r'(u)^2} = \sqrt{O^*[J(u)]^2+u^2\left(\frac{dJ(u)}{du}\right)^2}$$

und bei Einführung in (85)

$$(92)\qquad \int_{F'_\mu} \sigma(u)\,ds_{n-1} = \int_{\gamma'_\mu}^{\gamma''_\mu} \sigma(u)\,u^{n-2}\,\sqrt{O^*[J(u)]^2+u^2\left(\frac{dJ(u)}{du}\right)^2}\,du.$$

Summiert man über $\mu = 1 \ldots m$ und bezeichnet auf der rechten Seite die Integrationsvariable mit ξ, so erhält man in der Tat die erwartete Gleichung

$$(93)\qquad \int_{R'} \sigma(u)\,ds_{n-1} = \sum_1^m{}_\mu \int_{\gamma'_\mu}^{\gamma''_\mu} \sigma(\xi)\,\xi^{n-2}\,\sqrt{O^*[J(\xi)]^2+\xi^2\left(\frac{dJ(\xi)}{d\xi}\right)^2}\,d\xi.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der Ungleichung (46) und den im Abschnitt 10) über den Eintritt des Gleichheitszeichens in letzterer gemachten Feststellungen ergeben die zu beweisende Ungleichung (75) und die im Abrundungstheorem über die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in dieser formulierten notwendigen und hinreichenden Bedingungen.

12) Wir wollen uns jetzt noch über das Verhalten der Bogenlänge auf den m Meridiankurven des konstruierten Hilfskörpers K' orientieren.

Zunächst folgt aus (46) für $\sigma(u) = 1$

$$(94)\qquad \sum_1^m{}_\mu \int_{\gamma'_\mu}^{\gamma''_\mu} \xi^{n-1}\left|\frac{dJ(\xi)}{d\xi}\right| d\xi \leqq \int_R ds_{n-1}$$

und mithin

$$(95)\qquad \sum_1^m{}_\mu \int_{\gamma'_\mu}^{\gamma''_\mu} \left|\frac{dJ(\xi)}{d\xi}\right| d\xi \leqq \frac{1}{\gamma_1'^{\,n-1}}O, \quad \gamma'_1 > 0,$$

wobei O die Oberfläche von K bezeichnet.

Für das Bogenelement der Meridiankurve erhält man gemäß (83)

$$\left|\frac{ds}{du}\right| = \sqrt{1 + u^2\, r'(u)^2} \leqq 1 + u\,|r'(u)| \tag{96}$$

und wegen (87)

$$\left|\frac{ds}{du}\right| \leqq 1 + \frac{u}{(n-1)\,E_{n-1}\sin^{n-2} r(u)}\left|\frac{dJ(u)}{du}\right|. \tag{97}$$

Nun ist wegen (84) $r(u)$ stetig, ferner gilt entsprechend (49), (50) für

$$\gamma'_\mu < u < \gamma''_\mu, \quad \mu = 1 \ldots m$$

$$0 < J(u) < nE_n \quad \text{und mithin} \quad 0 < r(u) < \pi. \tag{98}$$

Daher sichern die Ungleichungen (97) und (95), daß auf jeder der m Meridiankurven jeder Bogen, der von keinem der beiden Endpunkte $u = \gamma'_\mu$ und $u = \gamma''_\mu$ begrenzt wird, endliche Länge besitzt.

13) Das zweite Abrundungstheorem bleibt unverändert gültig, wenn die Voraussetzung, daß der Koordinatenanfangspunkt nicht auf der Berandung des Körpers liegt, fallengelassen wird. Befindet er sich nämlich auf dem Rande, so schalte man zunächst eine Kugel um ihn als Mittelpunkt aus, deren Radius kleiner gewählt ist, als der kleinste Radius der voraussetzungsgemäß nicht unendlich vielen konzentrischen Kugeln, welche die Berandung von K berühren. Läßt man dann den Radius der ausgeschalteten Kugel gegen Null konvergieren, so ergibt sich der Beweis. Da derselbe keine Abänderung des Verfahrens erfordert, so kann hier auf die Ausführung verzichtet werden, zumal da von dieser Erweiterung in der Folge kein Gebrauch gemacht werden soll.

§ 8.

Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im sphärischen Raum.

1) Es sei $n \geqq 3$. Man mache die Voraussetzung, daß im $(n-1)$-dimensionalen sphärischen Raum, d. h. also auf der Oberfläche der n-dimensionalen Euklidischen Kugel, die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel bewiesen sei.

Es sei im n-dimensionalen sphärischen Raum, d. h. auf der Oberfläche der $(n+1)$-dimensionalen Euklidischen Einheitskugel K ein gegebener regulärer Körper.

Durch dieselbe Schlußweise wie § 6 Abschnitt 4) folgt aus dem Satz VIII, § 2 Abschnitt 7) in seiner Verallgemeinerung durch den Satz IX, § 2 Abschnitt 8), daß in unserem n-dimensionalen sphärischen Raum die Gesamtheit der Mittelpunkte der konzentrischen Kugelscharen, welche die Randmannigfaltigkeiten von K in unendlich vielen Punkten berühren, den äußeren Inhalt Null besitzt. Ebenso besitzt die Berandung von K den äußeren Inhalt Null, während der äußere Inhalt der Gesamtheit der äußeren Punkte von K und

mithin auch der Gesamtheit ihrer diametralen Gegenpunkte nicht verschwindet. Daher gibt es einen Punkt S, dessen Gegenpunkt N im Äußern von K liegt, während S nicht dem Rande von K angehört, und die konzentrische Kugelschar mit dem Mittelpunkt S die Berandung von K nicht in unendlich vielen Punkten berührt. Man projiziere nun die Oberfläche der $(n+1)$-dimensionalen Einheitskugel stereographisch von N aus auf die durch den Mittelpunkt der Einheitskugel gehende zur Achse SN senkrechte Ebene. Es seien $x_1 \ldots x_n$ die rechtwinkligen Koordinaten der stereographischen Projektion, ihr Anfangspunkt M sei der Mittelpunkt der $(n+1)$-dimensionalen Einheitskugel. Dann geht S in M und die sphärische konzentrische Kugelschar mit dem Mittelpunkt S in die konzentrische Kugelschar

$$\sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 = u^2 \tag{1}$$

über. Da die Transformation, abgesehen von dem nicht zu K gehörigen Punkte N, eindeutig, eindeutig umkehrbar, zweimal stetig differenzierbar und mithin auch berührungserhaltend ist, so geht K dabei in einen ebenfalls regulären Körper K^* über, auf dessen Randmannigfaltigkeiten nicht unendlich viele Punkte vorhanden sind, in welchen eine Berührung mit einer Kugel der konzentrischen Schar (1) stattfindet.

Damit sind alle Voraussetzungen des zweiten Abrundungstheorems gegeben. Man setze in diesem

$$\tau(u) = \left(\frac{2}{1+u^2}\right)^n, \quad \sigma(u) = \left(\frac{2}{1+u^2}\right)^{n-1}, \tag{2}$$

bezeichne mit R^* den Rand von K^*, mit $K^{*\prime}$ den nach der Vorschrift des Abrundungstheorems konstruierten Euklidischen Rotationskörper um die x_1-Achse und mit $R^{*\prime}$ seinen Rand. Dann hat man laut dem Abrundungstheorem

$$\int_{K^*} \left(\frac{2}{1+u^2}\right)^n dx_1 \ldots dx_n = \int_{K^{*\prime}} \left(\frac{2}{1+u^2}\right)^n dx_1 \ldots dx_n; \tag{3}$$

$$\int_{R^*} \left(\frac{2}{1+u^2}\right)^{n-1} ds_{n-1} \geqq \int_{R^{*\prime}} \left(\frac{2}{1+u^2}\right)^{n-1} ds_{n-1}. \tag{4}$$

Dabei besteht $K^{*\prime}$ aus dem einfachen Rotationskörper $K_m^{*\prime}$, aus welchem die einfachen Rotationskörper $K_1^{*\prime} \ldots K_{m-1}^{*\prime}$ herausgeschnitten sind, und das Gleichheitszeichen gilt in der letzten Ungleichung dann und nur dann, wenn die beiden Körper K^* und $K^{*\prime}$ zur Deckung gebracht werden können, indem man jeder der m konzentrischen Schichten

$$\gamma_\mu'^2 \leqq \sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 \leqq \gamma_\mu''^2, \quad \mu = 1 \ldots m, \tag{5}$$

eine passende Drehung um den Koordinatenanfangspunkt M erteilt. Im Falle $m = 1$ wird aus dem Körper $K_m^{*\prime} = K_1^{*\prime}$ nichts herausgeschnitten. Er ist also mit $K^{*\prime}$ identisch und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn die beiden Körper K^* und $K^{*\prime}$ durch eine Drehung um den Koordinatenanfangspunkt M zur Deckung gebracht werden können.

Es mögen nun $\overline{ds}$ und ds die einander vermöge der stereographischen Projektion entsprechenden Linienelemente im sphärischen Raum und im Euklidischen (x)-Raum bezeichnen. Dann hat man

$$\overline{ds} = \frac{2}{1 + \sum_1^n x_r^2}\, ds = \frac{2}{1+u^2}\, ds. \tag{6}$$

Den Bewegungen des (x)-Raumes, welche den Punkt M fest lassen, entsprechen die Bewegungen des sphärischen Raumes, welche das diametrale Punktepaar S, N fest lassen. Denjenigen Bewegungen des (x)-Raumes, welche jeden Punkt einer durch M gehenden Geraden fest lassen, also den Rotationen um diese, entsprechen diejenigen Bewegungen des sphärischen Raumes, welche jeden Punkt der das stereographische Bild der Geraden darstellenden, durch S und N gehenden sphärischen Geraden fest lassen, also die Rotationen um diese. Daher ist das stereographische Bild eines Rotationskörpers des (x)-Raumes mit einer durch M gehenden Achse im sphärischen Raum ein Rotationskörper mit einer durch S und N gehenden Achse. Die den Rotationskörpern $K^{*\prime}, K_1^{*\prime} \ldots K_m^{*\prime}$ entsprechenden Rotationskörper im sphärischen Raum mögen mit $K', K_1' \ldots K_m'$ bezeichnet werden, ihre Volumina und Oberflächen mit $V', V_1' \ldots V_m', O', O_1' \ldots O_m'$. Dann haben diese Körper ebenfalls eine gemeinsame Rotationsachse, und K' entsteht, indem man aus dem einfachen Rotationskörper K_m' die einfachen Rotationskörper $K_1' \ldots K_{m-1}'$ herausschneidet. Man hat also

$$O' = \sum_1^m{}_\mu\, O_\mu', \quad V' = V_m' - \sum_1^{m-1}{}_\mu\, V_\mu'. \tag{7}$$

Wie nun aus den Gleichungen §7 (83), (84) und den Feststellungen §7 Abschnitt 12) hervorgeht, genügen die Meridiankurven der einfachen Rotationskörper $K_1' \ldots K_m'$ den Voraussetzungen des Satzes, der am Schlusse von § 6 Abschnitt 2) über die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel im Vergleich mit einfachen Rotationskörpern formuliert worden ist. Man hat daher

$$O_\mu' \geqq O^*[V_\mu'], \quad \mu = 1 \ldots m-1, \quad O_m' \geqq O^*[V_m'], \tag{8}$$

wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn die betreffenden Rotationskörper Kugeln sind. Da zwei Kugeln, deren Volumina sich zum

Volumen des Gesamtraumes, d. h. zu $(n+1)E_{n+1}$ ergänzen, gleiche Oberfläche besitzen, so läßt sich die letzte Gleichung auch in der Gestalt

$$O'_m \geqq O^*[(n+1)E_{n+1} - V'_m] \tag{9}$$

schreiben. Wegen (7) ist jetzt

$$\sum_1^{m-1}{}_\mu V'_\mu + (n+1)E_{n+1} - V'_m = (n+1)E_{n+1} - V'. \tag{10}$$

Auf Grund der für jede Dimensionenzahl gültigen Funktionalungleichung § 5 (36) ist daher

$$\sum_1^{m-1}{}_\mu O^*[V'_\mu] + O^*[(n+1)E_{n+1} - V'_m] \geqq O^*[(n+1)E_{n+1} - V'] \tag{11}$$

und wegen

$$O^*[(n+1)E_{n+1} - V'] = O^*[V'] \tag{12}$$

$$\sum_1^{m-1}{}_\mu O^*[V'_\mu] + O^*[(n+1)E_{n+1} - V'_m] \geqq O^*[V'], \tag{13}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur in dem trivialen Falle gilt, daß $m = 1$ ist. Die Zusammenstellung dieser Ungleichung mit (8) und (9) ergibt wegen (7)

$$O' \geqq O^*[V'], \tag{14}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn $m = 1$ und K' eine Kugel ist.

Andererseits werden wegen (6) das Volumen V und Oberfläche O des gegebenen regulären Körpers K durch die linken Seiten der Gleichung (3) und der Ungleichung (4) dargestellt und Volumen und Oberfläche von K' durch die rechten. Es ist daher

$$V = V'; \tag{15}$$

$$O \geqq O'. \tag{16}$$

Aus (14) und (15) folgt

$$O' \geqq O^*[V] \tag{17}$$

und aus (16) und (17)

$$O \geqq O^*[V]. \tag{18}$$

Das Gleichheitszeichen gilt hier dann und nur dann, wenn es in (16) und (17) und mithin auch (14) gilt. Letzteres findet dann und nur dann statt, wenn $m = 1$ und K' eine Kugel ist. Das Gleichheitszeichen in (16) gilt dann und nur dann, wenn es in (4) gilt, und das findet, wie oben ausgeführt, im Falle $m = 1$ dann und nur dann statt, wenn die beiden Körper K^* und $K^{*\prime}$ durch eine Drehung um M miteinander zur Deckung gebracht werden können. Da einer Drehung um M im (x)-Raum im sphärischen Raum ebenfalls eine Drehung entspricht, so müssen K und K' kongruent sein, und es muß, da K' eine Kugel ist, auch K eine solche sein. Also gilt in der Ungleichung (18) das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn K eine Kugel ist.

Damit ist die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der sphärischen Geometrie für n Dimensionen bewiesen unter der Voraussetzung, daß sie für $n-1$ Dimensionen gilt. Da sie endlich für zwei Dimensionen gilt, d. h. dem Kreise auf der Kugel zukommt, *so ist auf Grund des Induktionsschlusses der Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im sphärischen Raum für jede Dimensionenzahl erbracht.*

2) Der auseinandergesetzte Beweis für die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel im sphärischen Raum stützt sich nicht auf ihre Gültigkeit in der Euklidischen und hyperbolischen Geometrie. Es läßt sich vielmehr auf Grund der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel in der sphärischen Geometrie ein weiterer Beweis für diese Eigenschaft der Kugel im Euklidischen und hyperbolischen Raum aufbauen, welcher vom Induktionsschluß keinen Gebrauch macht. Man zieht zu diesem Zwecke das zweite Abrundungstheorem heran und schließt genau so, wie oben durchgeführt. Dabei bietet sich jetzt die wesentliche Vereinfachung, daß der Mittelpunkt der konzentrischen Kugelschar vom Körper K so weit entfernt gewählt werden kann, daß es einen von ihm ausgehenden Halbstrahl gibt, der den Körper nicht trifft. Dann besteht keine der konzentrischen Kugeloberflächen nur aus Punkten des Körpers, und die Anzahl m wird daher gleich eins. Im Euklidischen Fall sind ferner die Funktionen $\sigma(u)$ und $\tau(u)$ gleich eins zu setzen; im hyperbolischen Fall ist der Mittelpunkt der konzentrischen Kugelschar zum Mittelpunkt der das Modell umschließenden Einheitskugel § 6 (9), (10), der sogenannten absoluten Kugel, zu wählen, und es ist entsprechend der dem Innern derselben aufgeprägten Maßbestimmung bei der Heranziehung des zweiten Abrundungstheorems

$$\sigma(u) = \left(\frac{2}{1-u^2}\right)^{n-1}, \quad \tau(u) = \left(\frac{2}{1-u^2}\right)^{n}$$

zu setzen.

§ 9.

Weitere Anwendungen der Abrundung.

Diejenige Voraussetzung der Abrundungstheoreme, welche die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in einem Euklidischen, hyperbolischen oder sphärischen Raum mit einer um eins geringeren Dimensionenzahl postuliert, entfällt, da nunmehr diese Eigenschaft in allen drei Geometrien für jede Dimensionenzahl bewiesen ist, als überflüssig, und die beiden Abrundungstheoreme bieten sich als eine unbedingte und fruchtbare Einsicht dar. Als unmittelbare Anwendung ergibt sich durch Wiederholung der Schlußweise der Paragraphen 6 und 8 der folgende in allen drei Geometrien bei jeder Dimensionenzahl geltende Satz:

Man schneide im Euklidischen, hyperbolischen oder sphärischen Raum von n Dimensionen einen regulären Körper K mit einer Schar von Abstandsflächen einer Ebene, von konzentrischen Kugeln, oder im hyperbolischen Fall auch noch mit einer Schar von äquidistanten Orizykelflächen. Dabei sei die Schar so gewählt, daß auf den Randmannigfaltigkeiten des Körpers nicht unendlich viele Punkte vorhanden sind, in welchen eine Berührung mit einer Fläche der Schar stattfindet. Auf jeder der Flächen besteht eine $(n-1)$-dimensionale Maßbestimmung von ebenfalls konstantem Krümmungsmaße, und zwar ist sie auf den Abstandsflächen Euklidisch, hyperbolisch oder sphärisch je nachdem, ob das für den n-dimensionalen Raum gilt, auf den konzentrischen Kugeln sphärisch und auf den Orizykelflächen Euklidisch. Man konstruiere nun einen Körper K' nach der folgenden Vorschrift. Der Durchschnitt von K' mit jeder Fläche der Schar bestehe aus einer $(n-1)$-dimensionalen Vollkugel, deren Volumen gleich dem $(n-1)$-dimensionalen Volumen des Durchschnitts der Fläche mit dem Körper K ist, und deren Mittelpunkt im Schnittpunkt der Fläche mit einer der zu allen Flächen der Schar senkrechten Geraden fixiert sei.

Dann ist K' ein Rotationskörper, der im Vergleich mit K bei gleichem Volumen eine nicht größere Oberfläche aufweist — und zwar sind die Oberflächen im Falle des Schnitts mit Abstandsflächen im Euklidischen und hyperbolischen Raum oder mit Orizykelflächen in der hyperbolischen Geometrie dann und nur dann gleich, wenn die beiden Körper kongruent sind. Im Falle des Schnittes mit konzentrischen Kugeln besteht dagegen die Gleichheit dann und nur dann, wenn die beiden Körper dadurch zur Deckung gebracht werden können, daß den bei der Formulierung des zweiten Abrundungstheorems angegebenen m konzentrischen nicht ineinandergreifenden Kugelschichten um den gemeinsamen Mittelpunkt passende Drehungen erteilt werden. Dasselbe gilt natürlich in der sphärischen Geometrie auch für den Schnitt mit den Abstandsflächen einer Ebene, indem diese Flächen mit den konzentrischen Kugeln um die beiden Pole der Ebene identisch sind.

Dabei sind die durch die Voraussetzung hinsichtlich der Berührung mit den Randmannigfaltigkeiten von K ausgeschlossenen Flächenscharen als Ausnahmen zu betrachten — und zwar in der folgenden quantitativen Präzisierung: Die Gesamtheit der Mittelpunkte der ausgeschlossenen Scharen konzentrischer Kugeln besitzt den äußeren Inhalt Null. Dasselbe gilt von dem auf der absoluten Einheitskugel gemessenen äußeren Inhalt der Gesamtheit der absoluten Punkte der ausgeschlossenen Scharen äquidistanter Orizykelflächen und im Raum der Ebenenkoordinaten von dem äußeren Inhalt der Gesamtheit derjenigen Punkte, welche Ebenen entsprechen, deren Abstandsflächenschar ausgeschlossen ist.

Der eben auseinandergesetzte Abrundungssatz in Verbindung mit den von mir für Rotationskörper aufgestellten Verschärfungen der isoperi-

metrischen Abschätzung, insbesondere mit der sogenannten linearen isoperimetrischen Ungleichung [13]) führt zu den entsprechenden isoperimetrischen Verschärfungen und linearen Ungleichungen für beliebige reguläre Körper, auf die an dieser Stelle näher einzugehen der Rahmen verbietet, welcher der vorliegenden Arbeit gesteckt ist.

Es ist mir nicht gelungen, in der hyperbolischen und sphärischen Geometrie das Abrundungsverfahren auf die Schar der zu einer Geraden senkrechten Ebenen auszudehnen. Das liegt daran, daß diese Schar nicht äquidistant ist. Der Erfolg des Abrundungsverfahrens stützt sich eben wesentlich darauf, daß einerseits die auf jeder einzelnen Fläche herrschende Maßbestimmung konstantes Krümmungsmaß besitzt, während andererseits die Schar äquidistant ist. Dieser Umstand bringt in die Übertragung der feineren Struktur des isoperimetrischen Sachverhalts, also insbesondere auch der linearen Ungleichung von Rotationskörpern auf beliebige reguläre Körper, eine gewisse Friktion. Denn bei der Betrachtung von Rotationskörpern bietet der Schnitt mit der Ebenenschar senkrecht zur Rotationsachse die einfachsten Verhältnisse, indem dieser Schar vor den anderen der Vorzug innewohnt, bei einer Verschiebung längs der Rotationsachse in sich selbst überzugehen. In der Sprache der Variationsrechnung läßt sich das auch so ausdrücken: Das durch die Ebenenschar senkrecht zur Rotationsachse an die Hand gegebene Koordinatensystem ist der infinitesimalen Transformation angepaßt, welche von dem zweidimensionalen Variationsproblem zugelassen wird, auf das die isoperimetrische Aufgabe für Rotationskörper führt.

Wie in der Folge zur Ausführung gelangen wird, reichen die in der vorliegenden Arbeit gewonnenen Ergebnisse aus, um in einfacher Weise auch den Brunn-Minkowskischen Satz auf die nichteuklidische Geometrie zu übertragen — und zwar in der folgenden Gestalt:

Es sei im n-dimensionalen Euklidischen, hyperbolischen oder sphärischen Raum K eine abgeschlossene beschränkte Punktmenge und K_h die sie umhüllende Menge derjenigen Punkte, deren Entfernung von K h nicht übersteigt. Das Maß von K sei $m(K)$ und das von K_h $m(K_h)$. Wie oben bezeichne ferner in der betrachteten Geometrie $V^*(r)$ das Volumen der Kugel mit dem Radius r. Es sei endlich ϱ der Radius der mit K maßgleichen Kugel, d. h. also definiert durch die Gleichung

$$V^*(\varrho) = m(K). \tag{1}$$

Dann gilt

$$m(K_h) \geqq V^*(\varrho + h), \tag{2}$$

wobei das Gleichheitszeichen der Kugel vorbehalten bleibt.

[13]) l. c.[1] § 11; l. c.[3] § 1.

(Eingegangen am 22. Juli 1942.)

Über die Ableitungen biharmonischer Funktionen am Rande.

Von

K. Schröder in Berlin.

Das Randverhalten der Ableitungen räumlicher Potentialfunktionen, die durch ihre Randwerte definiert sind, wurde in einer neueren interessanten Arbeit von O. D. Kellog[1]) eingehend untersucht.

Sowohl für die allgemeine Theorie der Randwertaufgaben der Differentialgleichung $\Delta\Delta U = 0$ als auch für die Anwendungen, besonders in der Elastizitätstheorie, ist es wichtig[2]), entsprechende Sätze auch im biharmonischen Fall zu haben. Es zeigt sich, daß die Kellogschen Sätze sich hier bei entsprechender Modifikation der Aussagen und Beweise übertragen lassen.

§ 1.

Formulierung des Satzes.

Wir formulieren zunächst die Voraussetzungen des Problems, und zwar gleich in der Allgemeinheit und unter Benutzung der Bezeichnungen, wie man sie auch bei Kellog findet.

Unter einem regulären Oberflächenelement E werde zunächst bei Zugrundelegung eines rechtwinklig kartesischen Bezugsystems eine räumliche Punktmenge von Punkten (x, y, z) verstanden, für deren z-Koordinate bei geeigneter Orientierung der Koordinatenachsen

$$z = \varphi(x, y)$$

gilt, wobei $\varphi(x, y)$ eindeutig ist und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung in einem ebenen Gebiet G der x, y-Ebene besitzt, das von einer endlichen Anzahl von aneinanderschließenden durch eine einmal stetig differenzierbare Parameterdarstellung gegebenen doppelpunktfreien Kurvenbogen begrenzt wird.

---

[1]) O. D. Kellog, On the derivations of harmonic functions on the boundary. Transactions of the American math. soc. **33** (1931), S. 486–510. Im folgenden als H zitiert.

[2]) Vgl. die Anwendungen im zweiten Teil der in den Math. Annalen erscheinenden Arbeit des Verf.: Das Problem der eingespannten rechteckigen elastischen Platte.

Voraussetzung A_n ($n \geqq 2$). *R sei ein beschränktes, offenes Kontinuum, dessen Rand S ein reguläres Oberflächenelement E mit den folgenden Eigenschaften enthalte.*

(a) *Der Winkel, den zwei Normalen von E miteinander einschließen, sei stets kleiner als 60^0* [3]).

(b) *In einem Koordinatensystem, dessen Achsen in einem beliebigen Punkte p von E tangential bzw. normal zu E seien, lasse sich E durch eine Funktion*

$$z = \varphi(x, y)$$

darstellen, die eindeutig ist und stetige partielle Ableitungen n-ter Ordnung hinsichtlich x und y besitzt, die außerdem so beschaffen sind, daß für irgendeine dieser n-ten Ableitungen $D^n \varphi$ gilt:

$$|D^n \varphi(q) - D^n \varphi(p)| \leqq D(t).$$

Hierbei sei t die Projektion von $\overline{pq}$ auf die Tangentialebene in p, und $D(t)$ eine niemals abnehmende, von p und der Richtung von $\overline{pq}$ unabhängige Funktion, die so beschaffen ist, daß das Integral

$$\int_0^\eta \frac{D(t)}{t}\, dt \qquad (0 < \eta)$$

konvergiert.

(c) *Zu jedem regulären Oberflächenelement E', das im Innern von E enthalten ist* [4]), *gebe es eine positive Zahl a_1, derart, daß eine Kugel mit dem Radius a_1 um irgendeinen Punkt von E' von S nur Punkte enthält, die gleichzeitig E angehören* [5]).

(d) *Im Falle $n = 2$, der bei unserem Beweise eine Sonderstellung einnimmt, sei insbesondere $D(t)$ im Sinne einer* HÖLDER*-Bedingung auf*

$$D(t) = A t^\lambda \qquad (0 < \lambda < 1) \tag{1}$$

mit von p und der Richtung von $\overline{pq}$ unabhängigen Konstanten A und λ spezialisiert, es sei denn, daß R ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet ist, für das sämtliche Punkte p der Berandung S in regulären, den Voraussetzungen (a), (b), (c) *genügenden Oberflächenelementen enthalten sind.*

N. B. 1) Man kann zeigen, daß sich ein reguläres Oberflächenelement, das lediglich neben der Bedingung $A_n(c)$ der Bedingung $A_n(b)$ und $A_n(d)$ in einem bestimmten Koordinatensystem genügt, in eine endliche Zahl von regulären Elementen zerlegen läßt, für die einzeln die Bedingungen $A_n(a)$,

---

[3]) Diese Voraussetzung, die wir beim Beweise des Hilfssatzes in § 2, Punkt 2 benötigen, fehlt bei KELLOG. Dort wird dieser Hilfssatz ohne Beweis angegeben.

[4]) Versteht man unter dem Rand von E die Menge der Bildpunkte des Randes von G, so soll also E' keinen Randpunkt von E enthalten.

[5]) Diese Bedingung soll mehrfache Randpunkte ausschließen.

(*b*), (*c*) in der oben angegebenen Gestalt erfüllt sind, wobei die Zerlegung derart eingerichtet werden kann, daß ein beliebig vorgeschriebener Punkt p aus dem Innern des Ausgangselementes auch dem Innern eines Teilelementes angehört[6]).

2) Die unter (b) formulierte Bedingung für die n-ten partiellen Ableitungen von φ, die vom Typ einer DINI-Bedingung ist, läßt sich bei dem zu beweisenden Satz auch durch eine etwas allgemeinere Voraussetzung ersetzen, die schon in einer Arbeit von M. SULLIVAN[7]) benutzt wurde.

Dazu führen wir zunächst folgende Definition ein. Eine auf E definierte in p stetige Funktion $f(p)$ genügt in p gleichmäßig einer DINI-Bedingung, falls das Integral

$$\int_0^a \frac{|f(q)-f(p)|}{r}\,dr \qquad (r = \overline{pq}),$$

bei dem q auf E in einer die Flächennormale in p enthaltenden Ebene variieren soll, gleichmäßig hinsichtlich dieser Normalebene konvergiert. Die Funktion $f(p)$ genügt auf E gleichmäßig einer DINI-Bedingung, falls dieses Integral gleichmäßig in bezug auf p und die entsprechende Normalebene konvergiert.

Es genügt dann, von den Ableitungen $D^n\varphi$ und $D^{n-1}[DU]_{z=\varphi}$ zu verlangen, daß sie gleichmäßig auf E einer DINI-Bedingung genügen.

Voraussetzung B_n($n \geqq 2$). *Die Funktion $U = U(x, y, z)$ sei in R eindeutig und biharmonisch, d. h. sie genüge dort der Gleichung*

$$\Delta\Delta U = 0.$$

In $R + S$ sei sie mit ihren ersten partiellen Ableitungen stetig. Sind die Koordinatenachsen wieder in einem Punkte p tangential und normal zu E gewählt, so sollen die Randwerte der ersten Ableitungen

$$\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]_{z=\varphi(x,y)},\ \left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_{z=\varphi(x,y)},\ \left[\frac{\partial U}{\partial z}\right]_{z=\varphi(x,y)}$$

eindeutig sein und stetige partielle Ableitungen $(n-1)$-ter Ordnung nach x und y besitzen, die außerdem so beschaffen sind, daß für einen zweiten Punkt q von E und für irgendeine dieser Ableitungen

$$|D^{n-1}[DU]_{z=\varphi(q)} - D^{n-1}[DU]_{z=\varphi(p)}| \leqq D(t)$$

gilt.

N. B. Aus der letzten Beziehung folgt übrigens

$$|D^n[U]_{z=\varphi(q)} - D^n[U]_{z=\varphi(p)}| \leqq D(t),$$

---

[6]) Bei dem Beweise benutze man die in KELLOG, Foundations of potential theory (Berlin 1929) auf S. 101 bzw. 108 angegebenen Sätze IV und VII.

[7]) M. SULLIVAN, On the derivatives of Newtonian and logarithmic potentials near the acting masses. Transactions of the American math. Soc. **34** (1932), S. 137–171.

denn es wird z. B.

$$D^n[U]_{z=\varphi} = D^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}[U]_{z=\varphi}\right) = D^{n-1}\left(\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]_{z=\varphi} + \left[\frac{\partial U}{\partial z}\right]_{z=\varphi}\varphi_x\right),$$

so daß sich bei Beachtung von A_n ergibt:

$$\begin{aligned}\left|D^n[U]_{z=\varphi(q)} - D^n[U]_{z=\varphi(p)}\right| &\leqq \left|D^{n-1}\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]_{z=\varphi(q)} - D^{n-1}\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]_{z=\varphi(p)}\right| + \\ &+ \left|D_{n-1}\left[\frac{\partial U}{\partial z}\right]_{z=\varphi(q)} - D^{n-1}\left[\frac{\partial U}{\partial z}\right]_{z=\varphi(p)}\right| \cdot \left|\varphi_x(q)\right| + \\ &+ \left|D^{n-1}\left[\frac{\partial U}{\partial z}\right]_{z=\varphi(p)}\right| \cdot \left|\varphi_x(q) - \varphi_x(p)\right| \leqq D(t).\end{aligned}$$

Unter diesen Voraussetzungen werde im folgenden in mehreren Schritten der Satz bewiesen: *Genügt R der Bedingung A_n, U der Bedingung B_n und ist P ein Punkt von R auf der Normalen in einem inneren Punkte p von E', so konvergiert jede partielle Ableitung n-ter Ordnung von U nach x, y und z gegen einen bestimmten Grenzwert, wenn P längs der Normalen gegen p rückt. Definiert man als Wert der Ableitung in p diesen Grenzwert, so ist die Ableitung in E' bei beliebiger Annäherung eine stetige Funktion.*

Bei dem Beweise dieses Satzes gehen wir nur auf die Punkte ausführlich ein, die den biharmonischen von dem harmonischen Fall unterscheiden. Für manche Einzelheit wird auf die bereits zitierte Arbeit von Kellog verwiesen werden. Einige Bemerkungen bei unserer Beweisführung lassen sich auch im harmonischen Fall verwerten und werden, wie wir glauben, das Verständnis der Kellogschen Arbeit in einigen Punkten erleichtern. An einer Stelle der Beweisführung wird in wesentlicher Weise ein Ergebnis einer vorangegangenen Arbeit des Verfassers [8]) herangezogen.

Das Randverhalten der Ableitungen bei Annäherung an einen Punkt p von E' wird untersucht werden, indem eine ganz in R gelegene Kugel σ gewählt wird, die S in p berührt, und indem man zur Darstellung von $U(x, y, z)$ für Punkte aus dem Innern dieser Kugel, die explizit bekannte Lösung der biharmonischen Randwertaufgabe für die Kugel heranzieht. Um das im einzelnen durchzuführen, bedarf es einer Reihe von Vorbetrachtungen.

§ 2.

Die Wahl der Kugel σ.

1. Bezeichnet man mit ϱ die Entfernung des Randes der Projektion von E' auf die Tangentialebene in p vom Rande der Projektion von E, so muß a_1 (vgl. die Voraussetzung $A_n(c)$) offenbar kleiner als ϱ sein, denn

[8]) K. Schröder, Zur Theorie der Randwertaufgaben der Differentialgleichung $\Delta\Delta U = 0$. Math. Zeitschr. **48** (1943), S. 553–675.

sonst gäbe es sicher eine Kugel vom Radius a_1 um einen Punkt von E', die Punkte von S enthielte, welche nicht zu E gehören.

2. Bezeichnet nun a_2 die untere Grenze der Krümmungsradien aller Normalschnitte von E[9]), so wähle man eine Zahl a gemäß der Bedingung

$$a = \text{Min}\left(\frac{a_1}{8}, \frac{a_2}{2}\right). \tag{2}$$

Dann gilt erstens. daß eine Kugel vom Radius $4a$ um irgendeinen Punkt aus E' nur Punkte von S enthält, die auch E angehören, und zweitens, daß die Kugel σ vom Radius a, die E von innen her in einem beliebigen Punkt p von E' berührt, mit Ausnahme des Punktes p ganz dem Inneren von R angehört.

Zum Beweise der letzteren Tatsache bemerken wir zunächst, daß die Kugel σ von S nur Punkte enthalten kann, die auch zu E gehören, weil sie ganz in der Kugel vom Radius $\frac{a_1}{4}$ um den Punkt p enthalten ist. Nehmen wir nun im Gegensatz zur Behauptung an, sie enthielte von E noch andere Punkte als den Berührungspunkt.

Als x, y-Ebene wähle man die Tangentialebene im Punkte p. Es sei P ein von p verschiedener gemeinsamer Punkt von σ und E. Die x-Achse werde so gewählt, daß sie die Projektion von $\overline{pP}$ auf die x, y-Ebene enthält. Der Punkt P habe die x-Koordinate x_0. Die x, z-Ebene schneide E bzw. σ in C bzw. K.

Versteht man nun unter $\alpha(x)$ bzw. $\alpha_K(x)$ die Winkel, die die Tangenten an C bzw. K mit der positiven x-Achse bilden, so muß es in $0 \leqq x \leqq x_0$ sicherlich x-Werte geben, für die

$$\alpha(x) > \alpha_K(x)$$

ist, falls nicht dauernd $\alpha(x) = \alpha_K(x)$ ist. Die untere Grenze dieser x-Werte sei mit x_1 bezeichnet, so daß

$$\alpha(x_1) = \alpha_K(x_1)$$

ist. Falls aber in $0 \leqq x \leqq x_0$ immer $\alpha(x) = \alpha_K(x)$ ist, so setze man $x_1 = 0$.

Versteht man unter K_1 den Kreis vom Radius a, der C im Punkte $P_1 = (x_1, z(x_1))$ berührt, so liegt die Kurve C für $x > x_1$, falls $x - x_1$ hinreichend klein ist, entweder K_1 an oder sie durchsetzt diesen Kreis. Ist nun t die Bogenlänge auf C und K_1, und besitzt C in einem ξ, η-Koordinatensystem, das in P_1 die Tangential-Normallage hat, die Gleichung

$$\eta = \gamma(\xi),$$

so sind die zu derselben Abszisse

$$\xi = a \sin\left(\frac{t}{a}\right)$$

---

[9]) Auf Grund von $A_n (n \geqq 2)$ ist $a_2 > 0$.

gehörenden η-Ordinaten durch

$$\gamma\left(a\sin\left(\frac{t}{a}\right)\right) \quad \text{bzw.} \quad a\left(1-\cos\left(\frac{t}{a}\right)\right)$$

gegeben. Für alle hinreichend kleinen positiven t gilt also

$$\gamma\left(a\sin\left(\frac{t}{a}\right)\right) - a\left(1-\cos\left(\frac{t}{a}\right)\right) \geqq 0.$$

Aus

$$\gamma\left(a\sin\left(\frac{t}{a}\right)\right) = \frac{1}{2}\frac{d^2\gamma(\xi^*)}{d\xi^2}\left[a\sin\left(\frac{t}{a}\right)\right]^2$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d^2\gamma(\xi^*)}{d\xi^2}\left[t - \frac{t^3}{3!\,a^3} + \cdots\right]^2,$$

wobei ξ^* ein geeigneter Zwischenwert ist, und aus

$$a\left(1-\cos\left(\frac{t}{a}\right)\right) = \frac{t^2}{2a} - \frac{t^4}{4!\,a^3} + \cdots$$

folgt dann aber für die Krümmung $\varkappa$ von C in P_1

$$\varkappa = \frac{d^2\gamma(0)}{d\xi^2} \geqq \frac{1}{a} \geqq \frac{2}{a_2},$$

da $\frac{d\gamma(0)}{d\xi} = 0$ ist.

Bezeichnet man mit β den Winkel, den die Flächennormalen in p und P_1 miteinander einschließen — nach $A_n(a)$ ist $\cos\beta > \frac{1}{2}$ —, so liefert die Formel von Meusnier für die Krümmung $\varkappa_n$ des ebenen Normalschnittes von E in P_1, dessen Ebene die ξ-Achse enthält:

$$\varkappa_n = \varkappa\cos\beta \geqq \frac{2\cos\beta}{a_2} > \frac{1}{a_2}.$$

Die daraus resultierende Ungleichung

$$\frac{1}{\varkappa_n} < a_2$$

widerspricht aber der Bedeutung von a_2.

§ 3.

Die biharmonische Randwertaufgabe für die Kugel.

1. Es seien allgemein eine Kugel σ vom Radius a und auf ihrer Oberfläche O zwei eindeutige Funktionen

$$f(a, \varphi, \vartheta) \quad \text{und} \quad g(a, \varphi, \vartheta) \qquad (\varrho, \varphi, \vartheta\text{-Polarkoordinaten})$$

gegeben, wobei g stetig und f einmal nach φ und ϑ stetig differenzierbar sei. Wir behaupten, daß es dann genau eine im Innern von σ biharmonische Funktion $U(\varrho, \varphi, \vartheta)$ gibt, für die bei Annäherung an einen Punkt von O:

$$P = (\varrho, \varphi, \vartheta) \to P_0 = (a, \varphi_0, \vartheta_0) \qquad (\varrho < a)$$

die Limesrelationen

$$\lim_{P \to P_0} U(P) = f(P_0) \tag{3}$$

und

$$\lim_{P \to P_0} \frac{\partial U(P)}{\partial \varrho} = g(P_0) \tag{4}$$

gelten, und die explizit durch

$$\begin{aligned} U(P) &= (\varrho^2 - a^2)\frac{1}{2a}\frac{a^2-\varrho^2}{4\pi a}\iint_{(O)}\frac{g(P')}{r^3}\,dO - \\ &\quad - (\varrho^2 - a^2)\frac{1}{2a}\frac{\varrho}{a}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left[\frac{a^2-\varrho^2}{4\pi a}\iint_{(O)}\frac{f(P')}{r^3}\,dO\right] + \\ &\quad + \frac{a^2-\varrho^2}{4\pi a}\iint_{(O)}\frac{f(P')}{r^3}\,dO \\ &= (\varrho^2 - a^2)\frac{1}{2a}\frac{a(a^2-\varrho^2)}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(P')}{r^3}\sin\vartheta'\,d\varphi'\,d\vartheta' - \\ &\quad - (\varrho^2 - a^2)\frac{1}{2a}\frac{\varrho}{a}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left[\frac{a(a^2-\varrho^2)}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(P')}{r^3}\sin\vartheta'\,d\varphi'\,d\vartheta'\right] + \\ &\quad + \frac{a(a^2-\varrho^2)}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(P')}{r^3}\sin\vartheta'\,d\varphi'\,d\vartheta' \\ &= \frac{(a^2-\varrho^2)^2}{8\pi a}\left\{-a\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(P')}{r^3}\sin\vartheta'\,d\varphi'\,d\vartheta' + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(P')}{r^3}(2a^2 - \varrho^2 - a\varrho\cos\alpha)\sin\vartheta'\,d\varphi'\,d\vartheta'\right. \end{aligned} \tag{5}$$

gegeben wird, wobei

$$P' = (a, \varphi', \vartheta'),$$

$$r = \sqrt{a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho\cos\alpha}$$

und

$$\cos\alpha = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi - \varphi')$$

ist[10]).

---

[10]) Eine heuristische Betrachtung, die auf diese Gestalt von $U(P)$ führt, kann dem Buch FRANK-MISES, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik I, 2. Aufl., 1930, S. 850 entnommen werden, wo allerdings nur die Lösung des ebenen Problems für den Kreis angegeben wird.

2. Es soll zunächst gezeigt werden, daß der angegebene Ausdruck die Randwertaufgabe löst. Durch direkte Rechnung kann man sich davon überzeugen, daß der rechts stehende Ausdruck in (5) im Innern von σ biharmonisch ist, da dort mit V auch die Funktion $\varrho \frac{\partial V}{\partial \varrho}$ harmonisch und die Funktion $(a^2 - \varrho^2)V$ biharmonisch ist.

Zum Beweise von (3) ist bei unseren Annahmen über f und g auf Grund des bekannten Randverhaltens des räumlichen Poissonschen Integrals nur zu zeigen, daß

$$\lim_{P \to P_0} \left[(a^2 - \varrho^2) \frac{\partial}{\partial \varrho} \left\{ \frac{a^2 - \varrho^2}{4\pi a} \iint_{(O)} \frac{f(P')}{r^3} \, dO \right\} \right] = 0 \tag{6}$$

sein muß. Der Ausdruck unter dem Limeszeichen ist nun gleich

$$(a^2 - \varrho^2) \frac{\partial}{\partial \varrho} \left\{ \frac{a^2 - \varrho^2}{4\pi a} \iint_{(O)} \frac{f(P') - f(P_0)}{r^3} \, dO + f(P_0) \right\}$$

$$= (a^2 - \varrho^2) \frac{\partial}{\partial \varrho} \left\{ \frac{a^2 - \varrho^2}{4\pi a} \iint_{(O)} \frac{f(P') - f(P_0)}{r^3} \, dO \right\}.$$

Setzt man

$$h = \frac{a^2 - \varrho^2}{r^3},$$

so gilt allgemein nach Kellog[11]) für eine beliebige n-te Ableitung nach x, y und z

$$D^n h \leqq \frac{K}{r^{n+2}}, \tag{7}$$

wobei die Konstante K nur von a, nicht aber von ϱ abhängt. Da also

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}(h) \leqq \frac{K}{r^3},$$

so ist der letzte Ausdruck absolut genommen kleiner oder gleich

$$K(a^2 - \varrho^2) \iint_{(O)} \frac{|f(P') - f(P_0)|}{r^3} \, dO$$

Daß dieser Ausdruck aber für $P \to P_0$ gegen Null geht, erkennt man in bekannter Schlußweise folgendermaßen. Wegen $P \to P_0$ kann man annehmen, daß P im Innern einer Kugel vom Radius $\frac{\delta}{2}$ um P_0 liegt, wobei δ so klein gewählt sei, daß bei einer beliebig gegebenen Zahl $\varepsilon > 0$

$$|f(P') - f(P_0)| < \frac{\varepsilon}{8\pi a K}$$

[11]) Vgl. H, S. 497.

für alle P' der Teilmenge O_δ von O gilt, für die

$$\overline{P'P_0} \leqq \delta$$

ist. Also hat man

$$K(a^2-\varrho^2)\iint\limits_{(O_\delta)} \frac{|f(P')-f(P_0)|}{r^3}\,dO < \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{a^2-\varrho^2}{4\pi a}\iint\limits_{(O)}\frac{dO}{r^3} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da weiter mit $|f(P')| \leqq M$ auf O:

$$K(a^2-\varrho^2)\iint\limits_{(O-O_\delta)}\frac{|f(P')-f(P_0)}{r^3}\,dO \leqq \frac{2MK(a^2-\varrho^2)}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^3}$$

gilt, so kann der rechts stehende Ausdruck, indem man $a-\varrho$ hinreichend klein wählt, ebenfalls kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ gemacht werden, womit (6) bewiesen ist.

Zum Beweise von (4) genügt es nach der eben gemachten Bemerkung nachzuweisen, daß

$$\lim_{P\to P_0}\left[(a^2-\varrho^2)\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2}\left\{\frac{a^2-\varrho^2}{4\pi a}\iint\limits_{(O)}\frac{f(P')}{r^3}\,dO\right\}\right] = 0 \tag{8}$$

ist.

Dazu führe man zunächst ein rechtwinklig kartesisches Bezugssystem x, y, z mit dem Ursprung im Punkte P_0 ein, dessen positive z-Achse mit der äußeren Normalen im Punkte P_0 der Kugeloberfläche zusammenfällt, während die x, y-Ebene mit der Tangentialebene in P_0 identisch ist. In einer gewissen Umgebung von P_0 werden dann die Punkte auf der Kugeloberfläche eindeutige, stetige und stetig differenzierbare Funktionen von x und y. Substituiert man daher in $f(a, \varphi, \vartheta)$ für φ und ϑ die Koordinaten x und y, so erhält man in dieser Umgebung von P_0 eine eindeutige Funktion $f(x, y)$, für die $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetig sind.

Die Funktion

$$H(x, y, z) = A + Bx + Cy$$

mit

$$A = f(P_0),\quad B = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x},\quad C = \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}$$

stellt nun eine im ganzen Raum harmonische Funktion dar, die sich für Werte aus dem Innern von σ mit Hilfe des Poissonschen Integrals in der Form

$$H = \frac{a^2-\varrho^2}{4\pi a}\iint\limits_{(O)}\frac{H(P')}{r^3}\,dO$$

darstellen läßt.

Damit kann man für den Ausdruck unter dem Limeszeichen in (8) schreiben:

$$(a^2-\varrho^2)\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2}\left\{\frac{a^2-\varrho^2}{4\pi a}\iint\limits_{(O)}\frac{f(P')-H(P')}{r^3}\,dO+H(P)\right\}$$

$$=(a^2-\varrho^2)\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2}\left\{\frac{a^2-\varrho^2}{4\pi a}\iint\limits_{(O)}\frac{f(P')-H(P')}{r^3}\,dO\right\}.$$

Da nach (7)

$$\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2}(h)\leqq\frac{K}{r^4},$$

ist, so erkennt man, daß

$$\left|(a^2-\varrho^2)\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2}\left\{\frac{a^2-\varrho^2}{4\pi a}\iint\limits_{(O)}\frac{f(P')-H(P')}{r^3}\,dO\right\}\right|$$

$$\leqq K(a^2-\varrho^2)\iint\limits_{(O)}\frac{|f(P')-H(P')|}{r^4}\,dO$$

sein muß.

Wir wollen nun zunächst annehmen, daß der Punkt P auf der z-Achse im Innern einer Kugel vom Radius $\frac{\delta_1}{2}$ um P_0 liegt, wobei δ_1 so klein gewählt sei, daß erstens

$$\delta_1<\sqrt{2}\,a$$

und daß zweitens bei einem beliebig vorgeschriebenen $\varepsilon>0$ gleichmäßig in bezug auf alle P_0 auf O

$$|Df(P')-Df(P_0)|<\frac{\varepsilon}{16\sqrt{2}\,\pi\,\alpha\,K}$$

für alle P' der Teilmenge O_{δ_1} von O gilt, für die

$$\overline{P'P_0}\leqq\delta_1$$

ist. Hier soll Df eine der beiden Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ oder $\frac{\partial f}{\partial y}$ sein. Eine solche Wahl von δ_1 ist wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der Df auf O möglich.

Da nun aber für die Punkte P' von O_{δ_1}

$$f(P')-H(P')=\left\{\frac{\partial f(P'')}{\partial x}-\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\right\}x'+\left\{\frac{\partial f(P'')}{\partial y}-\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\right\}y'$$

gilt, wo auch P'' auf O_{δ_1} liegt, und da dabei

$$|x'|,|y'|\leqq\overline{P'P_0}$$

und

$$\frac{\overline{P'P_0}}{r}=\frac{\overline{P'P_0}}{\overline{PP'}}\leqq\frac{\overline{P'P_0}}{\overline{P'Q}}\leqq\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$$

ist, wenn Q der Fußpunkt des Lotes von P' auf die z-Achse ist, so erhält man

$$K(a^2-\varrho^2)\iint\limits_{(O_{\delta_1})}\frac{|f(P')-H(P')|}{r^4}\,dO<$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{a^2-\varrho^2}{4\pi a}\iint\limits_{(O)}\frac{dO}{r^3}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Weiter hat man

$$K(a^2-\varrho^2)\iint\limits_{(O-O_{\delta_1})}\frac{|f(P')-H(P')|}{r^4}\,dO\leqq\frac{(M+N)\,K(a^2-\varrho^2)}{\left(\frac{\delta_1}{2}\right)^4},$$

wenn

$$|H(P')|\leqq N\quad\text{auf } O$$

gilt. Der in dieser Ungleichung auf der rechten Seite stehende Ausdruck kann aber ebenfalls kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ gemacht werden, wenn nur $a-\varrho$ hinreichend klein gewählt wird.

Damit ist also bewiesen, daß der Ausdruck unter dem Limeszeichen unabhängig von der Lage des Punktes P in σ absolut genommen beliebig klein gemacht werden kann, wenn nur $a-\varrho$, d. h. sein Abstand von O hinreichend klein ist. Es ist also (8) bewiesen, auch wenn P eine beliebige Punktfolge durchläuft, die gegen P_0 konvergiert.

3. Nunmehr soll bewiesen werden, daß (5) auch die einzige Lösung des Problems ist. Sei $U(\varrho,\,\varphi,\,\vartheta)$ eine beliebige Lösung und $U(\varrho_0,\,\varphi_0,\,\vartheta_0)$ $(\varrho_0<a)$ ein beliebiger Funktionswert in σ.

Bezeichnet dann ϱ_1 eine Zahl, für die $\varrho_0<\varrho_1<a$ ist, so muß sich jeder Funktionswert $U(\varrho,\,\varphi,\,\vartheta)$ mit $\varrho<\varrho_1$ und damit auch $U(\varrho_0,\,\varphi_0,\,\vartheta_0)$ in der Form

$$(9)\quad U(\varrho,\varphi,\vartheta)=(\varrho^2-\varrho_1^2)\,\frac{1}{2\varrho_1}\,\frac{\varrho_1(\varrho_1^2-\varrho^2)}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial U(\varrho_1,\varphi',\vartheta')}{\partial\varrho}\,\frac{\sin\vartheta'}{r^3}\,d\varphi'\,d\vartheta'-$$

$$-(\varrho^2-\varrho_1^2)\,\frac{1}{2\varrho_1}\,\frac{\varrho}{\varrho_1}\,\frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\frac{\varrho_1(\varrho_1^2-\varrho^2)}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{U(\varrho_1,\varphi',\vartheta')}{r^3}\sin\vartheta'\,d\varphi'\,d\vartheta'\right]+$$

$$+\frac{\varrho_1(\varrho_1^2-\varrho^2)}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{U(\varrho_1,\varphi',\vartheta')}{r^3}\sin\vartheta'\,d\varphi'\,d\vartheta'$$

darstellen lassen. Denn im Innern und auf dem Rande der Kugel σ_1 vom Radius ϱ_1 stellen U und auf Grund der Kellogschen Sätze über das Rand-

verhalten der Ableitungen harmonischer Funktionen auch die rechte Seite von (9) beliebig oftmals differenzierbare Funktionen dar, die im Innern von σ_1 biharmonisch sind und auf der Oberfläche von σ_1 dieselben Funktionswerte und dieselben Werte der Normalableitung besitzen. Die rechte und die linke Seite von (9) müssen dann aber identisch gleich sein; denn bezeichnet man ihre Differenz, die ebenfalls in σ_1 eine biharmonische Funktion darstellt, mit V, so erhält man auf Grund einer GREENschen Formel

$$\iiint_{(\sigma_1)} (\Delta V)^2 \, d\tau = \iint_{(O_1)} \left\{ \Delta V \frac{\partial V}{\partial \varrho} - V \frac{\partial (\Delta V)}{\partial \varrho} \right\} dO = 0,$$

so daß in σ_1

$$\Delta V \equiv 0$$

sein muß, während die Randwerte von V selbst verschwinden. Dann muß aber auf Grund eines bekannten Satzes über Potentialfunktionen — den man übrigens für die Kugel ebenfalls nach der hier geschilderten Methode beweisen könnte — V in σ_1 selbst identisch verschwinden.

Denkt man sich nun in (9) für ϱ, φ, ϑ bzw. ϱ_0, φ_0, ϑ_0 geschrieben, und läßt ϱ_1 gegen a konvergieren, so folgt, da

$$U(\varrho_1, \varphi', \vartheta') \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial U(\varrho_1, \varphi', \vartheta')}{\partial \varrho}$$

in $\sigma + O$ stetige Funktionen des Punktes $(\varrho_1, \varphi', \vartheta')$ sind, daß $U(\varrho_0, \varphi_0, \vartheta_0)$ notwendig durch die rechte Seite von (5) darstellbar sein muß und also eindeutig durch die Funktionen f und g bestimmt ist.

§ 4.

Abschätzung der zweiten Ableitungen im Mittelpunkt von σ.

Für die Werte einer beliebigen zweiten partiellen Ableitung des Ausdrucks (5) für U im Mittelpunkt der Kugel σ gilt die für das folgende benötigte Abschätzung

$$|D^2 U| \leqq \frac{K}{a^2} + \frac{L}{a}, \tag{10}$$

bei der die Konstanten K und L nur von dem Maximum der Randwerte $f(a, \varphi, \vartheta)$ bzw. $g(a, \varphi, \vartheta)$ auf O abhängen.

Zum Beweise von (10) bilden wir zunächst die zweite partielle Ableitung von (5) nach ϱ bei $\vartheta = 0$, also die zweite Ableitung längs der Polarachse, und setzen dann $\varrho = 0$.

Da für $0 \leqq \varrho < a$

$$\frac{\partial U(\varrho, \varphi, 0)}{\partial \varrho} = -\frac{\varrho(a^2-\varrho^2)}{2\pi a}\Big\{-a\int_0^\pi \frac{G(\vartheta')\sin\vartheta'}{(a^2+\varrho^2-2a\varrho\cos\vartheta')^{\frac{3}{2}}}\,d\vartheta' + \int_0^\pi \frac{F(\vartheta')\sin\vartheta'(2a^2-\varrho^2-a\varrho\cos\vartheta')}{(a^2+\varrho^2-2a\varrho\cos\vartheta')^{\frac{5}{2}}}\,d\vartheta'\Big\} + \frac{(a^2-\varrho^2)^2}{8\pi a}\Big\{3a\int_0^\pi \frac{G(\vartheta')\sin\vartheta'(\varrho-a\cos\vartheta')}{(a^2+\varrho^2-2a\varrho\cos\vartheta')^{\frac{5}{2}}}\,d\vartheta' - 5\int_0^\pi \frac{F(\vartheta')\sin\vartheta'(2a^2-\varrho^2-a\varrho\cos\vartheta')(\varrho-a\cos\vartheta')}{(a^2+\varrho^2-2a\varrho\cos\vartheta')^{\frac{7}{2}}}\,d\vartheta' - \int_0^\pi \frac{F(\vartheta')\sin\vartheta'(2\varrho+a\cos\vartheta')}{(a^2+\varrho^2-2a\varrho\cos\vartheta')^{\frac{5}{2}}}\,d\vartheta'\Big\}$$

ist, wobei

$$F(\vartheta') = \int_0^{2\pi} f(a, \varphi', \vartheta')\,d\varphi' \quad \text{und} \quad G(\vartheta') = \int_0^{2\pi} g(a, \varphi', \vartheta')\,d\varphi'$$

gesetzt ist, so wird

$$\frac{\partial^3 U(0, \varphi, 0)}{\partial \varrho^3} = \frac{7}{8\pi}\int_0^\pi G(\vartheta')\sin\vartheta'\,d\vartheta'\cdot\frac{1}{a} - \frac{15}{8\pi}\int_0^\pi G(\vartheta')\sin\vartheta'\cos^2\vartheta'\,d\vartheta'\cdot\frac{1}{a} - \frac{5}{2\pi}\int_0^\pi F(\vartheta')\sin\vartheta'\,d\vartheta'\cdot\frac{1}{a^2} + \frac{35}{4\pi}\int_0^\pi F(\vartheta')\sin\vartheta'\cos^2\vartheta'\,d\vartheta'\cdot\frac{1}{a^2},$$

so daß für diese Ableitung die behauptete Abschätzung (10) bewiesen ist.

Um entsprechend (10) für eine gemischte zweite partielle Ableitung zu beweisen, genügt es, die Ableitung

$$\Big(\frac{\partial}{\partial\varrho}\Big[\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial U(\varrho, \varphi, \vartheta)}{\partial\vartheta}\Big]_{\vartheta=0}\Big)_{\varrho=0}$$

zu betrachten. Bildet man die Ableitung $\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial U(\varrho, \varphi, \vartheta)}{\partial\vartheta}$ in der Meridianebene $\varphi = 0$, so erhält man nach (5) für $\vartheta = 0$:

$$\Big[\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\Big]_{\vartheta=0} = \frac{(a^2-\varrho^2)^2}{8\pi}\Big\{-3a\int_0^\pi \frac{G_1(\vartheta')\sin^2\vartheta'}{(a^2+\varrho^2-2a\varrho\cos\vartheta')^{\frac{5}{2}}}\,d\vartheta' + 5\int_0^\pi \frac{F_1(\vartheta')\sin^2\vartheta'}{(a^2+\varrho^2-2a\varrho\cos\vartheta')^{\frac{7}{2}}}(2a^2-\varrho^2-a\varrho\cos\vartheta')\,d\vartheta' - \int_0^\pi \frac{F_1(\vartheta')\sin^2\vartheta'}{(a^2+\varrho^2-2a\varrho\cos\vartheta')^{\frac{5}{2}}}\,d\vartheta'\Big\},$$

wobei

$$F_1(\vartheta') = \int_0^{2\pi} f(a, \varphi', \vartheta') \cos\varphi' \, d\varphi' \quad \text{und} \quad G_1(\vartheta') = \int_0^{2\pi} g(a, \varphi', \vartheta') \cos\varphi' \, d\varphi'$$

gesetzt ist. Daraus folgt aber

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varrho}\left[\frac{1}{\varrho} \frac{\partial U(\varrho, \varphi, \vartheta)}{\partial \vartheta}\right]_{\vartheta=0}\right)_{\varrho=0} = -\frac{15}{8\pi} \int_0^{\pi} G_1(\vartheta') \sin^2\vartheta' \cos\vartheta' \, d\vartheta' \cdot \frac{1}{a} +$$

$$+ \frac{15}{2\pi} \int_0^{\pi} F_1(\vartheta') \sin^2\vartheta' \cos\vartheta' \, d\vartheta' \cdot \frac{1}{a^2},$$

womit auch für diese Ableitung die Abschätzung (10) bewiesen ist.

§ 5.

Ein Hilfssatz.

Zur Untersuchung des Verhaltens der Ableitungen n-ter Ordnung der durch (5) gegebenen Funktion U bei Annäherung an einen Punkt von O benötigen wir den folgenden Hilfssatz: Bildet man mit einer auf O beschränkten integrablen Funktion $f(a, \varphi, \vartheta)$, die außerdem so beschaffen ist, daß für

$$F(\vartheta) = \int_0^{2\pi} |f(a, \varphi, \vartheta)| \, d\varphi$$

das Integral

$$\int_0^{\eta} \frac{F(\vartheta)}{\vartheta^n} \, d\vartheta \qquad (0 < \eta) \tag{11}$$

konvergiert, den Ausdruck

$$(a^2 - \varrho^2) J(\varrho, \varphi, \vartheta) = (a^2 - \varrho^2) \frac{a}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(a, \varphi', \vartheta') h \sin\vartheta' \, d\varphi' \, d\vartheta'$$

— also $a^2 - \varrho^2$ multipliziert mit einem Poissonschen Integral —, so konvergiert jede seiner Ableitungen n-ter Ordnung nach x, y oder z in einem Punkte P der Polarachse gegen einen Grenzwert, wenn P längs der Polarachse gegen O rückt. Die Annäherung ist ferner gleichmäßig für jede Klasse von Randfunktionen, die ihrem absoluten Betrage nach gleichmäßig beschränkt sind, und für die das Integral (11) gleichmäßig mit η gegen Null konvergiert.

Da bei Benutzung eines Kellogschen Satzes über die Ableitungen des Poissonschen Integrals[12]) die Ableitungen $(n-1)$-ter Ordnung von J das behauptete Verhalten zeigen, so genügt es, unsere Behauptung für

$$(a^2 - \varrho^2) \cdot D^n J$$

nachzuweisen.

Dazu braucht man nur zu zeigen, daß

$$J_1 = (a^2 - \varrho^2) \frac{a}{4\pi} \int_0^{\eta} \int_0^{2\pi} |f(a, \varphi', \vartheta')| \cdot |D^n h| \sin \vartheta' \, d\varphi' \, d\vartheta'$$

unabhängig von ϱ bei hinreichend kleinem η beliebig klein gemacht werden kann.

Beachtet man aber neben (7) und

$$\frac{a-\varrho}{r} \leqq 1, \tag{12}$$

daß nach Kellog

$$\frac{\vartheta}{r} \leqq \frac{\pi}{2a} \qquad \text{für } 0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2} \tag{13}$$

gilt, falls P auf der Polarachse liegt[13]), so folgt die Behauptung unmittelbar aus

$$J_1 \leqq 2a \frac{a}{4\pi} \left(\frac{\pi}{2a}\right)^{n+1} K \int_0^{\eta} \frac{F(\vartheta')}{\vartheta'^{\,n}} \, d\vartheta'.$$

§ 6.

Ein weiterer Hilfssatz über biharmonische Polynome.

1. Das Gebiet R genüge der Bedingung A_n und die Funktion U der Bedingung B_n. Die Ableitungen $(n-1)$-ter Ordnung von U sollen ferner auf E als Grenzwerte existieren und dort stetig sein. Zu jedem Punkte p von E gibt es dann ein biharmonisches Polynom n-ten Grades G_p derart, daß die Funktion

$$U_p = U - G_p$$

in p mit allen ihren Ableitungen bis zur $(n-1)$-ten Ordnung einschließlich verschwindet, daß zweitens die Ableitungen n-ter Ordnung ihrer Grenzwerte auf E in p verschwinden und daß drittens die Ableitungen $(n-1)$-ter Ordnung

---

[12]) Vgl. H, S. 497–498.

[13]) Für $0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}$ ist $\vartheta \leqq \frac{\pi}{2} \sin \vartheta$, also $\frac{\vartheta}{r} \leqq \frac{\pi \sin \vartheta}{2r}$ und aus $r^2 = (a \cos \vartheta - \varrho)^2 + a^2 \sin^2 \vartheta$ folgt $\frac{\sin \vartheta}{r} \leqq \frac{1}{a}$.

der Grenzwerte von $\frac{\partial U_p}{\partial x}$, $\frac{\partial U_p}{\partial y}$, $\frac{\partial U_p}{\partial z}$ auf E in p verschwinden. Die Werte von G_p und seinen Ableitungen sind in R gleichmäßig hinsichtlich p beschränkt.

2. Bei der Konstruktion dieser biharmonischen Polynome gehen wir von folgendem Entwicklungssatz für biharmonische Funktionen aus. Ist P ein innerer Punkt eines Gebietes, in dem U biharmonisch ist, so läßt sich U in einer geeigneten Umgebung von P bei Zugrundelegung eines rechtwinklig kartesischen Koordinatensystems x', y', z' mit dem Ursprung in P in eine Reihe der Gestalt

$$U = \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu(x', y', z') \tag{14}$$

entwickeln, bei der die $Q_\nu(x', y', z')$ homogene Polynome ν-ten Grades in x', y', z' sind, die selbst biharmonische Funktionen darstellen.

Man beweist (14), indem man für U nach Wahl einer geeigneten Kugel mit dem Mittelpunkt in P die Darstellung (5) wählt, wobei $f(a, \varphi, \vartheta)$ bzw. $g(a, \varphi, \vartheta)$ durch die Werte von U bzw. $\frac{\partial U}{\partial \varrho}$ auf der Oberfläche dieser Kugel zu ersetzen sind. Beachtet man aber, daß für die Poissonschen Integrale

$$\frac{a^2-\varrho^2}{4\pi a}\iint_{(O)} \frac{\partial U(a,\varphi',\vartheta')}{\partial \varrho} \frac{1}{(a^2+\varrho^2-2a\varrho\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}\, dO$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} (2\nu+1)\left\{\frac{1}{4\pi a^2}\iint_{(O)} \frac{\partial U(a,\varphi',\vartheta')}{\partial \varrho} P_\nu(\cos\alpha)\, dO\right\}\frac{\varrho^\nu}{a^\nu}$$

und ebenso

$$\frac{a^2-\varrho^2}{4\pi a}\iint_{(O)} \frac{U(a,\varphi',\vartheta')}{(a^2+\varrho^2-2a\varrho\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}\, dO$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} (2\nu+1)\left\{\frac{1}{4\pi a^2}\iint_{(O)} U(a,\varphi',\vartheta') P_\nu(\cos\alpha)\, dO\right\}\frac{\varrho^\nu}{a^\nu}$$

gilt, wobei $P_\nu(u)$ das ν-te Legendresche Polynom ist[14]), daß weiter $\varrho^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ ist und daß $P_\nu(\cos\alpha)\,\varrho^\nu$ eine ganze rationale homogene Funktion ν-ten Grades in x', y', z' darstellt, so folgt aus (5) unmittelbar die Behauptung (14).

3. Zur Konstruktion des Polynoms G_p lege man nun ein rechtwinklig kartesisches Bezugssystem x, y, z zugrunde, das in p die Tangential-Normallage hat. Wählt man für P einen Punkt aus R mit $x = 0$, $y = 0$, $z = \delta > 0$ und als x', y', z'-System das durch

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z - \delta$$

[14]) Vgl. Kellog, l. c., Anm. 6, insbesondere S. 251–253.

gegebene System, so liefert das biharmonische Polynom $(n-1)$-ten Grades in x, y, z

$$G_{n-1,\delta} = \sum_{r=0}^{n-1} Q_{r,\delta}(x', y', z') = \sum_{r=0}^{n-1} Q_{r,\delta}(x, y, z-\delta)$$

— es ist $Q_{r,\delta}$ statt Q_r geschrieben, um anzudeuten, daß die Koeffizienten dieser Polynome von δ abhängen — im Limes $\delta \to 0$ ein biharmonisches Polynom $(n-1)$-ten Grades in x, y, z

$$G_{n-1} = \lim_{\delta \to 0} G_{n-1,\delta}$$

derart, daß die Ableitungen der Ordnung $1, 2, \ldots, n-1$ von $U - G_{n-1}$ und seinen Grenzwerten in p verschwinden[15]).

Mit Hilfe der homogenen Polynome n-ten bzw. $(n-1)$-ten Grades in x und y

$$f(x,y) = \frac{1}{n!}\left[\left\{x\frac{\partial}{\partial\xi} + y\frac{\partial}{\partial\eta}\right\}^n \left(U(\xi,\eta,\varphi(\xi,\eta)) - G_{n-1}(\xi,\eta,\varphi(\xi,\eta))\right)\right]_{\xi=\eta=0}$$

bzw.

$$f_1(x,y) = \frac{1}{(n-1)!}\left[\left\{x\frac{\partial}{\partial\xi} + y\frac{\partial}{\partial\eta}\right\}^{n-1}\frac{\partial}{\partial\zeta} \left(U(\xi,\eta,\psi(\xi,\eta)) - G_{n-1}(\xi,\eta,\varphi(\xi,\eta))\right)\right]_{\xi=\eta=0}$$

deren Ableitungen n-ter bzw. $(n-1)$-ter Ordnung nach x und y für $x = y = 0$ mit denen von

$$U(x, y, \varphi(x,y)) - G_{n-1}(x, y, \varphi(x,y))$$

bzw. von

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(U(x, y, \varphi(x,y)) - G_{n-1}(x, y, \varphi(x,y))\right)$$

übereinstimmen, bilde man dann das harmonische, also auch biharmonische homogene Polynom n-ten Grades

$$H_n = f(x,y) - \frac{\Delta^{(2)} f}{2!}z^2 + \frac{\Delta^{(4)} f}{4!}z^4 - + \cdots +$$
$$+ f_1(x,y)\,z - \frac{\Delta^{(2)} f_1}{3!}z^3 + \frac{\Delta^{(4)} f_1}{5!}z^5 - + \cdots$$
$$(\Delta^{(2)} = \Delta,\ \Delta^{(4)} = \Delta\Delta, \ldots).$$

---

[15]) Die Angabe von KELLOG, daß die Ableitungen n-ter Ordnung der Grenzwerte von $U - G_{n-1}$ dieselben sind, wie die der Randwerte von U, beruht offenbar auf einem Irrtum, da die Ableitungen n-ter Ordnung der Randwerte von G_{n-1} nicht Null zu sein brauchen. Es muß daher der Beweis auch im harmonischen Falle gegenüber der ursprünglichen KELLOGschen Fassung etwas modifiziert werden.

Da z, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ in p verschwinden, so folgt, daß die Ableitungen n-ter Ordnung der Randwerte von H_n in p gleich den Ableitungen n-ter Ordnung von $f(x, y)$ für $x = y = 0$, d. h. gleich den Ableitungen n-ter Ordnung von $U(x, y\, \varphi, (x, y)) - G_{n-1}(x, y, \varphi(x, y))$ in p sind, während die Ableitungen $(n-1)$-ter Ordnung der Randwerte von

$$\frac{\partial H_n}{\partial z} = -\frac{\Delta^{(2)} f}{1!} z + \frac{\Delta^{(4)} f}{3!} z^3 - + \cdots + \\ + f_1 - \frac{\Delta^{(2)} f_1}{2!} z^2 + - \cdots$$

in p ebenso gleich den Ableitungen $(n-1)$-ter Ordnung von $f_1(x, y)$ für $x = y = 0$, d. h. gleich den Ableitungen $(n-1)$-ter Ordnung von $\frac{\partial}{\partial z}\left(U(x, y, \varphi(x, y)) - G_{n-1}(x, y, \varphi(x, y))\right)$ in p sind

Wählt man also für G_p das Polynom

$$G_p = G_{n-1} + H_n,$$

so haben wir bereits erkannt, daß $U_p = U - G_p$ in p mit allen Ableitungen bis zur $(n-1)$-ten Ordnung einschließlich verschwindet, daß die Ableitungen n-ter Ordnung der Grenzwerte von U_p auf E in p verschwinden, und daß die Ableitungen $(n-1)$-ter Ordnung der Grenzwerte von $\frac{\partial U_p}{\partial z}$ ebenfalls in p verschwinden.

Dann müssen aber auch die Ableitungen

$$D^{n-1}\left[\frac{\partial U_p}{\partial x}\right]_{z=\varphi} \quad \text{und} \quad D^{n-1}\left[\frac{\partial U_p}{\partial y}\right]_{z=\varphi}$$

in p verschwinden, da dort die Ableitungen

$$D^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}\{[U_p]_{z=\varphi}\} = D^{n-1}\left\{\left[\frac{\partial U_p}{\partial x}\right]_{z=\varphi} + \left[\frac{\partial U_p}{\partial z}\right]_{z=\varphi}\varphi_x\right\},$$

$$D^{n-1}\frac{\partial}{\partial y}\{[U_p]_{z=\varphi}\} = D^{n-1}\left\{\left[\frac{\partial U_p}{\partial u}\right]_{z=p} + \left[\frac{\partial U_p}{\partial z}\right]_{z=\varphi}\varphi_y\right\},$$

$$D^i\left[\frac{\partial U_p}{\partial z}\right]_{z=o} \qquad (0 \leqq i \leqq n-1)$$

und

$$\varphi_x \quad \text{und} \quad \varphi_y$$

gleich Null werden.

Die Koeffizienten von G_{n-1} und H_n sind wegen der Stetigkeit der in ihnen auftretenden Ableitungen von U, $\frac{\partial U}{\partial z}$ und φ auf der abgeschlossenen Menge E beschränkt, und zwar gleichmäßig in bezug auf p. Daher gilt das auch von G_{n-1}, H_n und ihren Ableitungen in R selbst.

§ 7.

Beweis des Hauptsatzes.

1. Nach den Vorbereitungen in den vorhergehenden Paragraphen können wir nunmehr den Beweis des in § 1 formulierten Satzes für $n > 2$ auf induktivem Wege erbringen, während der Fall $n = 2$ direkt erledigt wird.

Dazu ist zunächst zu bemerken, daß die Bedingungen A_{n-1}, B_{n-1} eine Folge der Bedingungen A_n, B_n sind. Wenn wir alsdann annehmen, daß der Satz für alle n-Werte, die kleiner als der vorgegebene n-Wert ($n > 2$) sind, richtig ist, so können wir zwischen dem in A_n als existierend vorausgesetzten Flächenelement E und dem ganz in seinem Innern enthaltenen sonst aber beliebigen Element E' eine Reihe von Elementen $E_1, E_2, \ldots, E_{n-2}$ zwischenschalten, von denen jedes im Innern des vorhergehenden enthalten ist derart, daß auf E_1 die zweiten Ableitungen, auf E_2 die dritten Ableitungen usw. und schließlich auf E_{n-2} die $(n-1)$-ten Ableitungen von U als Limites existieren und stetig sind. Indem wir jetzt in Abänderung der bisherigen Bezeichnung unter E nicht das Ausgangselement, sondern das reguläre Flächenelement E_{n-2} verstehen, können wir also annehmen, daß auf E die Ableitungen der Ordnung 1, 2, …, $n-1$ ($n > 2$) als Limites existieren und dort stetig sind.

Genügt nun R der Bedingung A_n, U der Bedingung B_n und wählt man einen Radius a gemäß § 2, so läßt sich die in § 6 angegebene Funktion U_p auf Grund der Ergebnisse von § 3 im Innern der Kugel σ, die E von Innen her in einem beliebigen Punkte p von E' berührt — im folgenden Text verstehen wir unter σ immer diese Kugel —, in der Form (5) darstellen, wobei $f(a, \varphi, \vartheta)$ bzw. $g(a, \varphi, \vartheta)$ durch die Werte von U_p bzw. $\frac{\partial U_p}{\partial \varrho}$ auf der Oberfläche von σ zu ersetzen sind.

Ist $Q = (a, \varphi, \vartheta)$ ein Punkt auf der Kugeloberfläche mit $0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}$ und entspricht dem Punkte p der Winkel $\vartheta = 0$, so gilt bei Zugrundelegung des Koordinatensystems x, y, z, das in p die Tangential-Normallage hat, für die in (5) auftretende Normalableitung

$$\frac{\partial U_p(Q)}{\partial \varrho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+(a-z)^2}} \frac{\partial U_p(Q)}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+(a-z)^2}} \frac{\partial U_p(Q)}{\partial y} - \\ - \frac{a-z}{\sqrt{x^2+y^2+(a-z)^2}} \frac{\partial U_p(Q)}{\partial z},$$

falls hierin x, y, z die Koordinaten von Q sind.

Bei den nunmehr folgenden Abschätzungen erweist es sich als bequem, mit Kellog erstens unter K eine Funktion zu verstehen, deren absoluter Betrag eine von R, E', U, n, aber nicht von p abhängende obere Schranke besitzt, und zweitens mit $D(t)$ eine solche Funktion zu bezeichnen, deren

absoluter Betrag unter einer Funktion liegt, die den in A_n genannten Anforderungen für $D(t)$ genügt.

Da nun

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+(a-z)^2}} = K\vartheta, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+(a-z)^2}} = K\vartheta \text{ und } \frac{a-z}{\sqrt{x^2+y^2+(a-z)^2}} \leqq 1$$

ist, so behaupten wir, daß es zum Beweise des in § 1 formulierten Hauptsatzes genügt, die Relationen

$$|U_p(Q)| = \vartheta^n D(\vartheta), \tag{15}$$

$$\left|\frac{\partial U_p(Q)}{\partial x}\right| = \vartheta^{n-2} D(\vartheta), \quad \left|\frac{\partial U_p(Q)}{\partial y}\right| = \vartheta^{n-2} D(\vartheta), \tag{16}$$

$$\left|\frac{\partial U_p(Q)}{\partial z}\right| = \vartheta^{n-1} D(\vartheta) \tag{17}$$

($n \geqq 2$) zu verifizieren.

Beachtet man nämlich den Hilfssatz in § 5 und den dort erwähnten Kellogschen Satz über die Ableitungen des Poissonschen Integrals, so folgt aus (15), (16) und (17), daß die n-ten partiellen Ableitungen von U_p gegen einen Grenzwert konvergieren, wenn man in normaler Richtung gegen einen Punkt p von E' rückt; die Konvergenz ist dabei gleichmäßig hinsichtlich p. Aus

$$D^n U_p = D^n U - D^n G_p$$

folgt dann dasselbe gleichmäßige Konvergenzverhalten der Ableitungen $D^n U$, da die Ableitungen $D^n G_p$ gleichmäßig in p beschränkt sind.

Damit kann man aber zeigen, daß $D^n U$ auch bei beliebiger Annäherung an einen inneren Punkt p von E' eine stetige Funktion darstellt.

Wir gehen von folgender Bemerkung aus[16]). Wegen der vorausgesetzten zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit von $z = \varphi(x, y)$ läßt sich eine Kugel $\varkappa$ mit dem Mittelpunkt in p so angeben, daß jeder Punkt aus $\varkappa$ auf einer Normalen zu E' liegt, und daß für zwei ihrer Punkte P und Q mit den Fußpunkten p bzw. q aus $Q \to P$ auch $q \to p$, und umgekehrt aus $q \to p$ wieder $Q \to P$ folgt, falls Q und P auf einem Parallelflächenstück zu E' liegen. Ein beliebiger Punkt (ξ, η, ζ) aus einer geeigneten Umgebung von p läßt sich nämlich umkehrbar eindeutig und beiderseits stetig vermittels der Beziehungen

$$\begin{aligned} \xi &= x + n\cos(n, x) = x - \frac{\varphi_x}{\omega} n, \\ \eta &= y + n\cos(n, y) = y - \frac{\varphi_y}{\omega} n, \quad (\omega = \sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2}, \\ \zeta &= z + n\cos(n, z) = z + \frac{n}{\omega} \qquad z = \varphi(x, y)) \end{aligned}$$

---

[16]) Die Behauptung läßt sich auch bereits aus der einmaligen stetigen Differenzierbarkeit von $z = \varphi(x, y)$ erschließen. Vgl. hierzu M. Sullivan, l. c., Anm. 7, insbes. S. 147.

auf eine Umgebung des Punktes (0, 0, 0) in einem rechtwinklig kartesischen x, y, n-Koordinatensystem beziehen, da die Funktionaldeterminante für $x = 0,\ y = 0,\ n = 0$

$$\frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, n)}\Big|_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\left(\frac{\varphi_x}{\omega}\right)_0 \\ 0 & 1 & -\left(\frac{\varphi_y}{\omega}\right)_0 \\ (\varphi_x)_0 & (\varphi_y)_0 & \left(\frac{1}{\omega}\right)_0 \end{vmatrix} = 1,$$

also ungleich Null ist.

Definiert man nun die Funktion $D^n U$ vermittels ihrer bei normaler Annäherung erhaltenen Grenzwerte auch auf E', so bilden die Randwerte für die inneren Punkte von E' eine stetige Funktion. Denn sei q ein beliebiger Punkt von E', der $\varkappa$ angehört. Zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ läßt sich dann zunächst ein $\delta_1(\varepsilon)$ so bestimmen, daß für zwei Punkte P und Q aus R, die $\varkappa$ angehören, und die auf den Normalen in p und q derart liegen, daß

$$\overline{pP} = \delta_1 \quad \text{und} \quad \overline{qQ} = \delta_1$$

ist, die Abschätzungen

$$|D^n U(p) - D^n U(P)| < \tfrac{\varepsilon}{3} \quad \text{und} \quad |D^n U(q) - D^n U(Q)| < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

bestehen.

Wegen der Stetigkeit von $D^n U$ in R läßt sich nun sicher ein $\delta_2 = \delta(\varepsilon, \delta_1)$ so bestimmen, daß für $\overline{pq} < \delta_2$

$$|D^n U(P) - D^n U(Q)| < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

und damit auch

$$|D^n U(p) - D^n U(q)| < \varepsilon$$

gilt.

Um nun die Stetigkeit von $D^n U$ bei beliebiger Annäherung an p zu zeigen, bestimmen wir zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, daß für einen beliebigen Punkt Q aus $\varkappa$ mit

$$\overline{pQ} < \delta$$

die Abschätzungen

$$|D^n U(q) - D^n U(Q)| < \tfrac{\varepsilon}{2},$$
$$|D^n U(p) - D^n U(q)| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

und damit schließlich

$$|D^n U(p) - D^n U(Q)| < \varepsilon$$

bestehen, falls q der Fußpunkt eines Lotes von Q auf E' ist.

2. Wir verifizieren zunächst die Relationen (16), von denen jedoch aus Symmetriegründen nur eine bewiesen zu werden braucht, etwa

$$\left|\frac{\partial U_p(Q)}{\partial x}\right| = \vartheta^{n-2} D(\vartheta) \qquad (n \geqq 2). \tag{18}$$

Dazu gehen wir von der Bemerkung aus, daß der Punkt Q auf einer Normalen zu E liegt, für deren Fußpunkt q die Abschätzung

$$\overline{pq} \leqq 2\sqrt{2}\,a \tag{19}$$

gilt.

Beschreibt man nämlich um p die Kugel mit dem Radius $4a$, so enthält sie wegen $4a \leqq \frac{a_1}{2}$ keinen Randpunkt von E. In dieser Kugel gibt es aber sicher Punkte von E, deren Abstand von Q kleiner oder gleich $\sqrt{2}\,a$ ist. Als solchen Punkt von E braucht man ja nur den Punkt p selbst zu nehmen. Versteht man nun unter q den Punkt von E, der Q am nächsten liegt — bzw. einen von diesen Punkten, falls es mehrere gibt —, so muß

$$\overline{qQ} \leqq \sqrt{2}\,a$$

sein. Da aber andererseits die Entfernung von Q bis zur Oberfläche der Kugel mit dem Radius $4a$ größer oder gleich $4a - \sqrt{2}\,a > \sqrt{2}\,a$ ist, so liegt Q wirklich auf einer Normalen zu E durch q. Für die Entfernung $\overline{pq}$ erhalten wir ferner, wie behauptet, die Abschätzung

$$\overline{pq} \leqq \overline{pQ} + \overline{Qq} \leqq \sqrt{2}\,a + \sqrt{2}\,a = 2\sqrt{2}\,a.$$

Sei nun zunächst n größer als 3. Nach dem Taylorschen Satz können wir dann schreiben

$$\frac{\partial U_p(Q)}{\partial x} = \frac{\partial U_p}{\partial x}\Big|_q + \frac{\partial^2 U_p}{\partial \nu\,\partial x}\Big|_q \overline{qQ} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^3 U_p}{\partial \nu^2\,\partial x}\Big|_q \overline{qQ}^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{(n-2)!}\frac{\partial^{n-1} U_p}{\partial \nu^{n-2}\,\partial x}\Big|_{q_1} \overline{qQ}^{n-2},$$

wobei q_1 ein Punkt auf der Strecke $\overline{qQ}$ ist.

Ebenfalls nach dem Taylorschen Satz gilt aber bei Benutzung des Hilfssatzes von § 6

$$\frac{\partial U_p}{\partial x}\Big|_q = \frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[\frac{\partial U_p}{\partial x}\right]_{z=\varphi(p_1)} t^{n-1} = K t^{n-1},$$

wenn p_1 ein geeigneter nach § 2, Punkt 1 existierender Punkt auf E ist.

Weiter ist

$$\frac{\partial^2 U_p}{\partial \nu\,\partial x}\Big|_q = \frac{1}{(n-3)!}\frac{\partial^{n-3}}{\partial t^{n-3}}\left[\frac{\partial^2 U_p}{\partial \nu\,\partial x}\right]_{z=\varphi(p_1)} t^{n-3}$$

und damit wegen $\overline{qQ} = Kt^2$

$$\left.\frac{\partial^2 U_p}{\partial \nu\, \partial x}\right|_q \overline{qQ} = Kt^{n-1} \quad \text{usw.}$$

Beachtet man aber, daß $t = K\vartheta$ ist, so ist (18) für $n > 3$ bewiesen, sogar in diesem Fall in der schärferen Form

$$\left|\frac{\partial U_p(Q)}{\partial x}\right| = K\vartheta^{n-1}.$$

3. Das gilt auch noch im Falle $n = 3$. Dazu ist nur zu zeigen, daß

$$\left.\frac{\partial U_p}{\partial \nu\, \partial x}\right|_{q_1} \overline{qQ} = K\vartheta^2$$

ist. Das ist aber klar, da

$$\overline{pq_1} < \overline{pQ} + \overline{Qq} < 2\sqrt{2}\,a$$

und $\frac{\partial U_p}{\partial \nu\, \partial x}$ in dem Teilgebiet von R beschränkt ist, dessen Punkte von E' einen Abstand haben, der kleiner als $2\sqrt{2}\,a$ ist.

4. Zum Beweise von (18) im Falle $n = 2$ beachte man zunächst, daß

$$U_p = U - G_p$$

ist, wobei G_p ein Polynom darstellt. Aus dem Zutreffen der Voraussetzungen A_2 und B_2 läßt sich nun nach Satz 6 [bzw. nach Satz 5, falls die Voraussetzung (1) nicht erfüllt ist] der vorangegangenen Arbeit des Verfassers[17]) folgern, daß

$$|DU(Q) - DU(q)| \leqq K\overline{qQ}^{\mu} = Kt^{2\mu} = D(t)$$

für einen beliebigen Exponenten μ mit $0 < \mu < 1$ und also auch

$$|DU_p(Q) - DU_p(q)| = D(t)$$

gilt.

Da ferner die Randwerte $[DU_p]_{z=\varphi(x,y)}$ stetige partielle Ableitungen besitzen, so wird auch

$$DU_p(q) = DU_p(q) - DU_p(p) = K\overline{pq} = Kt = D(t),$$

womit (18) bewiesen ist.

---

[17]) K. Schröder, l. c., Anm. 8.

5. Als Vorbetrachtung zum Beweis der Relation (15) zeigen wir zunächst für $n > 2$, lediglich unter Benutzung des TAYLORschen Satzes, das Bestehen der gegenüber (15) schwächeren Aussage

$$U_p(Q) = K\vartheta^n \tag{20}$$

und der Beziehung

$$\frac{\partial U_p(Q)}{\partial \varrho} = K\vartheta^{n-1}. \tag{21}$$

Da sich die Richtigkeit von (20) wörtlich der KELLOGGschen Arbeit[18]) entnehmen läßt, und da nach Punkt 1

$$\frac{\partial U_p(Q)}{\partial \varrho} = K\vartheta\frac{\partial U_p(Q)}{\partial x} + K\vartheta\frac{\partial U_p(Q)}{\partial y} + K\frac{\partial U_p(Q)}{\partial z}$$

ist, und (16) bereits bewiesen ist, so braucht dazu nur noch die Relation

$$\frac{\partial U_p(Q)}{\partial z} = K\vartheta^{n-1} \qquad (n > 2) \tag{22}$$

bewiesen zu werden.

Wir schreiben zunächst

$$\frac{\partial U_p(Q)}{\partial z} = \frac{\partial U_p}{\partial z}\Big|_q + \frac{\partial^2 U_p}{\partial \nu\,\partial z}\Big|_q \overline{qQ} + \cdots + \frac{1}{(n-2)!}\frac{\partial^{n-1} U_p}{\partial \nu^{n-2}\,\partial z}\Big|_{q_1} \overline{qQ}^{n-2}.$$

Hier ist nun

$$\frac{\partial U_p}{\partial z}\Big|_q = \frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[\frac{\partial U_p}{\partial z}\right]_{z=\varphi(p_1)} t^{n-1}.$$

Da aber auf Grund des Hilfssatzes von § 6 und wegen der Voraussetzung B_n

$$\left|\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[\frac{\partial U_p}{\partial z}\right]_{z=\varphi(p_1)}\right| = \left|\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[\frac{\partial U_p}{\partial z}\right]_{z=\varphi(p_1)} - \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[\frac{\partial U_p}{\partial z}\right]_{z=\varphi(p)}\right|$$

gilt [t_1 sei die Projektion von $\overline{p\,p_1}$ auf die Tangentialebene in p. Da $t_1 < t$, so ist $D(t_1) \leqq D(t)$ wegen der vorausgesetzten Monotonie von $D(t)$], so ist

$$\frac{\partial U_p}{\partial z}\Big|_q = K\vartheta^{n-1} D(\vartheta).$$

---

[18]) Vgl. H, S. 500–501.

Da sich weiter im Falle $n > 3$

$$\left.\frac{\partial^2 U_p}{\partial \nu\, \partial z}\right|_q = \frac{1}{(n-3)!}\,\frac{\partial^{n-3}}{\partial t^{n-3}}\left[\frac{\partial^2 U_p}{\partial \nu\, \partial z}\right]_{z=\varphi(p_1)} t^{n-3}$$

ergibt, so folgt

$$\left.\frac{\partial^2 U_p}{\partial \nu\, \partial z}\right|_q \overline{qQ} = K t^{n-1} = K \vartheta^{n-1} \qquad \text{usw.},$$

so daß (27) für diesen Fall bewiesen ist.

Für $n = 3$ wäre dagegen zu zeigen

$$\left.\frac{\partial^2 U_p}{\partial \nu\, \partial z}\right|_{q_1} \overline{qQ} = K \vartheta^2.$$

Das erkennt man aber durch dieselbe Betrachtung wie in Punkt 3.

6. Nach Kellog[19]) läßt sich nun im Falle $n > 2$ der Nachweis von (15) auf den Nachweis der Tatsache reduzieren, daß für die Funktion

$$V(q) = \left.\frac{\partial^{n-1} U_p}{\partial x^{n-2}\, \partial z}\right|_q = \left. D^{n-1} U_p \right|_q$$

die Relation

$$|V(q)| = D(t) \tag{23}$$

besteht.

Seien dazu P_δ und Q_δ Punkte von R, die auf den Normalen zu E in den Punkten p und q liegen, wobei

$$\overline{pP_\delta} = \overline{qQ_\delta} = \delta$$

ist. Über δ wird noch verfügt werden. Um $|V(q)| = |V(q) - V(p)|$ abzuschätzen, werden nacheinander $|V(p) - V(P_\delta)|$, $|V(q) - V(Q_\delta)|$ und $|V(P_\delta) - V(Q_\delta)|$ abgeschätzt werden.

Zunächst soll gezeigt werden, daß für $\delta \leqq \frac{a}{2}$

$$\begin{cases} V(p) - V(P_\delta) = K\,\delta \log \frac{a}{\delta}, \\ V(q) - V(Q_\delta) = K\,\delta \log \frac{a}{\delta} \end{cases} \tag{24}$$

ist.

---

[19]) Vgl. H, S. 502—503.

Stellt man die biharmonische Funktion U_p unter Benutzung der Kugel σ wie oben in der Form (5) dar, so ergibt sich für $V(P_\vartheta)$ ein Ausdruck der Gestalt

$$V(P_\vartheta) = (\varrho^2 - a^2)\frac{1}{2a}\frac{a}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_p(a,\varphi',\vartheta')}{\partial \varrho} D^{n-1}h \sin\vartheta'\, d\varphi'\, d\vartheta' +$$

$$+\sum_{i=0}^{n-2} K\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_p(a,\varphi',\vartheta')}{\partial \varrho} D^i h \sin\vartheta'\, d\varphi'\, d\vartheta' -$$

$$-(\varrho^2 - a^2)\frac{1}{2a}\frac{\varrho}{a}\frac{a}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} U_p(a,\varphi',\vartheta') D^n h \sin\vartheta'\, d\varphi'\, d\vartheta' +$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1} K\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} U_p(a,\varphi',\vartheta') D^i h \sin\vartheta'\, d\varphi'\, d\vartheta'.$$

Für einen Punkt p' zwischen p und P_ϑ, der vom Mittelpunkt von σ den Abstand ϱ' hat, folgt dann wegen $\varrho' - \varrho = K(a - \varrho)$:

$$V(p') - V(P_\vartheta) = K(a-\varrho)\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_p(P')}{\partial \varrho} D^{n-1}h \sin\vartheta'\, d\varphi'\, d\vartheta' +$$

$$+K(\varrho^2 - a^2)\int_{\varrho}^{\varrho'}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_p(P')}{\partial \varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho} D^{n-1}h \sin\vartheta'\, d\varphi'\, d\vartheta'\, d\varrho +$$

$$+\sum_{i=0}^{n-2} K\int_{\varrho}^{\varrho'}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_p(P')}{\partial \varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho} D^i h \sin\vartheta'\, d\varphi'\, d\vartheta'\, d\varrho +$$

$$+K(a-\varrho)\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} U_p(P') D^n h \sin\vartheta'\, d\varphi'\, d\vartheta' +$$

$$+K(\varrho^2 - a^2)\int_{\varrho}^{\varrho'}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} U_p(P')\frac{\partial}{\partial \varrho} D^n h \sin\vartheta'\, d\varphi'\, d\vartheta'\, d\varrho +$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1} K\int_{\varrho}^{\varrho'}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} U_p(P')\frac{\partial}{\partial \varrho} D^i h \sin\vartheta'\, d\varphi'\, d\vartheta' d\varrho.$$

Die auf der rechten Seite auftretenden Integrale über ϑ werden nun je in die beiden Teilintegrale über 0 bis $\frac{\pi}{2}$ bzw. über $\frac{\pi}{2}$ bis π zerlegt.

Bei den letzteren Teilintegralen ist

$$|U_p(P')| \leqq K, \quad \left|\frac{\partial U_p(P')}{\partial \varrho}\right| \leqq K \tag{25}$$

und wegen $\cos\vartheta \leqq 0$ für $\frac{\pi}{2} \leqq \vartheta \leqq \pi$ hat man bei ihnen

$$r \geqq a. \tag{26}$$

Sie lassen sich daher bei Beachtung von (7) bzw. durch

$$K(a-\varrho)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{K}{a^{n+1}}\,d\varphi'\,d\vartheta' = K(a-\varrho),$$

$$K(a-\varrho)\int_{\varrho}^{\varrho'}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{K}{a^{n+2}}\,d\varphi'\,d\vartheta'\,d\varrho = K(a-\varrho)(\varrho'-\varrho) = K(a-\varrho)^2,$$

$$K\int_{\varrho}^{\varrho'}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{K}{a^{i+3}}\,d\varphi'\,d\vartheta'\,d\varrho = K(a-\varrho), \qquad (i=0,\ldots,n-2),$$

$$K(a-\varrho)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{K}{a^{n+2}}\,d\varphi'\,d\vartheta' = K(a-\varrho),$$

$$K(a-\varrho)\int_{\varrho}^{\varrho'}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{K}{a^{n+3}}\,d\varphi'\,d\vartheta'\,d\varrho = K(a-\varrho)^2,$$

$$K\int_{\varrho}^{\varrho'}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{K}{a^{i+3}}\,d\varphi'\,d\vartheta'\,d\varrho = K(a-\varrho)$$

abschätzen, so daß die Summe aller dieser Glieder ein Ausdruck $K(a-\varrho)$ ist.

Für die ersten Teilintegrale findet man, wenn man (20), (21), (7), (12), (13),

$$\varrho \geqq \frac{a}{2} \quad \left(\text{wegen } a-\varrho = \delta \leqq \frac{a}{2}\right)$$

und

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\vartheta'}{r^3}\,d\vartheta' = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\frac{\vartheta'}{2}\cos\frac{\vartheta'}{2}}{(a-\varrho)^2+4a\varrho\sin^2\frac{\vartheta'}{2}}\,d\vartheta'$$

$$= \frac{1}{2a\varrho}\log\left\{(a-\varrho)^2+4a\varrho\sin^2\frac{\vartheta'}{2}\right\}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2a\varrho}\log\frac{a^2+\varrho^2}{(a-\varrho)^2}$$

$$< \frac{1}{a^2}\log\frac{\sqrt{2}\,a}{(a-\varrho)^2}$$

beachtet, nacheinander

$$\left|(a-\varrho)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_p(P')}{\partial\varrho}D^{n-1}h\sin\vartheta'\,d\varphi'\,d\vartheta'\right|$$

$$\leqq(a-\varrho)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}K\vartheta'^{n-1}\frac{K}{r^{n+1}}\sin\vartheta'\,d\varphi'\,d\vartheta'=K(a-\varrho)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\vartheta'}{r^2}d\vartheta'$$

$$=K(a-\varrho)\log\frac{\sqrt{2}\,a}{(a-\varrho)^2},$$

$$\left|(a-\varrho)\int_\varrho^{\varrho'}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_p(P')}{\partial\varrho}D^n h\sin\vartheta'\,d\varphi'\,d\vartheta'\,d\varrho\right|$$

$$\leqq\int_\varrho^{\varrho'}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}rK\vartheta'^{n-1}\frac{K}{r^{n+2}}\sin\vartheta'\,d\varphi'\,d\vartheta'\,d\varrho=K\int_\varrho^{\varrho'}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\vartheta'}{r^2}d\vartheta'\,d\varrho$$

$$=K\left\{(a-\varrho')\log\frac{a-\varrho'}{\sqrt{2}\,ae}-(a-\varrho)\log\frac{a-\varrho}{\sqrt{2}\,ae}\right\},$$

$$\left|\int_\varrho^{\varrho'}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_p(P')}{\partial\varrho}D^{i+1}h\sin\vartheta'\,d\varphi'\,d\vartheta'\,d\varrho\right|\qquad(0\leqq i\leqq n-2)$$

$$\leqq\int_\varrho^{\varrho'}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}K\vartheta'^{n-1}\frac{K}{r^{i+3}}\sin\vartheta'\,d\varphi'\,d\vartheta'\,d\varphi=\begin{cases}K\text{ für }i\leqq n-3,\\ K\displaystyle\int_\varrho^{\varrho'}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\vartheta'}{r^2}d\varphi'\,d\varrho\text{ für }i=n-2,\end{cases}$$

$$\left|(a-\varrho)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}U_p(P')\,D^n h\sin\vartheta'\,d\varphi'\,d\vartheta'\right|$$

$$=(a-\varrho)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}K\vartheta'^n\frac{K}{r^{n+2}}\sin\vartheta'\,d\varphi'\,d\vartheta'=K(a-\varrho)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\vartheta'}{r^2}d\vartheta',$$

$$\left|(a-\varrho)\int_\varrho^{\varrho'}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}U_p(P')\,D^{n+1}h\sin\vartheta'\,d\varphi'\,d\vartheta'\,d\varrho\right|$$

$$\leqq\int_\varrho^{\varrho'}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}rK\vartheta'^n\frac{K}{r^{n+3}}\sin\vartheta'\,d\varphi'\,d\vartheta'\,d\varrho=K\int_\varrho^{\varrho'}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\vartheta'}{r^2}d\vartheta'\,d\varrho,$$

$$\left|\int_{\varrho}^{\varrho'}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{2\pi} U_{\nu}(P')\, D^{i+1}\, h \sin\vartheta'\, d\varphi'\, d\vartheta'\, d\varrho\right| \qquad (0 \leqq i \leqq n-1)$$

$$\leqq \int_{\varrho}^{\varrho'}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{2\pi} K\vartheta'^{n}\frac{K}{r^{i+3}}\sin\vartheta'\, d\varphi'\, d\vartheta'\, d\varrho = \begin{cases} K \text{ für } i \leqq n-2, \\ K\displaystyle\int_{\varrho}^{\varrho'}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\vartheta'}{r^{3}}\, d\vartheta'\, d\varrho \text{ für } i = n-1. \end{cases}$$

Da nun für $\varrho' \to a$ die Limesrelation $V(p') \to V(p)$ gilt, so erhalten wir schließlich insgesamt

$$V(p) - V(P_\delta) = K\delta \log\frac{a}{\delta},$$

d. h. die erste der Relationen (24).

Um auch die zweite zu beweisen, betrachte man die Kugel τ vom Radius a, die E in q von innen her berührt. Da τ wegen (19) ganz dem Innern der Kugel vom Radius a_1 um p angehört, kann τ mit S nur Punkte gemeinsam haben, die auch zu E gehören. Aus dem Beweisgang von § 2, Punkt 2, den wir wörtlich auf die Kugel τ übertragen können, erkennt man dann aber, daß τ mit E auch nur den Punkt q gemeinsam haben kann.

Da weiter die Kugel vom Radius $4a$ um q wegen

$$2\sqrt{2}\,a + 4a < 8a \leqq a_1$$

ganz der Kugel vom Radius a_1 und p angehört, kann man wie in Punkt 2 dieses Paragraphen schließen, daß auch jeder Punkt Q der Halbkugeloberfläche von τ, die E zugekehrt ist, auf einer Normalen zu E liegt.

Damit kann man aber die Schlüsse, die zur ersten Relation (24) führten, wiederholen, um auch die zweite zu beweisen.

Um nun $|V(P_\delta) - V(Q_\delta)|$ abzuschätzen, verbinde man P_δ mit Q_δ durch eine Kurve γ^*, die der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kugeln vom Radius δ ist, die E von innen her längs der Schnittkurve C^* von E mit der (t, z)-Ebene berühren.

Es wird dann

$$V(Q_\delta) - V(P_\delta) = \int_{s_{P_\delta}}^{s_{Q_\delta}} \frac{\partial V}{\partial s}\, ds,$$

— s sei dabei Parameter auf γ^*. Die Bogenlänge von γ^* ist dann ein Ausdruck Kt.

Weiter beachte man nun, daß

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial^2}{\partial s\, \partial z}\left(\frac{\partial^{n-2} U_p}{\partial x^{n-2}}\right)$$

ist, und daß $\frac{\partial^{n-2} U_p}{\partial x^{n-2}}$ eine biharmonische Funktion darstellt, die mit ihren ersten partiellen Ableitungen in dem γ^* enthaltenen Teil von R beschränkt ist, der gleichzeitig in den Kugeln vom Radius $4a$ um die Punkte von C^* enthalten ist.

Sind B und C Schranken für den absoluten Betrag dieser biharmonischen Funktion und ihrer ersten partiellen Ableitungen, so gilt nach (10) von § 4

$$\left|\frac{\partial V}{\partial s}\right| \leqq \frac{B}{\delta^2} + \frac{C}{\delta}$$

oder, da die δ-Werte beschränkt sind,

$$\left|\frac{\partial V}{\partial s}\right| \leqq \frac{B}{\delta^2},$$

so daß

$$|V(Q_\delta) - V(P_\delta)| \leqq K\frac{t}{\delta^2} \tag{27}$$

ist.

Setzt man nunmehr $\delta = t^{\frac{1}{4}}$, so erhalten wir aus (24) und (27) für $\delta = t^{\frac{1}{4}} \leqq \frac{a}{2}$, also für $t \leqq \frac{a^4}{16}$

$$\begin{aligned} V(q) = V(q) - V(p) &= V(q) - V(Q_\delta) + V(Q_\delta) - V(P_\delta) + V(P_\delta) - V(p) \\ &= K t^{\frac{1}{2}} \log\frac{a}{t} + K t^{\frac{1}{2}} = K t^{\lambda}, \end{aligned} \tag{28}$$

wobei λ eine Zahl zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ ist.

Wegen der Beschränktheit von $V(q)$ auf E gilt diese Relation auch für Werte von t größer als $\frac{a^4}{16}$. Damit ist also (23) bewiesen.

7. Für den Nachweis der Relation (15) im Falle $n = 2$ genügt es, die Richtigkeit von

$$\left|\frac{\partial U_p}{\partial \nu}\Big|_{q_1}\right| = D(t) \tag{29}$$

aufzuzeigen, wobei q_1 ein Punkt der Strecke $\overline{qQ}$ ist. Das kann aber wörtlich mit den Betrachtungen von Punkt 4 dieses Paragraphen gezeigt werden.

8. Zum Beweis der Relation (17) im Falle $n > 3$ genügt es, nach den in Punkt 5 dieses Paragraphen angestellten Überlegungen zu zeigen, daß

$$\left|\frac{\partial^2 U_p}{\partial \nu\, \partial z}\Big|_q\right| = t^{n-3} D(t) \tag{30}$$

ist.

Wählt man nun die x-Achse derart, daß sie die Richtung der Projektion von $\overline{pq}$ hat, wobei also $x = t$ ist, so gilt

$$\frac{1}{t^{n-3}} \frac{\partial^3 U_p}{\partial \nu\, \partial z}\Big|_q = \frac{1}{(n-3)!} \frac{\partial^{n-3}}{\partial x^{n-3}} \left[\frac{\partial^3 U_p}{\partial \nu\, \partial z}\right]_{z=\varphi(p_1)},$$

wenn p_1 ein geeigneter Zwischenpunkt auf E ist.

Es genügt also zu zeigen, daß

$$\frac{\partial^{n-3}}{\partial x^{n-3}} \left[\frac{\partial^3 U_p}{\partial \nu\, \partial z}\right]_{z=\varphi(p_1)} = D(t)$$

ist.

Nun gilt

$$\left[\frac{\partial^3 U_p}{\partial \nu\, \partial z}\right]_{z=\varphi} = \left[-\frac{\varphi_x}{\omega} \frac{\partial^3 U_p}{\partial x\, \partial z} - \frac{\varphi_y}{\omega} \frac{\partial^3 U_p}{\partial y\, \partial z} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial^3 U_p}{\partial z^3}\right]_{z=\varphi}$$

mit $\omega = \sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2}$. In

$$\frac{\partial^{n-3}}{\partial x^{n-3}} \left[-\frac{\varphi_x}{\omega} \frac{\partial^3 U_p}{\partial x\, \partial z}\right]_{z=\varphi} = \sum_{i=0}^{n-3} \binom{n-3}{i} \frac{\partial^{n-3-i}}{\partial x^{n-3-i}} \left(-\frac{\varphi_x}{\omega}\right)\Big|_{p_1} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left[\frac{\partial^3 U_p}{\partial x\, \partial z}\right]_{z=\varphi(p_1)}$$

haben aber die Summanden, wenn man beachtet, daß die Projektion von $\overline{p p_1}$ kleiner ist als die Projektion von $\overline{pq}$, für $i < n-3$ die Form Kt, da die zweiten Faktoren bei p verschwinden und beschränkte Ableitungen erster Ordnung nach x und y besitzen, während die ersten Faktoren beschränkt sind. Für $i = n-3$ ist der zweite Faktor beschränkt und der erste nämlich $\frac{\varphi_x}{\omega}\Big|_{p_1}$ von der Form Kt.

Wir behaupten weiter, daß

$$\frac{\partial^{n-3}}{\partial x^{n-3}} \left[\frac{1}{\omega} \frac{\partial^3 U_p}{\partial z^3}\right]_{z=\varphi(p_1)} = Kt + \frac{1}{\omega} \left[\frac{\partial^{n-1} U_p}{\partial x^{n-3}\, \partial z^3}\right]_{z=\varphi(p_1)}$$

ist, denn da

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^3 U_p}{\partial z^3}\right]_{z=\varphi} = \left[\frac{\partial^3 U_p}{\partial x\, \partial z^3}\right]_{z=\varphi} + \left[\frac{\partial^3 U_p}{\partial z^3}\right]_{z=\varphi} \varphi_x,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^3 U_p}{\partial z^3}\right]_{z=\varphi} = \left[\frac{\partial^4 U_p}{\partial x^2\, \partial z^3}\right]_{z=\varphi} + \left[\frac{\partial^4 U_p}{\partial x\, \partial z^3}\right]_{z=\varphi} \varphi_x +$$

$$+ \left[\frac{\partial^4 U_p}{\partial x\, \partial z^3}\right]_{z=\varphi} \varphi_x + \left[\frac{\partial^4 U_p}{\partial z^4}\right]_{z=\varphi} \varphi_x^2 + \left[\frac{\partial^3 U_p}{\partial z^3}\right]_{z=\varphi} \varphi_{xx}$$

usw. gilt, so besteht die Differenz

$$\frac{\partial^{n-3}}{\partial x^{n-3}} \left[\frac{1}{\omega} \frac{\partial^3 U_p}{\partial z^3}\right]_{z=\varphi} - \frac{1}{\omega} \left[\frac{\partial^{n-1} U_p}{\partial x^{n-3}\, \partial z^3}\right]_{z=\varphi}$$

aus Summanden, die entweder Produkte von beschränkten Funktionen mit Ableitungen von niederer als $(n-1)$-ter Ordnung oder aber Produkte von $(n-1)$-ten Ableitungen mit Potenzen von $\varphi_x = Kt$ sind.

Der Nachweis von (30) reduziert sich damit auf den Nachweis dafür, daß

$$\left| \frac{\partial^{n-1} U_p}{\partial x^{n-3} \partial z^2}\Big|_{p_1} \right| = D(t)$$

ist. Das beweist man aber genau wie in Punkt 6 dieses Paragraphen.

9. Im Falle $n = 3$ hätte man für den Beweis von (17) nachzuweisen, daß

$$\frac{\partial^2 U_p}{\partial \nu \, \partial z}\Big|_{q_1} = D(t)$$

ist. Da in

$$\frac{\partial^2 U_p}{\partial \nu \, \partial z} = -\frac{\varphi_x}{\omega} \frac{\partial^2 U_p}{\partial x \, \partial z} - \frac{\varphi_y}{\omega} \frac{\partial^2 U_p}{\partial y \, \partial z} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 U_p}{\partial z^2}$$

die ersten beiden Summanden von der Form $D(t)$ sind, so ist nur noch zu zeigen, daß für die biharmonische Funktion $V = \frac{\partial^2 U_p}{\partial z^2}$

$$|V(q_1)| = D(t)$$

gilt. Da man aber genau wie in Punkt 6 zeigen kann, daß für $\delta_1 = \overline{q q_1}$

$$|V(q_1) - V(q)| = K \delta_1 \log \frac{a}{\delta_1} = K \delta \log \frac{a}{\delta}$$

ist, und da weiterhin nach (28)

$$V(q) = V(q) - V(p) = D(t)$$

gilt, so folgt die letzte Behauptung unmittelbar.

10. Zum Beweise von (17) im Falle $n = 2$ bemerke man zunächst, daß nach Abschnitt 4

$$\left| \frac{\partial U_p(Q)}{\partial z} - \frac{\partial U_p(q)}{\partial z} \right| \leqq K q \overline{Q^\mu} = K \vartheta^{2\mu} = \vartheta D(\vartheta)$$

gilt, wenn man μ so wählt, daß $\frac{1}{2} < \mu < 1$ ist. Nach dem Hilfssatz von § 6 folgt dann, falls die x-Achse wieder die Richtung der Projektion von $\overline{p q}$ hat, bei Beachtung von B_2

$$\frac{\partial U_p(q)}{\partial z} = \frac{\partial U_p(q)}{\partial z} - \frac{\partial U_p(p)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial U_p}{\partial z} \right]_{z = \varphi(p_1)} t$$

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial U_p}{\partial z} \right]_{z = \varphi(p_1)} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial U_p}{\partial z} \right]_{z = \varphi(p)} \right\} t = t D(t) = \vartheta D(\vartheta),$$

so daß

$$\left| \frac{\partial U_p(Q)}{\partial z} \right| \leqq \vartheta D(\vartheta)$$

ist, q. e. d.

§ 8.

Hölderbedingungen.

1. Im folgenden sollen R und U nicht wie bisher den Bedingungen A_n und B_n, sondern neuen Bedingungen $A_{n+\lambda}$ und $B_{n+\lambda}$ unterworfen sein, die aus A_n und B_n hervorgehen, indem man die dort auftretenden Funktionen $D(t)$ zu $At^\lambda (0 < \lambda < 1)$ spezialisiert, wobei A und λ von p und von der Richtung von $\overline{pq}$ unabhängig sind. Die n-ten partiellen Ableitungen $D^n\varphi$ und die $(n-1)$-ten Ableitungen $D^{n-1}[DU]_{z=\varphi}$ der Randwerte $[DU]_{z=\varphi}$ sollen also nicht wie bisher gleichmäßigen Dini-Bedingungen, sondern spezieller gleichmäßigen Hölderbedingungen genügen.

Es soll dann zum Schluß folgender Satz bewiesen werden: *Genügt R der Bedingung $A_{n+\lambda}$ und U der Bedingung $B_{n+\lambda}$ $(n \geqq 2)$, so gibt es ein Gebiet R', daß alle Punkte von R in einer Nachbarschaft von E' enthält, und eine Konstante B derart, daß für irgend zwei Punkte P und Q von R'*

$$|D^n U(Q) - D^n U(P)| \leqq Br^\lambda, \quad r = \overline{PQ}$$

gilt.

2. Den Beweis führen wir in Anlehnung an Kellog in mehreren Schritten. Es erweist sich als bequem, folgende Bezeichnungen einzuführen. Unter R' verstehe man die Menge aller Punkte von R, die von E' nicht weiter als a entfernt sind, E'' sei die Menge aller Punkte von E, deren Entfernung von E' nicht größer als $\frac{a_1}{2}$ ist, und R'' sei schließlich die Menge aller Punkte von R, deren Entfernung von E'' kleiner oder gleich $2\sqrt{2}\,a$ ist.

Unter P und Q verstehe man zwei Punkte von R'. Wird die Entfernung der Strecke $\overline{PQ}$ von E'' mit $d(\overline{PQ}, E'')$ bezeichnet, so beweisen wir den Satz zunächst unter der Voraussetzung

$$r = \overline{PQ} \leqq d(\overline{PQ}, E''). \tag{31}$$

Da nun $d(P, E'') \leqq d(P, E') \leqq a$ ist, so gilt sicher

$$r \leqq a.$$

Für die Entfernung eines beliebigen Punktes T auf $\overline{PQ}$ von E' (und damit auch von E'') besteht die Abschätzung

$$d(T, E') \leqq \overline{TP} + d(P, E') \leqq 2a.$$

Wegen $2a \leqq \frac{a_1}{4}$ muß dann die ganze Strecke $\overline{PQ}$ der Menge R'' angehören. Denn würde die Strecke mit S einen Punkt gemeinsam haben, so müßte sie mit E'' einen Punkt gemeinsam haben, so daß

$$d(\overline{PQ}, E'') = 0$$

und damit wegen (31) $P = Q$ gilt.

Wir behaupten nunmehr weiter, daß der Punkt T auf einer Normalen zu E'' liegt. Sei nämlich t der T am nächsten gelegene Punkt von E', so daß

$$\overline{tT} \leqq 2a$$

ist. Beschreibt man um t die Kugel vom Radius $4a \leqq \frac{a_1}{2}$, so enthält sie keinen Randpunkt von E, und die Entfernung ihrer Oberfläche von T ist $\geqq 3a$.

Ist nun p der T am nächsten gelegene Punkt von E, also

$$\overline{pT} \leqq 2a,$$

so liegt p auf einer Normalen zu E und wegen

$$\overline{pt} \leqq \overline{pT} + \overline{Tt} \leqq 4a \leqq \frac{a_1}{2}$$

gilt genauer, daß p auf E'' liegt.

Versteht man unter σ die Kugel vom Radius a, die E'' in p von innen her berührt, so gehört sie ganz der Menge R'' an. Ist aber Q einer ihrer Oberflächenpunkte auf der E'' zugekehrten Halbkugel, so gilt $\overline{pQ} \leqq \sqrt{2}a$ und daher für den Q am nächsten gelegenen Punkt q von S:

$$\overline{Qq} \leqq \sqrt{2}a$$

so daß

$$\overline{pq} \leqq \overline{pQ} + \overline{Qq} \leqq 2\sqrt{2}a$$

ist, und q in R'' und also auch auf E liegt.

3. Da jetzt die Voraussetzungen $A_{n+\lambda}$ und $B_{n+\lambda}$ zugrunde gelegt wurden, so folgt auf Grund des Hauptsatzes, daß die n-ten Ableitungen der Funktion U_p in R'' existieren und dort beschränkt sind.

Mit den in § 7, Punkt 5 angegebenen Mitteln ist dann leicht zu erkennen, daß für $n \geqq 2$

$$U_p(Q) = K t^{n+\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{\partial U_p(Q)}{\partial \varrho} = K t^{n-1+\lambda} \tag{32}$$

sein muß.

Versteht man nun unter T_1 einen beliebigen Punkt von σ auf der Geraden $\overline{pT}$, für dessen Abstand vom Mittelpunkt von σ

$$\varrho \geqq \frac{a}{2} \tag{33}$$

gilt, so behaupten wir, daß für eine beliebige $(n+1)$-te Ableitung

$$D^{n+1} U_p(T_1) = K(a-\varrho)^{\lambda-1} \tag{34}$$

sein muß.

Nach (5) wird nämlich

$$D^{n+1} U_p(T_1) = (\varrho^2 - a^2)\frac{1}{2a}\frac{a}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial U_p(P')}{\partial \varrho} D^{n+1} h \sin\vartheta'\, d\varphi'\, d\vartheta' +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} K \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial U_p(P')}{\partial \varrho} D^i h \sin\vartheta'\, d\varphi'\, d\vartheta' -$$

$$- (\varrho^2 - a^2)\frac{1}{2a}\frac{\varrho}{a}\frac{a}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} U_p(P') D^{n+2} h \sin\vartheta'\, d\varphi'\, d\vartheta' +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n+1} K \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} U_p(P') D^i h \sin\vartheta'\, d\varphi'\, d\vartheta'.$$

Die Integrale über ϑ' werden wieder in zwei Integrale, und zwar in die Integrale über 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und über $\frac{\pi}{2}$ bis π zerlegt. Bei Beachtung von (7), (25) und (26) erkennt man, daß die letzteren Integrale kleiner oder gleich einer Zahl K sind.

Für die ersten Integrale findet man dagegen bei Beachtung von (7), (12), (13), (32), (33) und

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta'}{r^{3-\lambda}}\, d\vartheta' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\frac{\vartheta'}{2}\cos\frac{\vartheta'}{2}}{\left\{(a-\varrho)^2 + 4a\varrho\sin^2\frac{\vartheta'}{2}\right\}^{\frac{3-\lambda}{2}}}\, d\vartheta' \tag{35}$$

$$= -\frac{2}{1-\lambda}\frac{1}{4a\varrho}\left\{(a-\varrho)^2 + 4a\varrho\sin^2\frac{\vartheta'}{2}\right\}^{-\frac{1-\lambda}{2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{a\varrho(1-\lambda)}\left\{\frac{1}{(a-\varrho)^{1-\lambda}} - \frac{1}{(a^2+\varrho^2)^{\frac{1-\lambda}{2}}}\right\}$$

$$< \frac{2}{a^2(1-\lambda)}\frac{1}{(a-\varrho)^{1-\lambda}}$$

der Reihe nach

$$\left|(a-\varrho)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_\nu(P')}{\partial \varrho}D^{n+1}\,h\sin\vartheta'\,d\varphi'\,d\vartheta'\right|$$

$$\leqq K\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\vartheta'^{n-1+\lambda}\sin\vartheta'}{r^{n+2}}\,d\vartheta' \leqq K\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\vartheta'}{r^{3-\lambda}}\,d\vartheta' \leqq K(a-\varrho)^{\lambda-1},$$

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_\nu(P')}{\partial \varrho}D^{i}\,h\sin\vartheta'\,d\varphi'\,d\vartheta'\right|$$

$$\leqq K\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{\vartheta'^{n-i+\lambda}\sin\vartheta'}{r^{i+2}}\,d\vartheta' = \begin{cases} K \text{ für } 0\leqq i\leqq n-1,\\ K(a-\varrho)^{\lambda-1} \text{ für } i=n,\end{cases}$$

denn es ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\vartheta'^{n-1+\lambda}\sin\vartheta'}{r^{n+1}}\,d\vartheta' \leqq K\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\vartheta'}{r^{2-\lambda}}\,d\vartheta' \leqq K\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\vartheta'}{\vartheta'^{1-\lambda}} = K.$$

Weiter gilt

$$\left|(a-\varrho)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}U_\nu(P')D^{n+2}\,h\sin\vartheta'\,d\varphi'\,d\vartheta'\right|$$

$$\leqq K\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\vartheta'}{r^{3-\lambda}}\,d\vartheta' \leqq K(a-\varrho)^{\lambda-1}$$

und schließlich

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}U_\nu(P')\,D^{i}\,h\sin\vartheta'\,d\varphi'\,d\vartheta'\right| \leqq \begin{cases} K \text{ für } 0\leqq i\leqq n,\\ K(a-\varrho)^{\lambda-1} \text{ für } i=n+1,\end{cases}$$

wegen

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}U_\nu(P')\,D^{n+1}\,h\sin\vartheta'\,d\varphi'\,d\vartheta'\right| \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\vartheta'}{r^{3-\lambda}}\,d\vartheta' = K(a-\varrho)^{\lambda-1}.$$

Da aber $D^{n+1} U_p$ für alle Punkte aus dem Innern von R existiert und dort stetig ist, so erkennt man nachträglich, daß (34) auch ohne die Einschränkung (33) für alle Punkte T_1 von R'' auf der Normalen in p in der Form

$$D^{n+1} U_p(T_1) = K \delta^{\lambda-1}$$

gilt, wenn $\delta = \overline{pT_1}$ ist. Unter derselben Voraussetzung ist dann auch

$$D^{n+1} U(T_1) = K \delta^{\lambda-1}.$$

Daher wird mit $d = d(\overline{PQ}, E'')$ schließlich

$$(36) \qquad |D^n U(Q) - D^n U(P)| = \left| \int_0^r \frac{\partial}{\partial s} (D^n U)\, ds \right| \leqq K d^{\lambda-1} r \leqq K r^{\lambda}$$

(wobei das Integral über die Strecke $\overline{PQ}$ erstreckt wird), was zu beweisen war.

4. Es bleibt noch der zu (31) entgegengesetzte Fall

$$(37) \qquad r = \overline{PQ} > d(\overline{PQ}, E'').$$

Dann gibt es also auf E'' einen Punkt s, so daß

$$d(s, \overline{PQ}) < r$$

und daher

$$\overline{sP} < 2r \quad \text{und} \quad \overline{sQ} < 2r$$

ist. Für die P bzw. Q am nächsten gelegenen Punkte p bzw. q von E'' gilt also

$$\overline{pP} < 2r \quad \text{bzw.} \quad \overline{qQ} < 2r,$$

so daß

$$\overline{pq} < 5r$$

ist.

Sind aber p und q zwei Punkte auf E'', deren Abstand r_1 sei, so gilt nach Kellog

$$(38) \qquad D^n U(q) - D^n U(p) = K r_1^{\lambda}.$$

Bei dem Beweise dieser Relation wird neben der unter der Voraussetzung (31) bereits bewiesenen Relation (35) die Abschätzung

$$(39) \qquad D^n U_p(P) - D^n U_p(p) = K \overline{pP}^{\lambda}$$

benutzt.

Die letztere Beziehung gewinnt man ähnlich wie (24), indem man zunächst annimmt, daß P im Innern einer Kugel σ vom Radius a liegt, die E'' von innen in p berührt, wobei

$$\overline{pP} \leqq \frac{a}{2}$$

sein soll, aus (5), (12), (13), (7), (32), (33) und (35).

Aus (38) und (39) folgt nunmehr wie behauptet

$$\begin{aligned} |D^n U(Q) - D^n U(P)| &\leqq |D^n U(Q) - D^n U(q)| + \\ &+ |D^n(p) - D^n U(P)| + |D^n U(q) - D^n U(p)| \\ &\leqq K(2r)^\lambda + K(5r)^\lambda = Kr^\lambda. \end{aligned}$$

(Eingegangen am 22. Mai 1942.)

Zum Meusnierschen Satz.

Herrn Friedrich Pfeiffer zum 60. Geburtstag gewidmet.

Von

Othmar Baier in Stuttgart.

Die folgenden Betrachtungen sind aus dem Bedürfnis entstanden, die einfache und nützliche Aussage des Meusnierschen Satzes im Unterricht auch möglichst anschaulich und mit einfachen Hilfsmitteln zur Evidenz zu bringen[1]).

1. Zunächst sei auf eine bekannte Konstruktion des Krümmungskreises in einem beliebigen Punkt eines Kegelschnitts hingewiesen:

Der Krümmungsradius r in einem Kurvenpunkt P ist bekanntlich gegeben durch

$$2r = \lim_{s \to 0} \frac{s^2}{p}. \tag{1}$$

Dabei bezeichnen $2s$ die Länge einer zur Tangente in P parallelen Sehne und p den zugehörigen Pfeil. Werden die Sehnen in ihrer Richtung parallel verschoben, bis sie durch die zur Tangente senkrechte Gerade g_1 halbiert werden (Fig. 1), dann ist P_1 Scheitel eines neuen Kegelschnitts. Da s und p

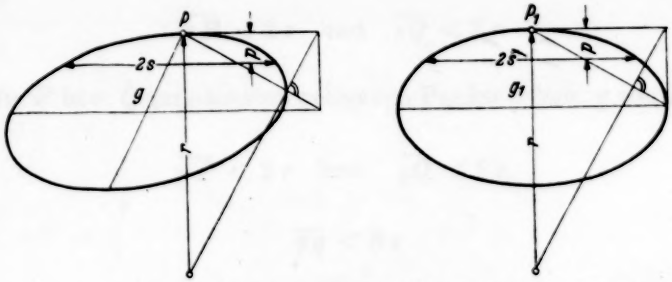

Fig. 1. Krümmungsradius in P.

dabei ungeändert bleiben, sind die Krümmungsradien in P und P_1 einander gleich und der letztere kann durch bekannte Konstruktionen jeweils leicht gefunden werden.

Die benutzte affine Transformation werde als *Scherung* bezeichnet. Eine solche ist festgelegt durch eine Richtung, in der die Längen parallel ver-

[1]) Ein anderer geometrischer Beweis bei Müller-Kruppa, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 4. Aufl., S. 224.

schoben werden, und durch zwei entsprechende Gerade g und g_1, im Raum durch zwei Ebenen ε und ε_1, die zur Scherungsrichtung nicht parallel sein dürfen. Kurven und Flächen 2. 0. gehen dabei offenbar in ebensolche derselben Art über.

2. Das obige Verfahren liefert nun einen einfachen geometrischen Beweis des Meusnierschen Satzes.

Wird eine Fläche in einem regulären Flächenpunkt P durch das Schmiegparaboloid $[P]$ mit dem Scheitel P ersetzt, dann hat bekanntlich jede Flächenkurve in P dieselbe Krümmung, wie der Schnitt ihrer Schmiegebene mit dem Schmiegparaboloid $[P]$.

Fig. 2 zeigt in Grund- und Aufriß einen Normalschnitt ε_n und einen schiefen Schnitt ε_s eines elliptischen Schmiegparaboloids $[P]$ mit den Krümmungsradien r_n und r_s. Eine erste Scherung mit zur Aufrißebene senkrechter

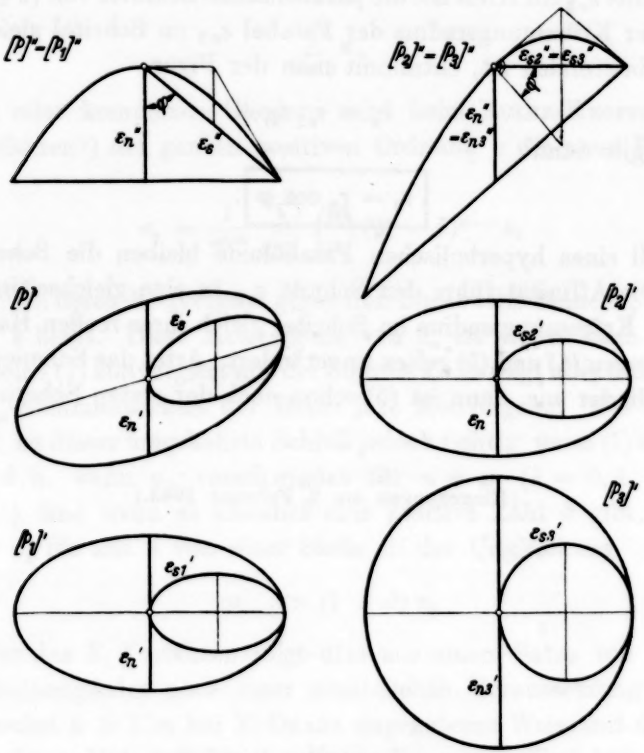

Fig. 2.
Risse von $[P]$ und $[P_1]$. Risse von $[P_2]$ und $[P_3]$.

Scherungsrichtung führt $[P]$ in ein Paraboloid $[P_1]$ über, das die Ebene ε_n als Symmetrieebene hat. Der Aufriß bleibt, der neue Grundriß ist darunter gezeichnet. ε_n bleibt unverändert, ε_{s1} hat dieselben Pfeile und Sehnen wie ε_s, also auch dieselbe Krümmung.

Eine zweite Scherung senkrecht zur Grundrißebene führe die Ebene ε_{s1} in die waagerechte Ebene ε_{s2} und $[P_1]$ in $[P_2]$ über. Der Grundriß bleibt derselbe. ε_n bleibt, ebenso sind die Sehnen von ε_{s1} und ε_{s2} gleich. Für die Pfeile gilt

(2) $$p_2 = p \sin \varphi$$

und damit

(3) $$r_{s2} = \frac{r_s}{\sin \varphi}.$$

Wird schließlich das Paraboloid $[P_2]$ durch eine affine Verzerrung senkrecht zur Aufrißebene in ein Drehparaboloid $[P_3]$ umgeformt, dann bleiben die Pfeile in ε_n und ε_{s2} unverändert, die Sehnen werden mit demselben Faktor multipliziert. Daher ist

$$r_{s3} : r_{n3} = r_{s2} : r_n.$$

Da der Schnitt ε_{s3} ein Kreis ist, die parabolischen Schnitte von $[P_3]$ kongruent sind und der Krümmungsradius der Parabel ε_{n3} im Scheitel gleich der konstanten Subnormalen ist, entnimmt man der Figur

(4) $$r_n = r_{s2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Wegen (3) gilt dann

(5) $$\boxed{r_s = r_n \cos \varphi}.$$

Im Fall eines hyperbolischen Paraboloids bleiben die Scherungen die gleichen. Die Affinität führe den Schnitt ε_{s2} in eine gleichseitige Hyperbel über, deren Krümmungsradius im Scheitel gleich ihrer reellen Halbachse ist. Die Gleichungen (4) und (5) gelten unverändert. Artet das Schmiegparaboloid in einen Zylinder aus, dann ist (5) schon nach der ersten Scherung evident.

(Eingegangen am 2. Februar 1943.)

Die Umkehrung des Euler-Knoppschen und des Borelschen Limitierungsverfahrens auf Grund einer Lückenbedingung.

Herrn Friedrich Pfeiffer zum 60. Geburtstag gewidmet.

Von

W. Meyer-König in Stuttgart.

Der Folge der Teilsummen $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ einer unendlichen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{1}$$

mit reellen oder komplexen Gliedern wird beim Euler-Knoppschen Limitierungsverfahren[1]) der ganzen positiven Ordnung p die neue Folge

$$e_n = \frac{1}{2^{pn}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (2^p - 1)^{n-\nu} s_\nu$$

zugeordnet, bei deren Konvergenz gegen den Limes s die Reihe E_p-summierbar zum Wert s heißt. Diese Konvergenz von e_n ist sicher dann vorhanden, wenn die Reihe (1) konvergiert mit der Summe s. Es folgt aber nicht allgemein aus der E_p-Summierbarkeit der Reihe ihre Konvergenz. Wie hier gezeigt werden soll, ist dieser umgekehrte Schluß jedoch richtig, wenn (1) eine Lückenreihe ist, d. h. wenn a_n verschwindet für $n \neq n_\lambda$ ($\lambda = 0, 1, \ldots$; $0 \leqq n_0 < n_1 < \cdots$), und wenn es überdies eine positive Zahl ϑ gibt, so daß die Indexfolge n_λ für alle λ von einer Stelle an der Ungleichung

$$n_{\lambda+1} > (1 + \vartheta)\, n_\lambda \tag{2}$$

genügt. Für das E_1-Verfahren folgt dies aus einem Satze von Y. Okada[2]), falls die Reihenglieder noch einer zusätzlichen Voraussetzung $a_n = O(\alpha^n)$ genügen, wobei $\alpha > 1$ in bei Y. Okada angegebener Weise mit ϑ zusammenhängt. In dieser Note soll für das Euler-Knoppsche Verfahren eine solche Zusatzvoraussetzung nicht herangezogen und allgemein für das E_p-Verfahren also der folgende Satz bewiesen werden:

---

[1]) K. Knopp, Über das Eulersche Summierungsverfahren I und II. Math. Zeitschr. **15** (1922), S. 226–253; **18** (1923), S. 125–156.

[2]) Y. Okada, On some gap theorems for Euler's method of summation of series. Bull. Amer. math. Soc. **43** (1937), S. 536–540.

Satz A. *Es sei die unendliche Reihe* (1) *eine Lückenreihe mit für* $n \neq n_\lambda$ *verschwindenden Reihengliedern und es sei* (2) *erfüllt für eine positive Zahl* ϑ *und alle* λ *von einer Stelle an. Weiter sei* (1) E_p*-summierbar zum Wert* s *für ein ganzes positives* p. *Dann konvergiert* (1) *und es ist* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

Dieser Satz steht in Analogie zu dem High-Indices-Theorem von HARDY und LITTLEWOOD[3]). Wendet man dieses nämlich auf das ABELsche Summierungsverfahren an, so ergibt sich wörtlich derselbe Satz wie Satz A, nur mit A-Summierbarkeit an Stelle von E_p-Summierbarkeit. Ob damit nun allerdings das wahre Analogon zu dem HARDY-LITTLEWOODschen Ergebnis gefunden ist, ist ungewiß und zweifelhaft, denn möglicherweise ist bei dem E_p-Verfahren nicht ϑn, sondern $\vartheta \sqrt{n}$ die einschlägige Größenordnung für die Länge des Lückenintervalls[4]).

Eng verwandt mit dem Satz A ist der folgende Satz B, der die Umkehrung des BORELschen Summierungsverfahrens betrifft:

Satz B. *Es sei die unendliche Reihe* (1) *eine Lückenreihe mit für* $n \neq n_\lambda$ *verschwindenden Reihengliedern und es sei* (2) *erfüllt für eine positive Zahl* ϑ *und alle* λ *von einer Stelle an. Weiter gebe es eine positive Zahl* α, *so daß*

$$a_n = O(\alpha^n) \quad \text{für } n \to \infty \tag{3}$$

ist. Ist dann die Reihe (1) *B-summierbar zum Wert* s, *d. h. gilt für die B-Transformation*

$$b(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!}$$ [5])

der Folge s_n *ihrer Teilsummen*

$$\lim_{x \to \infty} b(x) = s, \tag{4}$$

so konvergiert (1) *und es ist* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

Wir werden unten nur den Satz B beweisen, auf den sich der Satz A zurückführen läßt. Man erkennt dies, wenn man beachtet[1]), daß

---

[3]) G. H. HARDY u. I. E. LITTLEWOOD, A further note on the converse of ABEL's theorem. Proc. London math. Soc. (2) **25** (1926), S. 219–236, Theorem 1.

[4]) Vgl. dazu W. MEYER-KÖNIG, Limitierungsumkehrsätze mit Lückenbedingungen II. Math. Zeitschr. **45** (1939), S. 479–494, Einleitung und § 3, ferner zur analogen Frage beim BORELschen Limitierungsverfahren H. R. PITT, General Tauberian theorems. Proc. London math. Soc. (2) **44** (1938), S. 243–288, Theorem 17. — Ein Druckfehler in der erstgenannten Arbeit sei hier richtiggestellt. Auf S. 480 muß es am Schluß von Anmerkung [3]) statt $s_n = O(n^{1+\varepsilon})$ heißen $s_n = O((1+\varepsilon)^n)$.

[5]) Die Konvergenz dieser Reihe für alle $x > 0$ braucht nicht besonders vorausgesetzt zu werden, sie ist eine Folge von (3).

$a_n = o\left((2^{p+1}-1)^n\right)$ eine notwendige Bedingung für die E_p-Summierbarkeit von (1) ist und daß die E_p-Summierbarkeit einer Reihe ihre B-Summierbarkeit zum gleichen Wert nach sich zieht ($E_p \to B$-Satz). Dennoch liegt Satz B nicht tiefer als Satz A, sondern beide Sätze sind von der gleichen Rangordnung. Der direkte Beweis des Satzes A würde ganz ebenso wie der Beweis des Satzes B verlaufen und wäre nicht einfacher als der letztere.

Dem genannten Satze von Y. Okada entspricht beim Borelschen Verfahren der folgende schon ältere Satz von A. Zygmund[6]): Es seien n_λ und n'_λ zwei Indexfolgen, so daß für eine positive Zahl ϑ und alle λ von einer Stelle an $n_{\lambda+1} \geqq n'_\lambda > (1+\vartheta)\, n_\lambda$ ist und a_ν in (1) verschwindet für $n_\lambda < \nu < n'_\lambda$; dann gibt es eine von ϑ abhängige Zahl $\alpha > 1$, so daß aus $a_n = O(\alpha^n)$ und (4) die Konvergenz von s_{n_λ} für $\lambda \to \infty$ zum Wert s folgt. Während also (3) nur für irgendein $\alpha > 0$ erfüllt zu sein braucht, ist hier die Einschränkung in der Größenordnung der a_n wieder mit der Lückenlänge ϑ gekoppelt. Macht man diese stärkere Voraussetzung, so ist es für den Beweis ohne Belang, ob man wie in den Sätzen A und B zwischen den Lücken nur ein einziges nichtverschwindendes Glied zuläßt (Fall reiner Lücken), oder ob man mit A. Zygmund und Y. Okada den allgemeineren Fall betrachtet, daß überhaupt nur immer wieder Lücken auftreten. Demgegenüber sind bei der Weiterführung der Beweismethode, wie sie in der vorliegenden Note gegeben wird, die reinen Lücken von wesentlicher Bedeutung. Diese Weiterführung besteht in der Zurückführung der Frage auf die Frage nach der Auflösbarkeit eines endlichen linearen Gleichungssystems.

Wendet man den Satz A auf das Funktionselement $f(z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n_\lambda} z^{n_\lambda}$ mit dem endlichen positiven Konvergenzradius r an, so ergibt sich die Nichtfortsetzbarkeit von $f(z)$ über den Konvergenzkreis hinaus, da sonst die in der Umgebung eines regulären Randpunktes desselben vorhandene E_p-Summierbarkeit der Reihe[1]) ihre Konvergenz für Werte z mit $|z| > r$ nach sich ziehen würde. Aus Satz A (und ebenso aus Satz B) folgt also der Hadamardsche Lückensatz. Da aber die älteren Sätze sogar den Ostrowskischen Überkonvergenzsatz zur Folge haben, sei hierauf kein Gewicht gelegt. Die Sätze A und B sind rein als ein Ergebnis der Limitierungstheorie aufzufassen.

Beweis des Satzes B.

Besitzt die Folge s_n komplexe Glieder, so können wir den Satz durch gesonderte Betrachtung von Real- und Imaginärteil auf den Fall reeller Folgen zurückführen. Wir können also s_n reell voraussetzen. Wir nehmen an,

[6]) A. Zygmund, On a theorem of Ostrowski. J. London math. Soc. 6 (1931), S. 162–163.

s_n sei nicht beschränkt, und werden daraus zusammen mit den Voraussetzungen des Satzes B einen Widerspruch herleiten. Damit ist alles gezeigt, denn ist s_n beschränkt, so folgt die Behauptung auf Grund des ZYGMUNDschen Satzes (für $n_\lambda' = n_{\lambda+1}$). Wir führen den Beweis in vier Teilen.

1. Wir wählen eine ganze Zahl $\beta > 1$, die auch $\geqq \alpha$ ist, für die also wegen (3) $a_n = O(\beta^n)$ und $s_n = O(\beta^n)$ gilt. Wir setzen $v = 3\beta$. Wird dann für $x > 0$ irgendeine Funktion $w(x)$ definiert, die der Ungleichung

$$w(x) > vx \qquad (x > 0) \tag{5}$$

genügt, so ist

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} \sum_{0 \leqq \nu < w(x)} s_\nu \frac{x^\nu}{\nu!} = s. \tag{6}$$

Dies folgt aus (4), wenn wir zeigen, daß

$$R(x) = e^{-x} \sum_{\nu \geqq w(x)} s_\nu \frac{x^\nu}{\nu!} \to 0$$

strebt für $x \to \infty$. Es sei $|s_n| < M\beta^n$ für alle n (M konstant). Dann ist, wenn wir die auftretende Reihe durch eine geometrische Reihe abschätzen,

$$|R(x)| < M e^{-x} \sum_{\nu \geqq w(x)} \frac{(\beta x)^\nu}{\nu!} \leqq M e^{-x} \sum_{\nu > vx} \frac{(\beta x)^\nu}{\nu!}$$

$$< M e^{-x} \frac{(\beta x)^{[vx]+1}}{([vx]+1)!} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{3^\mu} \leqq \frac{3M\beta x}{2e^x} \frac{(\beta x)^{[vx]}}{[vx]!}.$$

Von den beiden letzten Brüchen strebt jeder für sich gegen 0 für $x \to \infty$, der zweite auf Grund der STIRLINGschen Formel. *Also gilt* (6).

2. Wir machen nun Gebrauch von der Annahme, daß s_n nicht beschränkt sei. Es gibt wegen dieser Annahme unendlich oft eine Nummer m', so daß

$$|s_\nu| < |s_{m'}| \quad \text{für} \quad 0 \leqq \nu < m'$$

ist. Notwendigerweise strebt dann $|s_{m'}| \to \infty$. Unter den $s_{m'}$ gibt es unendlich viele desselben Vorzeichens. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir dieses Vorzeichen als das negative voraussetzen, da im anderen Fall der Beweis ganz analog zu führen wäre. Wir berücksichtigen nun nur noch diejenigen unserer Nummern m', für die $s_{m'} < 0$ ist.

Wegen der Lückeneigenschaft der Reihe (1) ist

$$s_{n_\lambda} = s_{n_\lambda+1} = \cdots = s_{n_{\lambda+1}-1}, \tag{7}$$

die Glieder der Folge s_n lassen sich also zu Gruppen unter sich gleicher Glieder zusammenfassen. Wegen $s_{m'} < s_{m'-1}$ ist jedes m' Anfangsnummer für eine solche Gruppe. Wir gehen jeweils zu einer Nummer m aus der Mitte der Gruppe

über, indem wir $m = \left[\left(1+\frac{\vartheta}{2}\right) m'\right]$ setzen. Wegen (2) gibt es dann — wenn Nummern m, die noch nicht genügend groß sind, unterdrückt werden — eine Zahl τ mit $\tau < \vartheta$ und $0 < \tau < 1$, so daß

$$s_\nu = s_m \quad \text{für} \quad (1-\tau)\, m \leqq \nu \leqq (1+\tau)\, m \tag{8}$$

ist. Außerdem ist

$$s_m \leqq s_\nu < |s_m| \quad \text{für} \quad 0 \leqq \nu < m \tag{9}$$

und

$$0 > s_m \to -\infty. \tag{10}$$

Die Gruppe der wegen (7) mit s_m gleichen Glieder bestehe von s_m ab aus $s_m = s_{m+1} = \cdots = s_{m_1-1}$. Es ist wegen (8) $m_1 > (1+\tau)\, m$. Mit s_{m_1} beginnt eine neue Gruppe, ihr letztes Glied sei mit s_{m_2-1} bezeichnet. Die nächstfolgende Gruppe bestehe aus $s_{m_2} = s_{m_2+1} = \cdots = s_{m_3-1}$, usw. Wegen (2) ist

$$m_2 > (1+\vartheta)\, m_1 > (1+\vartheta)\, m, \quad m_3 > (1+\vartheta)^2 m_1 > (1+\vartheta)^2 m, \ldots,$$

also kommen wir spätestens nach einer gewissen endlichen, von m unabhängigen Anzahl von Schritten zu einem m_k mit

$$m_k > (1+\tau)\, \nu m, \tag{11}$$

und zwar sei m_k die früheste der Nummern $m_1, m_2, \ldots$, für die (11) erfüllt ist ($k \geqq 1$). Es ist daher

$$m_{k-1} \leqq (1+\tau)\, \nu m. \tag{12}$$

Ferner ist, wenn wir noch $m = m_0$ setzen,

$$s_{m_\nu} = s_{m_\nu+1} = \cdots = s_{m_{\nu+1}-1} \quad \text{für} \quad 0 \leqq \nu \leqq k-1, \tag{13}$$

$$m_{\nu+1} > (1+\tau)\, m_\nu \quad \text{für} \quad 0 \leqq \nu \leqq k-1. \tag{14}$$

Sollte sich m_k, für das sicher (11) gilt, sogar größer als $4\,\nu m$ ergeben haben, so ändern wir es nachträglich ab durch die Festsetzung $m_k = 4\,\nu m$. Die Ungleichung (14) für $\nu = k-1$ bleibt trotzdem richtig, denn wegen $\tau < 1$ und (12) ist $4\,\nu m > (1+\tau)^2 \nu m \geqq (1+\tau)\, m_{k-1}$. Wir haben damit erreicht, daß

$$m_k \leqq 4\,\nu m \tag{15}$$

ist. Die natürliche Zahl k, die zu jeder Nummer m gefunden wurde, kann für verschiedene m verschieden sein, liegt jedoch unter einer von m unabhängigen Schranke. Daher können wir unendlich viele Nummern m auswählen, zu denen dasselbe k gehört. Die restlichen m lassen wir unberücksichtigt.

Wir fassen das Ergebnis zusammen. Es bedeutet k eine gewisse natürliche Zahl, τ eine Zahl aus dem offenen Intervall $(0; 1)$. Es gibt unendlich oft eine

Nummer m und jedesmal zu ihr die weiteren Nummern $m_0 = m, m_1, \ldots, m_k$, so daß (8), (9), (10), (11), (13), (14) und (15) gilt.

Jetzt definieren wir für $x > 0$ die oben eingeführte Funktion $w(x)$. Wir setzen

$$w(x) = m_k \quad \text{für} \quad m \leqq x \leqq (1+\tau)\, m.$$

Das ist möglich, da diese Intervalle vollständig getrennt liegen und (5) in ihnen wegen (11) erfüllt ist. Auf die Definition von $w(x)$ in den Restintervallen kommt es nicht an, wir denken sie unter Berücksichtigung von (5) irgendwie durchgeführt.

3. Wir knüpfen nun an (6) an und setzen

$$t(x) = e^{-x} \sum_{0 \leqq \nu < w(x)} s_\nu \frac{x^\nu}{\nu!}.$$

Jeder unserer Nummern m ordnen wir noch die k Zahlen

$$x_\mu = \left(1 + \frac{\mu}{k}\,\tau\right) m \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, k-1)$$

zu. Dann gilt für jedes m

$$t(x_\mu) = e^{-x_\mu} \sum_{0 \leqq \nu < (1-\tau)\, m} s_\nu \frac{x_\mu^\nu}{\nu!} + e^{-x_\mu} \sum_{(1-\tau)\, m \leqq \nu < m_1} s_\nu \frac{x_\mu^\nu}{\nu!} + \\ + e^{-x_\mu} \sum_{m_1 \leqq \nu < m_k} s_\nu \frac{x_\mu^\nu}{\nu!}.$$

Möglicherweise, nämlich wenn $k = 1$ ist, fehlt der letzte Summand. Wegen (8), (13) und (10) ist

$$e^{-x_\mu} \sum_{m_1 \leqq \nu < m_k} \frac{s_\nu}{|s_m|} \frac{x_\mu^\nu}{\nu!} = e^{-x_\mu} \sum_{(1-\tau)\, m \leqq \nu < m_1} \frac{x_\mu^\nu}{\nu!} - \\ - e^{-x_\mu} \sum_{0 \leqq \nu < (1-\tau)\, m} \frac{s_\nu}{|s_m|} \frac{x_\mu^\nu}{\nu!} + \frac{t(x_\mu)}{|s_m|}$$

$$= 1 + \varepsilon(m, \mu). \tag{16}$$

Dabei wurde

$$\varepsilon(m, \mu) = -e^{-x_\mu} \sum_{0 \leqq \nu < (1-\tau)\, m} \frac{x_\mu^\nu}{\nu!} - e^{-x_\mu} \sum_{m_1 \leqq \nu} \frac{x_\mu^\nu}{\nu!} - \\ - e^{-x_\mu} \sum_{0 \leqq \nu < (1-\tau)\, m} \frac{s_\nu}{|s_m|} \frac{x_\mu^\nu}{\nu!} + \frac{t(x_\mu)}{|s_m|}$$

gesetzt. Es ist bei Berücksichtigung von (14)

$$\frac{x_\mu^{\nu+1}}{(\nu+1)!} : \frac{x_\mu^\nu}{\nu!} = \frac{x_\mu}{\nu+1} < \frac{(k+\mu\tau)\, m}{k\, m_1} < \frac{k+(k-1)\,\tau}{k\,(1+\tau)} < 1$$

für $\nu \geqq m_1$, also

$$\sum_{m_1 \leqq \nu} \frac{x_\mu^\nu}{\nu!} < \frac{x_\mu^{m_1}}{m_1!} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{k+(k-1)\tau}{k(1+\tau)}\right)^\nu = \frac{x_\mu^{m_1}}{m_1!} \frac{k(1+\tau)}{\tau}.$$

Damit ergibt sich, wenn wir noch (9) beachten,

$$(17) \quad |\varepsilon(m,\mu)| < 2e^{-x_\mu} \sum_{0 \leqq \nu < (1-\tau)m} \frac{x_\mu^\nu}{\nu!} + \frac{k(1+\tau)}{\tau} e^{-x_\mu} \frac{x_\mu^{m_1}}{m_1!} + \frac{|t(x_\mu)|}{|s_m|}.$$

Um den ersten Summanden der rechten Seite abzuschätzen, bezeichnen wir für den Augenblick mit ϱ die größte ganze Zahl, die der Ungleichung $\varrho < (1-\tau)m$ genügt. Da $\frac{x_\mu^\nu}{\nu!} > \frac{x_\mu^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$ ist für $0 < \nu \leqq \varrho$, wird jedes Glied der Summe durch $\frac{x_\mu^\varrho}{\varrho!}$ majorisiert. Die Anzahl der Glieder ist $\varrho+1$. Setzen wir noch

$$x_\mu = \varrho(1+\gamma) \quad \text{mit} \quad 1+\gamma = \frac{m(k+\mu\tau)}{k\varrho} > \frac{1}{1-\tau} = 1+\gamma_0,$$

so wird, da $\frac{1+y}{e^y}$ abnimmt für wachsendes $y > 0$, wegen $\gamma > \gamma_0 > 0$

$$e^{-x_\mu} \sum_{0 \leqq \nu < (1-\tau)m} \frac{x_\mu^\nu}{\nu!} < (\varrho+1) e^{-x_\mu} \frac{x_\mu^\varrho}{\varrho!} \simeq \frac{\varrho+1}{\sqrt{2\pi\varrho}} \left(\frac{1+\gamma}{e^\gamma}\right)^\varrho < \frac{\varrho+1}{\sqrt{2\pi\varrho}} \left(\frac{1+\gamma_0}{e^{\gamma_0}}\right)^\varrho.$$

Der letzte Ausdruck strebt gegen 0 für $\varrho \to \infty$, also auch für $m \to \infty$.

Um den zweiten Summanden der rechten Seite von (17) abzuschätzen, setzen wir für den Augenblick $x_\mu = (1-\varphi)m_1$ mit $0 < \varphi < 1$. Dann wird

$$e^{-x_\mu} \frac{x_\mu^{m_1}}{m_1!} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi m_1}} \left(\frac{1-\varphi}{e^{-\varphi}}\right)^{m_1} < \frac{1}{\sqrt{2\pi m_1}} < \frac{1}{\sqrt{2\pi m}}.$$

Dieser zweite Summand strebt also ebenfalls gegen 0 für $m \to \infty$. Dasselbe gilt wegen (6) und (10) auch von dem dritten Summanden. Wir stellen daher fest:

$$(18) \qquad \varepsilon(m,\mu) = o(1) \quad \text{für} \quad m \to \infty,$$

d. h. es ist, gleichmäßig in μ, $|\varepsilon(m,\mu)|$ beliebig klein, wenn m genügend groß ist. *Dies ist in Verbindung mit* (16) *unser vorläufiges Ergebnis*, das wir nun weiter verwerten wollen.

4. Ist $k = 1$, so lautet (16)

$$0 = 1 + \varepsilon(m, \mu).$$

Das ist unvereinbar mit (18). Aber auch für $k > 1$ wird sich ein Widerspruch ergeben. Wir schreiben in diesem Fall (16) wegen (13) in der Form

$$\sum_{\sigma=1}^{k-1} a(\mu, \sigma) \frac{\varepsilon_{m_\sigma}}{|\varepsilon_m|} = 1 + \varepsilon(m, \mu) \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, k-1) \tag{19}$$

mit

$$0 < a(\mu, \sigma) = e^{-x_\mu} \sum_{m_\sigma \leqq \nu < m_{\sigma+1}} \frac{x_\mu^\nu}{\nu!} \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, k-1).$$

(19) ist bei festem m ein System von k linearen Gleichungen für die $k-1$ Größen $\frac{\varepsilon_{m_1}}{|\varepsilon_m|}, \cdots, \frac{\varepsilon_{m_{k-1}}}{|\varepsilon_m|}$. Es muß daher die Gleichungsdeterminante D dieses Systems, d. h. die aus den Koeffizienten $a(\mu, \sigma)$ zusammen mit den rechten Seiten gebildete Determinante, verschwinden. Wir werden aber im Gegenteil nachweisen, daß D für genügend großes m von 0 verschieden ist.

Dazu untersuchen wir zuerst die aus k Zeilen und $k-1$ Spalten bestehende Matrix $M = |a(\mu, \sigma)|$. Die aus ihr durch Streichung der μ-ten Zeile entstehende Determinante bezeichnen wir mit D_μ, das Produkt der in der Hauptdiagonale von D_μ stehenden Elemente mit A_μ. Ist $k = 2$, so können wir sofort die Gleichung (22) anschreiben. Andernfalls betrachten wir irgendeine zweireihige Unterdeterminante von M:

$$\begin{vmatrix} a(\mu_1, \sigma_1) & a(\mu_1, \sigma_2) \\ a(\mu_2, \sigma_1) & a(\mu_2, \sigma_2) \end{vmatrix}, \qquad \begin{matrix} 0 \leqq \mu_1 < \mu_2 \leqq k-1, \\ 1 \leqq \sigma_1 < \sigma_2 \leqq k-1. \end{matrix}$$

Für genügend großes m ist dieselbe positiv. Es strebt nämlich, wie wir sogleich zeigen wollen, der Quotient aus Nebendiagonalglied durch Hauptdiagonalglied gegen 0 für $m \to \infty$. Es ist

$$e^{-x_\mu} \frac{x_\mu^{m_\sigma}}{m_\sigma!} < a(\mu, \sigma) < 4\,v\,m\,e^{-x_\mu} \frac{x_\mu^{m_\sigma}}{m_\sigma!}, \tag{20}$$

denn von den Summanden, aus denen sich $a(\mu, \sigma)$ zusammensetzt, ist derjenige mit Index $\nu = m_\sigma$ der größte, und die Anzahl der Summanden ist gewiß $< m_k \leqq 4\,vm$ [vgl. (15)]. Damit wird, wenn wir noch von den Abschätzungen

$$\frac{x_{\mu_1}}{x_{\mu_2}} = \frac{k + \mu_1 \tau}{k + \mu_2 \tau} \leqq \frac{k + \mu_1 \tau}{k + (\mu_1 + 1)\tau} < \frac{k + (k-1)\tau}{k + k\tau} < 1$$

und [vgl. (14)]

$$m_{\sigma_2} - m_{\sigma_1} \geqq m_{\sigma_1 + 1} - m_{\sigma_1} > \tau\, m_{\sigma_1} > \tau\, m$$

Gebrauch machen,

$$(21)\quad \frac{a(\mu_1,\sigma_2)\,a(\mu_2,\sigma_1)}{a(\mu_1,\sigma_1)\,a(\mu_2,\sigma_2)} < 16\,v^2 m^2 \left(\frac{x_{\mu_1}}{x_{\mu_2}}\right)^{m\sigma_2 - m\sigma_1}$$
$$< 16\,v^2 m^2 \left(\frac{k+(k-1)\,\tau}{k+k\,\tau}\right)^{\tau m} = o(1)$$

für $m \to \infty$. Es folgt, wie oben schon behauptet wurde, daß alle zweireihigen Unterdeterminanten der Matrix M positiv sind, wenn nur m genügend groß ist, was wir annehmen wollen. Weiter ergibt sich, daß für ein festes μ in der Determinante D_μ das Hauptdiagonalglied A_μ größer ist als der Betrag jedes anderen Gliedes. Um dies einzusehen, setzen wir für den Augenblick $D_\mu = |c_{gh}|$ mit $g, h = 1, 2, \ldots, k-1$. Ist C' ein vom Hauptdiagonalglied $C = c_{11}c_{22}\ldots c_{k-1,\,k-1}$ verschiedenes Glied, dann gibt es genau einen Index i $(1 \leqq i \leqq k-2)$, so daß $c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{i-1,\,i-1}$ Faktoren von C' sind, während c_{ii} in C' nicht vorkommt. Das in C' vorkommende Element mit erstem Index i sei c_{ij}, das mit zweitem Index i sei c_{li}; es muß dann $i \leqq j, l \leqq k-1$ sein. Wir ersetzen nun $c_{ij}c_{li}$ in C' durch $c_{ii}c_{lj}$, wodurch wir das neue Glied C'' von D_μ erhalten. Da die Unterdeterminante $c_{ii}c_{lj} - c_{ij}c_{li}$ positiv ist, ist $C'' > C'$, wobei wir immer nur die Beträge der Glieder berücksichtigen. Durch eventuelle Wiederholung dieses Prozesses kommen wir also nach endlich vielen Schritten von C' über immer größer werdende Glieder $C'', C''', \ldots$ zum Hauptdiagonalglied C, das daher wirklich das absolut genommen größte ist[7]). Wir können wegen (21) aber noch mehr sagen. Danach ist ja der Quotient $C' : C''$ und damit auch der Quotient $C' : C$ beliebig klein, wenn nur m genügend groß ist. In Anwendung auf D_μ liefert dies:

$$(22)\qquad D_\mu = A_\mu + o(A_\mu) \quad \text{für} \quad m \to \infty,$$

gleichmäßig in μ, da μ nur endlich vieler Werte fähig ist. Um nun die A_μ miteinander vergleichen zu können, bilden wir den Quotienten aus zwei benachbarten untereinanderstehenden Elementen der Matrix M. Setzen wir $\frac{\tau}{k(1+\tau)} = z$ $(0 < z < 1)$, so ergibt sich aus (20) für $\mu = 0, \ldots, k-2$; $\sigma = 1, \ldots, k-1$

$$\frac{a(\mu,\sigma)}{a(\mu+1,\sigma)} < 4\,v\,m\,e^{x_{\mu+1}-x_\mu}\left(\frac{x_\mu}{x_{\mu+1}}\right)^{m\sigma} = 4\,v\,m\,e^{\frac{\tau m}{k}}\left(\frac{k+\mu\tau}{k+(\mu+1)\,\tau}\right)^{m\sigma}$$
$$< 4\,v\,m\,e^{\frac{\tau m}{k}}\left(\frac{k+(k-1)\,\tau}{k+k\,\tau}\right)^{(1+\tau)m} = 4\,v\,m\left(\frac{1-z}{e^{-z}}\right)^{(1+\tau)m} = o(1).$$

---

[7]) Als Nebenergebnis stellen wir fest: *Sind die zweireihigen Unterdeterminanten einer n-reihigen Determinante ($n \geqq 2$) mit positiven Elementen positiv, so ist das Hauptdiagonalglied größer als der Betrag jedes anderen Gliedes.* Es genügt, diejenigen zweireihigen Unterdeterminanten als positiv vorauszusetzen, in deren linker oberer Ecke ein Element aus der Hauptdiagonale der n-reihigen Determinante steht.

Daraus folgt

$$A_\mu = o(A_0) \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, \ldots, k-1,$$

und zusammen mit (22)

$$D_\mu = o(A_0) \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{23}$$

Dabei bezieht sich das Zeichen o stets auf den Grenzübergang $m \to \infty$. Durch (18), (22) und (23) sind wir nun in der Lage, die Gleichungsdeterminante D zu beurteilen. Es ist

$$(-1)^{k-1} D = D_0 (1 + \varepsilon(m, 0)) + \sum_{\mu=1}^{k-1} (-1)^\mu D_\mu (1 + \varepsilon(m, \mu))$$

$$= (A_0 + o(A_0))(1 + o(1)) + \sum_{\mu=1}^{k-1} o(A_0)(1 + o(1)) = A_0 + o(A_0).$$

Da A_0 für alle m positiv ist, ist also D von 0 verschieden, wenn m genügend groß ist.

Damit ist Satz B bewiesen.

(Eingegangen am 16. Januar 1943.)

Neue Bedingungen für die Nichtfortsetzbarkeit von Potenzreihen.

Von

Heinrich Claus † *).

Inhalt.

Einleitung 161

§ 1. Hilfsbetrachtungen 164

§ 2. Potenzreihen mit Lücken der Größenordnung n^α mit $0 < \alpha < 1$ .. 170

§ 3. Potenzreihen mit Lücken der Größenordnung $\varphi(n)$ mit $\frac{\varphi(n)}{\log n} \to \infty$ ... 176

§ 4. Zulassung von Ausnahmekoeffizienten in den Lücken 185

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit verfolgt das Ziel, einige Bedingungen für die Nichtfortsetzbarkeit eines Funktionselements zu beweisen, die die bekannten Lückenbedingungen von HADAMARD und FABRY als Spezialfälle enthalten. Dabei wird ein Funktionselement der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} \quad (1)$$ [1])

zugrunde gelegt, dessen Konvergenzradius endlich und positiv sein soll und daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich Eins gesetzt werden kann, so daß

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1 \quad (2)$$

gilt.

*) HEINRICH CLAUS war im Sommer 1939 Assistent am Mathematischen Seminar der Universität Rostock. Er wurde am 2. 10. 1941 im Osten schwer verwundet und ist am 21. 7. 1942 an den Folgen dieser Verwundung gestorben. Die vorliegende Arbeit gibt im wesentlichen den Inhalt seiner Dissertation (D 28) wieder, die er während seiner Assistentenzeit begonnen und im Sommer 1941, unmittelbar vor seinem Einsatz im Osten, fertiggestellt hat. Für die Veröffentlichung habe ich eine teilweise Überarbeitung, insbesondere der §§ 3 und 4, vorgenommen. F. LÖSCH.

[1]) Diese Form des Funktionselements ist unwesentlich, aber für das Folgende etwas bequemer als die Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Der Hadamardsche Lückensatz besagt in einer bereits von Hadamard angegebenen etwas verschärften Form: Enthält die Folge (a_n) der Koeffizienten von $f(z)$ eine ausgezeichnete Teilfolge

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_\nu}, \ldots \quad \text{mit} \quad \lim_{\nu \to \infty} |a_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu}} = 1 \tag{3}$$

derart, daß für ein ϑ aus $0 < \vartheta < 1$ jeweils alle Koeffizienten a_n mit $n_\nu(1-\vartheta) \leqq n \leqq n_\nu(1+\vartheta)$ außer a_{n_ν} selbst verschwinden, so ist $f(z)$ nicht in das Innere des Einheitskreises fortsetzbar. Es ist selbstverständlich, daß sich an der Aussage dieses Satzes nichts ändert, wenn die Lückenbedingung dahin abgeschwächt wird, daß die in den Umgebungen $n_\nu(1-\vartheta) \leqq n \leqq n_\nu(1+\vartheta)$ der a_{n_ν} stehenden Koeffizienten a_n außer a_{n_ν} selbst nur „unwesentlich" sein sollen in dem Sinne, daß für ihre Gesamtheit $\overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$ gilt, so daß sie also das Regularitätsverhalten von $f(z)$ längs $|z| = 1$ nicht beeinflussen. Die Nichtfortsetzbarkeit von $f(z)$ kann aber auch dann noch behauptet werden, wenn in den Umgebungen $n_\nu(1-\vartheta) \leqq n \leqq n_\nu(1+\vartheta)$ der a_{n_ν} nichtverschwindende Ausnahmekoeffizienten a_n vorhanden sind, die „wesentlich" sind in dem Sinne, daß für ihre Gesamtheit $\overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$ gilt, es darf dann nur die Anzahl dieser Ausnahmekoeffizienten nicht zu groß sein. Insbesondere ist nach Fabry die Nichtfortsetzbarkeit von $f(z)$ noch gesichert, wenn für die Anzahl $\psi(n_\nu)$ der in der Umgebung von a_{n_ν} auftretenden Ausnahmekoeffizienten die Beziehung

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\psi(n_\nu)}{n_\nu} = 0 \tag{4}$$

besteht. Weiter lassen sich in den genannten Sätzen die „zweiseitigen" Bedingungen durch „einseitige" ersetzen: Um die Nichtfortsetzbarkeit von $f(z)$ zu garantieren, genügt es, das Verschwinden der a_n mit $n_\nu(1-\vartheta) \leqq n < n_\nu$ *oder* mit $n_\nu < n \leqq n_\nu(1+\vartheta)$ zu fordern, und in den dadurch charakterisierten einseitigen Umgebungen der a_{n_ν} dürfen außer unwesentlichen noch wesentliche nichtverschwindende Ausnahmekoeffizienten in dem durch die Fabrysche Bedingung (4) gegebenen Umfange zugelassen werden [2]).

Es ist dagegen nicht möglich, die angeführten Sätze in der Weise zu verschärfen, daß man allgemein die durch ϑn gegebene Größenordnung der Lückenlängen reduziert. Vielmehr gibt es zu jeder gleichzeitig mit n gegen ∞ strebenden positiven Funktion $\varphi(n)$, für die nur $\frac{\varphi(n)}{n} \to 0$ gilt, Funktions-

[2]) Für Literaturangaben zu den vorstehend genannten Sätzen vgl. etwa F. Lösch, Über nichtfortsetzbare Potenzreihen mit Lücken. Math. Zeitschr. **32** (1930), S. 415–421, Fußnoten [1]) bis [5]).

elemente (1), die in das Innere des Einheitskreises hinein fortsetzbar sind, obwohl ihre Koeffizientenfolge (a_n) eine ausgezeichnete Teilfolge (3) enthält, für die jeweils alle a_n mit $n_\nu - \varphi(n_\nu) \leqq n \leqq n_\nu + \varphi(n_\nu)$ außer a_{n_ν} selbst verschwinden[3]). Will man daher zu Nichtfortsetzbarkeitskriterien gelangen, die nur Lücken von kleinerer Größenordnung als ϑn fordern, so müssen zu der Lückenbedingung notwendig weitere Voraussetzungen über die Koeffizientenfolge hinzutreten. Wir werden zeigen, daß man dabei mit einer Voraussetzung über die Größenordnung der gesamten Koeffizientenfolge (a_n) auskommt, die in einfachster Weise mit der Voraussetzung über die Größenordnung der geforderten Lücken zusammenhängt[4]). Ist $\varphi(n)$ eine positive, gleichzeitig mit n monoton gegen ∞ strebende Funktion, die (außer in § 3 angegebenen unwesentlichen Voraussetzungen) den Bedingungen $\frac{\varphi(n)}{n} \to 0$, $\frac{\varphi(n)}{\log n} \to \infty$ für $n \to \infty$ genügt, so ergibt sich zunächst in Analogie zum Hadamardschen Lückensatz: Erfüllen die Koeffizienten (a_n) des Funktionselements (1) die über (2) hinausgehende Bedingung

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{\varphi(n)}} = 1$$

und enthält die Koeffizientenfolge eine ausgezeichnete Teilfolge

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots a_{n_\nu}, \ldots \quad \text{mit} \quad \lim_{\nu \to \infty} |a_{n_\nu}|^{\frac{1}{\varphi(n_\nu)}} = 1$$

derart, daß jeweils alle a_n mit $n_\nu - \varphi(n_\nu) \leqq n \leqq n_\nu + \varphi(n_\nu)$ außer a_{n_ν} selbst verschwinden, so ist $f(z)$ nicht in das Innere des Einheitskreises fortsetzbar. Die Behauptung des Satzes bleibt bestehen, wenn die Lückenbedingung dahin abgeschwächt wird, daß die Gesamtheit aller a_n, welche den Umgebungen $n_\nu - \varphi(n_\nu) \leqq n \leqq n_\nu + \varphi(n_\nu)$ der Koeffizienten a_{n_ν} angehören, von den a_{n_ν} selbst abgesehen, die Beziehung

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{\varphi(n_\nu)}} < 1$$

erfüllen (wobei zu beachten ist, daß diese Koeffizienten sehr wohl in dem obengenannten Sinne „wesentlich" sein können). Darüber hinaus gilt aber in Analogie zum Fabryschen Satze, daß die Nichtfortsetzbarkeit von $f(z)$

---

[3]) Vgl. F. Lösch, a. a. O. [2]), Fußnote [6]).

[4]) Derartige Bedingungen finden sich bereits bei F. Lösch, a. a. O. [2]); vgl. daselbst auch Fußnote [7]). Die im folgenden bewiesenen neuen Bedingungen hat mir Herr Prof. F. Lösch (ohne die Voraussetzung $\frac{\varphi(n)}{\log n} \to \infty$, von der bisher nicht entschieden werden konnte, ob sie notwendig ist) als Vermutung genannt; er hat mich auch bei der Durchführung der Beweise verschiedentlich unterstützt.

auch dann noch garantiert ist, wenn in den Umgebungen $n_\nu - \varphi(n_\nu) \leqq n \leqq n_\nu + \varphi(n_\nu)$ der Koeffizienten a_{n_ν} nichtverschwindende Ausnahmekoeffizienten a_n vorhanden sind, für deren Gesamtheit

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{\varphi(n_\nu)}} = 1$$

gilt, wenn nur die Anzahl $\psi(n_\nu)$ der in der Umgebung von a_{n_ν} stehenden Ausnahmekoeffizienten die Beziehung

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\psi(n_\nu)}{\varphi(n_\nu)} = 0$$

erfüllt. Endlich lassen sich wieder wie bei den früheren Sätzen auch in den vorstehenden Nichtfortsetzbarkeitskriterien die „zweiseitigen" Bedingungen durch „einseitige" ersetzen.

In § 1 werden zunächst einige Hilfsbetrachtungen über gewisse Polynome, die mit den zu einer Kurve gehörigen Tschebyscheffschen Polynomen eng zusammenhängen, und über Reihentransformationen angestellt, die für die Beweisführungen grundlegend sind. § 2 bringt sodann das Analogon des Hadamardschen Lückensatzes für den Spezialfall $\varphi(n) = n^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, der sich verhältnismäßig einfach erledigt, und zwar gleich in der „einseitigen" Form. In § 3 wird der allgemeine Fall, wieder in der einseitigen Form, behandelt, und in § 4 wird schließlich noch der Übergang zum Analogon des Fabryschen Satzes durchgeführt.

§ 1.

Hilfsbetrachtungen.

Es sollen zunächst einige — zum Teil bekannte — Tatsachen zusammengestellt werden, die sich einerseits auf gewisse Polynome, andererseits auf Reihentransformationen beziehen und die für die späteren Betrachtungen grundlegend sind:

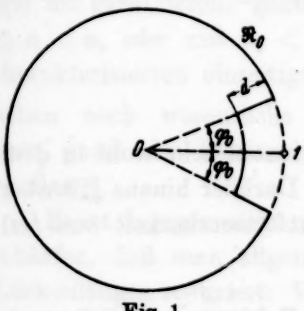

Fig. 1.

I. Ist das Funktionselement

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} \quad \text{mit} \quad \overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$$

im Randpunkt $z = 1$ des Konvergenzgebietes regulär, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}_0$ einen den Punkt ∞ im Innern enthaltenden Bereich, dessen Rand $\mathfrak{R}_0$ von Kurvenstücken der Form

$$(2) \qquad \begin{aligned} z &= e^{i\varphi} && (\varphi_0 \leqq \varphi \leqq 2\pi - \varphi_0 \text{ mit } 0 < \varphi_0 < \pi), \\ z &= r\, e^{\pm i\varphi_0} && (1 - d \leqq r \leqq 1 \text{ mit } 0 < d < 1), \\ z &= (1-d)\, e^{i\varphi} && (-\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_0) \end{aligned}$$

gebildet wird (vgl. Fig. 1) und der so beschaffen ist, daß $f(z)$ im Innern von $\mathfrak{B}_0$ sowie in den durch

$$z = r\,e^{\pm i\varphi_0}\,(1-d \leqq r \leqq 1) \quad \text{und} \quad z = (1-d)\,e^{i\varphi}\,(-\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_0)$$

gegebenen Randpunkten von $\mathfrak{B}_0$ regulär ist. Allgemeiner bezeichnen wir dann für $\delta \geqq 0$ mit $\mathfrak{B}_\delta$ denjenigen den Punkt ∞ im Innern enthaltenden Bereich, dessen Rand $\mathfrak{R}_\delta$ von den Kurvenstücken

$$\begin{aligned} z &= (1+\delta)\,e^{i\varphi} && (\varphi_0 \leqq \varphi \leqq 2\pi - \varphi_0),\\ z &= r\,e^{\pm i\varphi_0} && (1-d \leqq r \leqq 1+\delta),\\ z &= (1-d)\,e^{i\varphi} && (-\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_0) \end{aligned}$$

gebildet wird (vgl. Fig. 2). Für $\delta = 0$ ergibt sich wieder der oben geschilderte Bereich $\mathfrak{B}_0$. Für $\delta > 0$ liegt $\mathfrak{B}_\delta$ in $\mathfrak{B}_0$ und $f(z)$ ist im Innern und auf dem Rand von $\mathfrak{B}_\delta$ regulär.

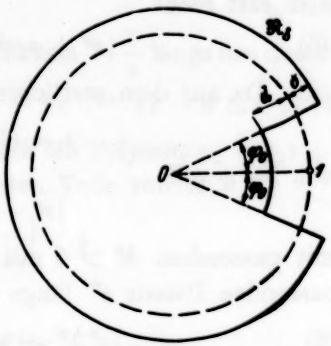

Fig. 2.

Bettet man $\mathfrak{R}_0$ in ein Gebiet $\mathfrak{G}$ ein, so gehört diesem Gebiet auch jede Kurve $\mathfrak{R}_\delta$ mit hinreichend kleinem $\delta > 0$ an. Für uns wird es dabei wesentlich sein, daß sich $\mathfrak{G}$ gemäß den beiden folgenden Hilfssätzen wählen läßt[5]):

Hilfssatz 1. *Zu der Kurve $\mathfrak{R}_0$ gibt es ein dieselbe enthaltendes Gebiet $\mathfrak{G}$, für das eine Folge von Polynomen $Q_0(z), Q_1(z), \ldots, Q_n(z), \ldots$ der Form*

$$Q_n(z) = z^n + q_1^{(n)} z^{n-1} + \cdots + q_n^{(n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

ein Θ mit $0 < \Theta < 1$ und ein $n_0 > 0$ existiert derart, daß in $\mathfrak{G}$

$$|Q_n(z)| \leqq \Theta^n \quad \text{für } n \geqq n_0$$

gilt.

Beweis. a) Wir zeigen zunächst, daß es ein Polynom

$$Q(z) = z^q + a_1 z^{q-1} + \cdots + a_q \tag{3}$$

gibt, für das längs $\mathfrak{R}_0$ und sogar in einem $\mathfrak{R}_0$ enthaltenden Gebiet $\mathfrak{G}$ die Abschätzung

$$|Q(z)| < \tfrac{1}{2} \tag{4}$$

gilt. Dazu bemerken wir, daß sich nach Runge die Funktion $-z$ längs des durch

$$z = e^{i\varphi}\,(\varphi_0 \leqq \varphi \leqq 2\pi - \varphi_0) \quad \text{und} \quad z = r\,e^{\pm i\varphi_0}\,(1-d \leqq r \leqq 1)$$

gegebenen Teils der Kurve $\mathfrak{R}_0$ (weil sich dieser Teil in ein den Punkt $z = 0$ nicht enthaltendes, einfach zusammenhängendes Regularitätsgebiet von $-z$

[5]) Vgl. dazu G. Szegö, Tschebyscheffsche Polynome und nichtfortsetzbare Potenzreihen. Math. Ann. 87 (1922), S. 90–111.

einbetten läßt) beliebig genau durch Polynome in $\frac{1}{z}$ approximieren läßt. Es existiert also z. B. ein derartiges Polynom $a_1 + \frac{a_2}{z} + \cdots + \frac{a_p}{z^{p-1}}$, mit dem längs des genannten Teils von $\mathfrak{R}_0$

$$\left| z + a_1 + \frac{a_2}{z} + \cdots + \frac{a_p}{z^{p-1}} \right| < \frac{1}{2},$$

also erst recht

$$|z^p + a_1 z^{p-1} + a_2 z^{p-2} + \cdots + a_p| < \tfrac{1}{2} \tag{5}$$

gilt. Da auf dem restlichen Teil

$$z = (1 - d)\, e^{i\varphi} \quad (-\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_0)$$

von $\mathfrak{R}_0$ gewiß

$$|z^p + a_1 z^{p-1} + \cdots + a_p| < M$$

mit passendem $M > 0$ gilt, so ergibt sich durch Multiplikation mit einer passenden Potenz $z^{p'}$ längs dieses Teiles von $\mathfrak{R}_0$

$$|z^{p+p'} + a_1 z^{p+p'-1} + \cdots + a_p z^{p'}| < \tfrac{1}{2}. \tag{6}$$

Die Abschätzungen (5) und (6) besagen zusammen, daß für das Polynom

$$Q(z) = z^q + a_1 z^{q-1} + \cdots + a_p z^{q-p} \qquad (q = p + p')$$

längs der ganzen Kurve $\mathfrak{R}_0$ die Abschätzung

$$|Q(z)| < \tfrac{1}{2}$$

gilt. Und diese Abschätzung gilt endlich aus Stetigkeitsgründen auch noch in einem $\mathfrak{R}_0$ enthaltenden Gebiet $\mathfrak{G}$.

b) Nun schließen wir vollends so weiter: Wir bilden die Folge von Polynomen $Q_0(z), Q_1(z), \ldots, Q_n(z), \ldots$ mit

$$Q_n(z) = z^t Q^s(z) \quad \text{für } n = sq + t \quad (0 \leqq t < q).$$

Da $\mathfrak{G}$ vermöge (4) gewiß beschränkt ist, so gilt in $\mathfrak{G}$

$$|z^{q-1}| \leqq K$$

für eine passende Schranke $K\,(>1)$ und damit ergibt sich

$$|Q_n(z)| = |Q_{sq+t}(z)| \leqq K\,|Q(z)|^s \leqq K\left(\tfrac{1}{2}\right)^s \leqq K\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{n-t}{q}} < 2K\left(\sqrt[q]{\tfrac{1}{2}}\right)^n.$$

Hieraus entnimmt man unmittelbar die Behauptung des Satzes.

Hilfssatz 2. *Zu der Kurve $\mathfrak{R}_0$ gibt es ein dieselbe enthaltendes Gebiet $\mathfrak{G}$, für das eine Folge von Polynomen $P_0(z), P_1(z), \ldots, P_n(z), \ldots$ der Form*

$$P_n(z) = z^{m_n} + p^{(n)}_{n-m_{n-1}} z^{m_n+1} + \cdots + p^{(n)}_0 z^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

ein Θ mit $0 < \Theta < 1$ und ein $n_0 > 0$ existiert derart, daß in $\mathfrak{G}$

$$|P_n(z)| \leqq \Theta^n \quad \text{für } n \geqq n_0$$

gilt.

Beweis. a) Ähnlich wie beim Beweis des Hilfssatzes 1 zeigen wir hier zunächst, daß es ein Polynom

$$P(z) = z^{q-p} + c_1 z^{q-p+1} + \cdots + c_p z^q \qquad (q - p \geqq 0)$$

gibt, für das längs $\mathfrak{R}_0$ und sogar in einem $\mathfrak{R}_0$ enthaltenden Gebiet $\mathfrak{G}$ die Abschätzung

$$|P(z)| < \tfrac{1}{2}$$

gilt. Dazu approximieren wir nach Runge die Funktion $-\frac{1}{z}$ längs des durch

$$z = e^{i\varphi} \ (\varphi_0 \leqq \varphi \leqq 2\pi - \varphi_0) \quad \text{und} \quad z = r e^{\pm i\varphi_0} \ (1 - d \leqq r \leqq 1)$$

gegebenen Teils von $\mathfrak{R}_0$ auf die Genauigkeit $\frac{1}{2}$ durch ein Polynom $c_1 + c_2 z + \cdots + c_p z^{p-1}$. Es gilt dann längs des genannten Teils von $\mathfrak{R}_0$

$$\left| \frac{1}{z} + c_1 + c_2 z + \cdots + c_p z^{p-1} \right| < \tfrac{1}{2}$$

und damit erst recht

$$|1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_p z^p| < \tfrac{1}{2}. \tag{7}$$

Wie beim Beweis des Hilfssatzes 1 schließt man nun durch Multiplikation mit einer passenden Potenz $z^{p'}$ weiter, daß längs des restlichen Teils von $\mathfrak{R}_0$

$$|z^{p'} + c_1 z^{p'+1} + \cdots + c_p z^{p'+p}| < \tfrac{1}{2} \tag{8}$$

gilt. Die Abschätzungen (7) und (8) besagen zusammen, daß für das Polynom

$$P(z) = z^{q-p} + c_1 z^{q-p+1} + \cdots + c_p z^q \qquad (q = p + p')$$

die Abschätzung

$$|P(z)| < \tfrac{1}{2}$$

längs der ganzen Kurve $\mathfrak{R}_0$ und aus Stetigkeitsgründen auch noch in einem $\mathfrak{R}_0$ enthaltenden Gebiet $\mathfrak{G}$ gilt.

b) Die Existenz der im Satz behaupteten Polynomfolge $P_0(z), P_1(z), \ldots, P_n(z), \ldots$ erschließt man nun vollends genau wie beim vorhergehenden Satz.

II. Bei der Untersuchung des Regularitätsverhaltens des Funktionselements (1) im Randpunkt $z = 1$ des Konvergenzgebietes werden wir uns wiederholt einer geeigneten sogenannten „*E-Transformation*“ bedienen[6]). Sie besteht darin, daß man in

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$$

an Stelle von $\frac{1}{z}$ den Ausdruck

$$\frac{1}{z} E(u) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{2}(1 + u) u^k \qquad (k \text{ beliebige natürliche Zahl})$$

[6]) Vgl. dazu F. Lösch, Lückensätze und Überkonvergenz bei zweifachen Potenzreihen. Math. Zeitschr. 36 (1932), S. 202–262, insbes. S. 207–213.

einführt, nach Potenzen von u umordnet und in der so entstehenden Reihe

$$F(u;z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m\left(\frac{1}{z}\right) u^m$$

noch $u = 1$ setzt. Es ergibt sich so eine Polynomreihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m\left(\frac{1}{z}\right), \tag{9}$$

die „E-Transformation" der ursprünglichen Reihe (1).

Wir haben zunächst einige Tatsachen über den Bau der Polynome $A_m\left(\frac{1}{z}\right)$ zusammenzustellen: Allgemein ist $A_m\left(\frac{1}{z}\right)$ von der Form

$$A_m\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{\mu=m'}^{m''} \Gamma_m^{\mu} \frac{a_\mu}{z^{\mu+1}},$$

wo die Gewichte Γ_m^{μ}, mit denen die Glieder $a_\mu/z^{\mu+1}$ von $f(z)$ eingehen, gewisse positive Zahlen sind. Wir werden für unsere Zwecke speziell die Folge der Polynome

$$A_{n^*}\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{mit} \quad n^* = k(n+1) + \left[\frac{n+1}{2}\right] \text{ für } n = 0, 1, 2, \ldots$$

heranziehen; über ihren Bau benötigen wir die in den folgenden Satz zusammengefaßten Tatsachen:

Hilfssatz 3. a) *Das Polynom $A_{n^*}\left(\frac{1}{z}\right)$ enthält das Glied a_n/z^{n+1}. Daneben enthält $A_{n^*}\left(\frac{1}{z}\right)$ für beliebiges $\vartheta > 0$, falls $k > \frac{1}{\vartheta}$ gewählt wird, nur Glieder $a_\mu/z^{\mu+1}$ mit*

$$n(1-\vartheta) \leqq \mu \leqq n(1+\vartheta).$$

b) *Das Gewicht $\Gamma_{n^*}^{n}$, mit dem a_n/z^{n+1} in das Polynom $A_{n^*}\left(\frac{1}{z}\right)$ eingeht, erfüllt für genügend großes n mit zwei positiven Konstanten α und α' $(\alpha < \alpha')$ die Ungleichungen*

$$\frac{\alpha}{\sqrt{n}} < \Gamma_{n^*}^{n} < \frac{\alpha'}{\sqrt{n}}.$$

c) *Die Summe der Gewichte $\Gamma_{n^*}^{n}$ in $A_{n^*}\left(\frac{1}{z}\right)$ — allgemeiner die Summe der Gewichte Γ_m^{μ} in einem beliebigen Polynom $A_m\left(\frac{1}{z}\right)$ — ist kleiner als Eins.*

Beweis. a) Tritt $a_\mu/z^{\mu+1}$ in $A_{n^*}\left(\frac{1}{z}\right)$ auf, so muß nach der Definition der Polynome $A_m\left(\frac{1}{z}\right)$ offenbar $k(\mu+1) \leqq n^*$ und $(k+1)(\mu+1) \geqq n^*$ sein. Hieraus entnimmt man mühelos die Behauptung.

b) Das Glied a_n/z^{n+1} besitzt in $A_{n^*}\left(\frac{1}{z}\right)$ das Gewicht

$$\Gamma_{n^*}^{n} = \frac{1}{2^{n+1}}\binom{n+1}{\left[\frac{n+1}{2}\right]}.$$

Hieraus folgt die behauptete Abschätzung auf Grund der Ungleichungen

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{en} < n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n e\sqrt{n}.$$

c) Um allgemein die Summe der Gewichte in $A_m\left(\frac{1}{z}\right)$ zu erhalten, bildet man

$$S_k(u) = 1 + \tfrac{1}{2}(1+u)u^k + [\tfrac{1}{2}(1+u)u^k]^2 + \cdots + [\tfrac{1}{2}(1+u)u^k]^n + \cdots.$$

Ordnet man hier nach Potenzen von u um, so erscheint die gesuchte Summe in der umgeordneten Reihe als Koeffizient von u^m.

Faßt man zunächst den Fall $k = 1$ ins Auge, so erhält man

$$\begin{aligned} S_1(u) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}(1+u)u} &= \frac{1}{(1-u)(1+\frac{1}{2}u)} \\ &= (1+u+u^2+\cdots)\left(1-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{2^2}-\cdots\right) \\ &= 1+\left(1-\frac{1}{2}\right)u+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right)u^2+\cdots+ \\ &\quad +\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\cdots+(-1)^m\frac{1}{2^m}\right)u^m+\cdots. \end{aligned}$$

Es ist also

$$\sum_{\mu} \Gamma_m^{\mu} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \cdots + (-1)^m \frac{1}{2^m} < 1.$$

Um auch den Fall $k > 1$ zu erledigen, vergleicht man die für beliebiges ganzes $k > 1$ gebildeten Polynome $A_m\left(\frac{1}{z}\right)$ mit den für $k = 1$ gebildeten. Man erkennt dann ohne weiteres, daß jedes zu $k > 1$ gehörige Polynom eine Gewichtssumme besitzt, die kleiner ist als die Gewichtssumme eines geeigneten zu $k = 1$ gehörigen Polynoms. Die Behauptung des Satzes gilt also auch für $k > 1$.

Was nun weiter die funktionentheoretischen Eigenschaften der E-Transformation (9) betrifft, so kommt ihre Bedeutung für unsere Zwecke in dem folgenden Satz zum Ausdruck:

Hilfssatz 4. *Das Funktionselement $f(z)$ ist im Punkte z_0 auf dem Rand des Konvergenzgebietes $|z| > 1$ dann und nur dann regulär, wenn es eine Umgebung $\mathfrak{U}(z_0)$ von z_0 und eine positive Zahl $h < 1$ gibt derart, daß für alle Punkte z aus $\mathfrak{U}(z_0)$ gilt:*

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{\left|A_m\left(\frac{1}{z}\right)\right|} \leqq h < 1.$$

Die E-Transformation (9) *von* $f(z)$ *konvergiert stets in* $|z| > 1$ *und stimmt dort mit* $f(z)$ *überein; ist* $f(z)$ *in* z_0 *regulär, so konvergiert sie überdies normal in* $\mathfrak{U}(z_0)$ *und stellt dort die analytische Fortsetzung von* $f(z)$ *dar.*

Wir werden diesen Satz, für dessen Beweis auf die in Fußnote[6]) genannte Arbeit verwiesen sei, in der folgenden Weise anwenden: Für beliebiges ϑ mit $0 < \vartheta < 1$ sei $n_1 < n_2 < \cdots < n_\nu < \cdots$ eine Folge natürlicher Zahlen, für die

$$n_\nu(1+\vartheta) < n_{\nu+1}(1-\vartheta) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

gelte. Wendet man dann auf das Funktionselement (1) die beschriebene E-Transformation mit $k > \frac{1}{\vartheta}$ an und bildet

$$f^*(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{n_\nu^*}\left(\frac{1}{z}\right), \tag{10}$$

so erhält man nach Hilfssatz 3a) durch Aufspalten der Polynome $A_{n_\nu^*}\left(\frac{1}{z}\right)$ in ihre einzelnen Glieder eine Potenzreihe. Nach Hilfssatz 3c) ist diese Potenzreihe gewiß in $|z| > 1$ konvergent, und nach Hilfssatz 3b) ist $|z| > 1$ ihr genaues Konvergenzgebiet, falls die Indizes n_ν so gewählt sind, daß

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} |a_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu}} = 1$$

gilt. Ist ferner $f(z)$ im Punkte $z = 1$ regulär, so gilt dasselbe von $f^*(z)$, da in diesem Falle die Reihe (10) nach Hilfssatz 4 in einer Umgebung von $z = 1$ normal konvergiert. Läßt sich danach zeigen, daß $f^*(z)$ an der Stelle $z = 1$ singulär ist, so gilt dasselbe von $f(z)$.

§ 2.

Potenzreihen mit Lücken der Größenordnung n^α mit $0 < \alpha < 1$.

In Analogie zum Hadamardschen Lückensatz mit einseitiger Lückenbedingung (vgl. die Einleitung) läßt sich für Potenzreihen mit Lücken der Größenordnung $n^\alpha (0 < \alpha < 1)$ der folgende Satz aussprechen:

Satz 1. *Das in* $|z| > 1$ *reguläre Funktionselement*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$$

ist nicht in das Innere des Einheitskreises hinein fortsetzbar, wenn seine Koeffizienten für ein α *mit* $0 < \alpha < 1$ *die folgenden Bedingungen erfüllen:*

a) Es ist $\overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{n^\alpha}} = 1.$

b) Die Folge (a_n) enthält eine ausgezeichnete Teilfolge

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_\nu}, \ldots \quad \textit{mit} \quad \lim_{\nu \to \infty} |a_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu^\alpha}} = 1$$

derart, daß für die Gesamtheit aller a_n aus den linksseitigen Umgebungen

$$n_\nu - n_\nu^\alpha \leqq n < n_\nu \quad \textit{der } a_{n_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

oder für die Gesamtheit aller a_n aus den rechtsseitigen Umgebungen

$$n_\nu < n \leqq n_\nu + n_\nu^\alpha \quad \textit{der } a_{n_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

die Limesbeziehung

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{n_\nu^\alpha}} < 1$$

besteht.

Beweis. Da aus der Voraussetzung a) gewiß

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$$

folgt, so hat das Funktionselement $f(z)$ den Konvergenzradius 1. Wir zeigen, daß $z = 1$ ein singulärer Punkt von $f(z)$ ist. Da sich alle Voraussetzungen nur auf die Beträge der Koeffizienten a_n beziehen, folgt hieraus unmittelbar die Nichtfortsetzbarkeit von $f(z)$.

1. Wir schätzen zunächst das Maximum des absoluten Betrages von $f(z)$ längs eines Kreises $|z| = 1 + \delta$ $(\delta > 0)$ ab. Bezeichnen wir dieses Maximum mit $M(1+\delta)$, so gilt

$$M(1+\delta) \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{(1+\delta)^n}.$$

Nach Voraussetzung a) ist bei beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ von einem Index $N = N(\varepsilon)$ ab

$$|a_n| \leqq e^{\varepsilon n^\alpha},$$

also

$$(1) \quad M(1+\delta) \leqq \sum_{n=0}^{N} \frac{|a_n|}{(1+\delta)^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|a_n|}{(1+\delta)^n} < \sum_{n=0}^{N} \frac{|a_n|}{(1+\delta)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\varepsilon n^\alpha}}{(1+\delta)^n}.$$

Für die erste Summe genügt die für alle $\delta > 0$ gültige Abschätzung

$$(2) \qquad M_1(1+\delta) = \sum_{n=0}^{N} \frac{|a_n|}{(1+\delta)^n} \leqq \sum_{n=0}^{N} |a_n| = K.$$

Zu behandeln ist also noch

$$(3) \qquad M_2(1+\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\varepsilon n^\alpha}}{(1+\delta)^n}.$$

Um für diese Reihe eine ausreichende Abschätzung zu erhalten, bezeichnen wir ihr Maximalglied mit $m(1+\delta)$ und zerlegen gemäß

$$M_2(1+\delta) \leqq (n_0+1)\cdot m(1+\delta) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{e^{\varepsilon n^\alpha}}{(1+\delta)^n}, \tag{4}$$

wobei wir über n_0 geeignet verfügen werden.

Zur Bestimmung des Maximalgliedes $m(1+\delta)$ betrachten wir die Funktion

$$y = \frac{e^{\varepsilon x^\alpha}}{(1+\delta)^x} \quad \text{für } x \geqq 0.$$

Die Ableitung

$$y' = y\{\varepsilon\alpha x^{\alpha-1} - \log(1+\delta)\}$$

zeigt, daß die Funktion an der Stelle

$$x_1 = \left\{\frac{\varepsilon\alpha}{\log(1+\delta)}\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

ihr Maximum besitzt; links von der Stelle nimmt sie monoton zu ($y' > 0$), rechts davon nimmt sie monoton ab ($y' < 0$). Für $m(1+\delta)$ findet man damit

$$m(1+\delta) \leqq \frac{\exp\{\varepsilon x_1^\alpha\}}{(1+\delta)^{x_1}} = \exp\left\{\varepsilon(1-\alpha)\left(\frac{\varepsilon\alpha}{\log(1+\delta)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\} \tag{5}$$

und an Stelle von (4) kann man, wenn nur $n_0 \geqq x_1$ angenommen wird, schreiben

$$M_2(1+\delta) \leqq (n_0+1)\exp\left\{\varepsilon(1-\alpha)\left(\frac{\varepsilon\alpha}{\log(1+\delta)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\} + \tag{6}$$

$$+ \int_{n_0}^{\infty} \exp\{\varepsilon x^\alpha - x\log(1+\delta)\}\, dx.$$

Nunmehr wählen wir n_0 mit Rücksicht auf das Integral so groß, daß für $x \geqq n_0$

$$\varepsilon x^\alpha < \tfrac{1}{2} x \log(1+\delta) \tag{7}$$

ausfällt. Dies erreichen wir, indem wir

$$n_0 = \left[\left\{\frac{2\varepsilon}{\log(1+\delta)}\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}\right] + 1$$

setzen. Beschränken wir dabei δ auf hinreichend kleine Werte, so gilt $\frac{\delta}{2} < \log(1+\delta) < \delta$, also

$$\left(\frac{2\varepsilon}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} < n_0 < \left(\frac{4\varepsilon}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + 1$$

und (6) erhält die Form

$$(8)\quad M_2(1+\delta) \leqq \left\{\left(\frac{4\varepsilon}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + 2\right\} \exp\left\{\varepsilon(1-\alpha)\left(\frac{\varepsilon\alpha}{\log(1+\delta)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\} + \int\limits_{\left(\frac{2\varepsilon}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}^{\infty} \exp\{-\tfrac{1}{2}x\log(1+\delta)\}\,dx.$$

Zur Auswertung des Integrals berücksichtigen wir $\log(1+\delta) > \frac{\delta}{2}$ und erhalten dann insgesamt

$$(9)\quad M_2(1+\delta) \leqq \exp\left\{\varepsilon\left(\frac{\varepsilon\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-\alpha+o(\delta))\right\} + \frac{4}{\delta}\exp\left\{-\frac{1}{4}(2\varepsilon)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\}.$$

Setzt man (2) und (9) in (1) ein, so ergibt sich schließlich bei Beschränkung von δ auf ein genügend kleines Intervall $0 < \delta < \delta_1$ die Abschätzung

$$(10)\quad M(1+\delta) \leqq \exp\left\{\varepsilon\left(\frac{\varepsilon\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\}.$$

2. Nach dieser Vorbereitung gehen wir nunmehr vollends zum eigentlichen Beweis des Satzes über. Wir beziehen uns dabei auf den Fall, daß die linksseitige Lückenbedingung erfüllt ist, d. h. daß für ein passendes q mit $0 < q < 1$ die Abschätzung

$$(11)\quad |a_n| < q^{n_\nu^\alpha} \quad \text{für } n_\nu - n_\nu^\alpha \leqq n < n_\nu$$

gilt, sobald n_ν größer als ein gewisses N_1 ist. Bei Zugrundelegung der rechtsseitigen Lückenbedingung schließt man ganz analog.

Wir nehmen nun an, die Funktion $f(z)$ sei an der Stelle $z = 1$ regulär und werden zeigen, daß diese Annahme auf einen Widerspruch zu den Voraussetzungen des Satzes führt. Entsprechend unserer Annahme denken wir uns einen Bereich $\mathfrak{B}_0$ der in § 1 geschilderten Art gewählt, wobei wir mit Rücksicht auf spätere Abschätzungen von vornherein d so klein angenommen denken, daß

$$(12)\quad 0 < d < \tfrac{1}{3}, \qquad q < 1 - 2d$$

ist. Zu $\mathfrak{B}_0$ wählen wir weiter entsprechend § 1, Hilfssatz 1 eine Folge von Polynomen

$$Q_0(z), Q_1(z), \ldots, Q_n(z), \ldots \quad \text{mit} \quad Q_n(z) = z^n + q_1^{(n)}z^{n-1} + \cdots + q_n^{(n)}$$

derart, daß in einem den Rand $\mathfrak{R}_0$ von $\mathfrak{B}_0$ enthaltenden Gebiet $\mathfrak{G}$ die Abschätzung

$$(13)\quad |Q_n(z)| \leqq \Theta^n \quad \text{für } n \geqq N_2$$

gilt, wo Θ eine Zahl aus $0 < \Theta < 1$ ist. Die Koeffizienten von $Q_n(z)$ lassen sich durch Integrale über eine beliebige Kurve $\mathfrak{R}_\delta$ (vgl. § 1) darstellen; man hat

$$q_\varrho^{(n)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}_\delta} \frac{Q_n(\zeta)}{\zeta^{n-\varrho+1}} d\zeta \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n).$$

Beschränkt man δ auf ein genügend kleines Intervall $0 < \delta < \delta_2$, so liegt $\mathfrak{R}_\delta$ ganz in $\mathfrak{G}$ und für $|Q_n(\zeta)|$ ist längs $\mathfrak{R}_\delta$ die Abschätzung (13) anwendbar. Bezeichnet man noch die Länge von $\mathfrak{R}_\delta$ mit l_δ, so findet man unter Berücksichtigung von (12)

$$|q_\varrho^{(n)}| \leqq \frac{l_\delta}{2\pi} \Theta^n \frac{1}{(1-d)^n} \leqq \frac{l_\delta}{2\pi} \Theta^n \left(1 + \frac{3}{2} d\right)^n \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n).$$

Für passendes $N_3 \geqq N_2$ gilt daher die Abschätzung

(14) $$|q_\varrho^{(n)}| \leqq (1 + \tfrac{3}{2} d)^n \quad \text{für } n \geqq N_3;\ \varrho = 1, 2, \ldots, n.$$

Unsere weiteren Betrachtungen knüpfen an die für jede Kurve $\mathfrak{R}_\delta$ geltende Beziehung

(15) $$a_{n_\nu} + q_1^{([n_\nu^\alpha])} a_{n_\nu - 1} + \cdots + q_{[n_\nu^\alpha]}^{([n_\nu^\alpha])} a_{n_\nu - [n_\nu^\alpha]} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}_\delta} f(z)\, z^{n_\nu - [n_\nu^\alpha]} Q_{[n_\nu^\alpha]}(z)\, dz$$

an. Wir bezeichnen die linke Seite dieser Gleichung mit L_{n_ν}, die rechte Seite mit R_{n_ν} und werden zu dem angekündigten Widerspruch gelangen, indem wir L_{n_ν} nach unten, R_{n_ν} nach oben abschätzen.

a) Abschätzung von R_{n_ν}. Wir beschränken δ auf das Intervall $0 < \delta < \delta_2$ und wählen n_ν so groß, daß $[n_\nu^\alpha] \geqq N_2$ ausfällt. Nach (13) ergibt sich dann, wenn wir wieder mit l_δ die Länge von $\mathfrak{R}_\delta$ bezeichnen,

(16) $$|R_{n_\nu}| \leqq \frac{l_\delta}{2\pi} \cdot M(\mathfrak{R}_\delta) \cdot (1+\delta)^{n_\nu} \Theta^{[n_\nu^\alpha]},$$

wo $M(\mathfrak{R}_\delta)$ das Maximum des Betrages von $f(z)$ längs $\mathfrak{R}_\delta$ bedeutet. $|f(z)|$ läßt sich längs des auf $|z| = 1 + \delta$ gelegenen Teils von $\mathfrak{R}_\delta$ durch die beim 1. Beweisschritt betrachtete Größe $M(1+\delta)$ abschätzen, für die ihrerseits (10) gilt. Wir haben also längs des auf $|z| = 1 + \delta$ gelegenen Teils von $\mathfrak{R}_\delta$ bei beliebigem $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

(17) $$|f(z)| \leqq \exp\left\{\varepsilon \left(\frac{\varepsilon\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\},$$

falls wir nur δ auf ein genügend kleines Intervall $0 < \delta < \delta_1$ beschränken. Dabei denken wir uns ε so klein angenommen, daß

(18) $$e^{2\varepsilon} \Theta < 1$$

ist. Längs des nicht auf $|z| = 1 + \delta$ gelegenen Teils von $\mathfrak{R}_\delta$ ist $|f(z)|$ gewiß beschränkt, und zwar gleichmäßig für alle δ. Da die rechte Seite von (17) mit $\delta \to 0$ über alle Grenzen wächst, können wir somit die Abschätzung (17) für den ganzen Weg $\mathfrak{R}_\delta$ in Anspruch nehmen, falls wir wieder δ auf ein passendes Intervall $0 < \delta < \delta_3$ beschränken, also

$$M(\mathfrak{R}_\delta) \leqq \exp\left\{\varepsilon\left(\frac{\varepsilon\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\} \quad \text{für } 0 < \delta < \delta_3. \tag{19}$$

Setzen wir somit $\delta_0 = \operatorname{Min}(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, so gilt für $0 < \delta < \delta_0$ nach (16) und (19) die Abschätzung

$$|R_{n_\nu}| \leqq \frac{l_{\delta_0}}{2\pi} \exp\left\{\varepsilon\left(\frac{\varepsilon\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\} \cdot (1+\delta)^{n_\nu} \Theta^{[n_\nu^\alpha]}. \tag{20}$$

Wählen wir nun noch speziell $\delta = \frac{\varepsilon}{n_\nu^{1-\alpha}}$, wobei wir ν so groß voraussetzen, daß dieser Wert $\delta < \delta_0$ ausfällt, so bekommen wir nach (20)

$$|R_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu^\alpha}} \leqq \left(\frac{l_{\delta_0}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{n_\nu^\alpha}} \exp\left\{\varepsilon\,\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\} \cdot \left(1+\frac{\varepsilon}{n_\nu^{1-\alpha}}\right)^{n_\nu^{1-\alpha}} \Theta^{1-\frac{1}{n_\nu^\alpha}}.$$

Daraus folgt aber

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, |R_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu^\alpha}} \leqq e^{\varepsilon\,\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} e^{\varepsilon}\,\Theta < e^{2\varepsilon}\Theta,$$

somit nach (18)

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, |R_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu^\alpha}} < 1. \tag{21}$$

b) Abschätzung von L_{n_ν}. Um die linke Seite von (15) abzuschätzen, beachten wir, daß zunächst für das erste Glied nach Voraussetzung b)

$$\lim_{\nu\to\infty} |a_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu^\alpha}} = 1 \tag{22}$$

gilt. Für die restlichen Glieder finden wir dagegen nach (11) und (14) unter Berücksichtigung von (12)

$$|L_{n_\nu} - a_{n_\nu}| \leqq n_\nu^\alpha q^{[n_\nu^\alpha]} (1+\tfrac{3}{2}d)^{[n_\nu^\alpha]} \leqq n_\nu^\alpha (1-2d)^{[n_\nu^\alpha]} (1+\tfrac{3}{2}d)^{[n_\nu^\alpha]} < n_\nu^\alpha (1-3d^2)^{[n_\nu^\alpha]},$$

also

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, |L_{n_\nu} - a_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu^\alpha}} \leqq 1 - 3d^2 < 1. \tag{23}$$

Aus (22) und (23) folgt schließlich

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} |L_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu^\alpha}} = 1. \tag{24}$$

Die beiden Limesrelationen (21) und (24) sind nicht miteinander verträglich. Unsere Annahme, $f(z)$ sei an der Stelle $z = 1$ regulär, hat also in der Tat zu einem Widerspruch geführt und damit ist nach früheren Bemerkungen die Nichtfortsetzbarkeit von $f(z)$ bewiesen.

§ 3.

Potenzreihen mit Lücken der Größenordnung $\varphi(n)$ mit $\frac{\varphi(n)}{\log n} \to \infty$.

Der im vorigen Paragraphen für Potenzreihen mit Lücken der Größenordnung $n^\alpha (0 < \alpha < 1)$ bewiesene Satz läßt sich verallgemeinern auf Potenzreihen mit Lücken, deren Größenordnung durch eine beliebige, nur rascher als $\log n$ anwachsende Funktion $\varphi(n)$ bestimmt wird. Genau werden wir beweisen:

Satz 2. *Es sei $\varphi(x)$ eine in $x \geqq 0$ differenzierbare, positive Funktion, für die bei unbegrenzt wachsendem x*

$$\frac{\varphi(x)}{x} \to 0, \quad \frac{\varphi(x)}{\log x} \to +\infty$$

strebt, während gleichzeitig

$$\varphi'(x) \text{ monoton} \to 0$$

geht. Dann ist das in $|z| > 1$ reguläre Funktionselement

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$$

nicht in das Innere des Einheitskreises hinein fortsetzbar, wenn seine Koeffizienten die folgenden Bedingungen erfüllen:

a) Es ist $\overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{\varphi(n)}} = 1$.

b) Die Folge (a_n) enthält eine ausgezeichnete Teilfolge

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_\nu}, \ldots \quad \text{mit} \quad \lim_{\nu \to \infty} |a_{n_\nu}|^{\frac{1}{\varphi(n_\nu)}} = 1$$

derart, daß für die Gesamtheit aller a_n aus den linksseitigen Umgebungen

$$n_\nu - \varphi(n_\nu) \leqq n < n_\nu \text{ der } a_{n_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

oder für die Gesamtheit aller a_n aus den rechtsseitigen Umgebungen

$$n_\nu < n \leqq n_\nu + \varphi(n_\nu) \text{ der } a_{n_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

die Limesbeziehung

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{\varphi(n_\nu)}} < 1$$

besteht.

Beweis. Die Voraussetzung a) hat zur Folge, daß das Funktionselement $f(z)$ den Konvergenzradius 1 hat. Wir zeigen, daß $z = 1$ ein singulärer Punkt von $f(z)$ ist, woraus dann unmittelbar die Nichtfortsetzbarkeit von $f(z)$ folgt, da sich alle Voraussetzungen nur auf die Beträge der Koeffizienten a_n beziehen. Den Beweis führen wir wie bei Satz 1 in zwei Schritten.

1. Wie damals zielt der erste Beweisschritt darauf ab, eine passende Schranke für das Maximum des Betrages der zu untersuchenden Funktion längs eines Kreises $|z| = 1 + \delta$ $(\delta > 0)$ zu gewinnen. Um jedoch eine ausreichende Schranke zu erhalten, ist es im gegenwärtigen Falle notwendig, zuerst von $f(z)$ zu einer geeigneten Hilfsfunktion $f^*(z)$ überzugehen. Dazu wenden wir auf $f(z)$ die in § 1 angegebene E-Transformation an, wobei wir für willkürlich gewähltes ϑ mit $0 < \vartheta < 1$ den Exponenten $k > \frac{1}{\vartheta}$ angenommen denken. Wir wählen sodann aus der Folge der Polynome $A_{n_\nu^*}\left(\frac{1}{z}\right)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ in sogleich zu beschreibender Weise eine Teilfolge $A_{n_{\nu_\varrho}^*}\left(\frac{1}{z}\right)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots)$ aus und bilden mit ihr die Polynomreihe

$$\sum_{\varrho=1}^{\infty} A_{n_{\nu_\varrho}^*}\left(\frac{1}{z}\right). \tag{1}$$

Die Wahl der Indizes n_{ν_ϱ} soll dabei auf jeden Fall so vorgenommen werden, daß stets

$$n_{\nu_\varrho}(1+\vartheta) < n_{\nu_{\varrho+1}}(1-\vartheta) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

ist, was nach § 1, Hilfssatz 3 zur Folge hat, daß die Polynome $A_{n_{\nu_\varrho}^*}\left(\frac{1}{z}\right)$ nicht „übereinandergreifen". Spalten wir daher in der Reihe (1) die Polynome $A_{n_{\nu_\varrho}^*}\left(\frac{1}{z}\right)$ in ihre einzelnen Glieder auf, so ergibt sich eine Potenzreihe

$$f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}}, \tag{3}$$

die, wieder nach § 1, Hilfssatz 3, den Konvergenzradius 1 hat. Ist überdies $f(z)$ in $z = 1$ regulär, so gilt dasselbe von $f^*(z)$, da in diesem Falle die Reihe (1) nach § 1, Hilfssatz 4 in einer — übrigens von der speziellen Wahl der n_{ν_ϱ} unabhängigen — Umgebung von $z = 1$ normal konvergiert.

Um die endgültige Wahl der Indizes n_ϱ zu beschreiben, betrachten wir zunächst für beliebiges $\varepsilon > 0$ die in $x \geqq 0$ erklärte Funktion

$$y = \frac{e^{\varepsilon \varphi(x)}}{(1+\delta)^x} = e^{\varepsilon \varphi(x) - x \log(1+\delta)}.$$

Wegen $\frac{\varphi(x)}{x} \to 0$ strebt bei festem $\delta > 0$

(4) $$y \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty.$$

Ihrer Ableitung

$$y' = y\,[\varepsilon\, \varphi'(x) - \log(1+\delta)]$$

entnimmt man, da $\varphi'(x)$ positiv ist, daß es zu jedem $x > 0$ einen eindeutig bestimmten Wert $\delta = \delta_x > 0$ gibt derart, daß die Funktion y für $\delta = \delta_x$ gerade an der betreffenden Stelle x ihr Maximum besitzt. Dabei strebt

(5) $$\delta_x = e^{\varepsilon \varphi'(x)} - 1 \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty,$$

weil $\varphi'(x)$ für $x \to \infty$ monoton gegen 0 geht. Ferner gilt

(6) $$\frac{e^{\varepsilon \varphi(x)}}{(1+\delta_x)^x} = e^{\varepsilon [\varphi(x) - x \varphi'(x)]} \to \infty \quad \text{für} \quad x \to \infty,$$

denn unter unseren Voraussetzungen über $\varphi(x)$ strebt $\varphi(x) - x\,\varphi'(x) \to \infty$ für $x \to \infty$.

Den vorstehenden Überlegungen entnehmen wir eine Abschätzung der Polynome

$$A_{n_\nu^*}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_n \Gamma^n_{n_\nu^*} \frac{a_n}{z^{n+1}},$$

wobei wir ν unter Bezugnahme auf Voraussetzung a) so groß wählen, daß für alle in $A_{n_\nu^*}\left(\frac{1}{z}\right)$ auftretenden Koeffizienten a_n die Ungleichung

(7) $$|a_n| < e^{\varepsilon \varphi(n)}$$

gilt. Da nach Hilfssatz 3 jeweils $\sum_n \Gamma^n_{n_\nu^*} < 1$ ist, so hat man längs jedes Kreises $|z| = 1 + \delta$ $(\delta > 0)$

(8) $$\left|A_{n_\nu^*}\left(\frac{1}{z}\right)\right| < \sum_n{}' \Gamma^n_{n_\nu^*} \frac{e^{\varepsilon \varphi(n)}}{(1+\delta)^{n+1}} < \max_{n_\nu(1-\vartheta) \leqq n \leqq n_\nu(1+\vartheta)} \frac{e^{\varepsilon \varphi(n)}}{(1+\delta)^n},$$

also gewiß

(9) $$\left|A_{n_\nu^*}\left(\frac{1}{z}\right)\right| < e^{\varepsilon \varphi(n_\nu + \vartheta n_\nu)},$$

und speziell längs des Kreises $|z| = 1 + \delta_{n_\nu}$ genauer

(10) $$\left|A_{n_\nu^*}\left(\frac{1}{z}\right)\right| < \frac{e^{\varepsilon \varphi(n_\nu)}}{(1+\delta_{n_\nu})^{n_\nu}}.$$

Nach diesen Vorbemerkungen wählen wir die Indizes $n_{\nu_1}, n_{\nu_2}, \ldots, n_{\nu_\varrho}, \ldots$ sukzessive auf Grund der folgenden Vorschrift [unter stillschweigender Berücksichtigung von (2)] aus:

a) n_{ν_1} setzen wir gleich einem beliebigen Index n_ν, der nur so groß sein soll, daß für die in $A_{n_{\nu_1}}^*\left(\frac{1}{z}\right)$ auftretenden Koeffizienten a_n die Ungleichung (7) gilt. Nach (9) und (10) gelten dann für $A_{n_{\nu_1}}^*\left(\frac{1}{z}\right)$ die Abschätzungen

$$\left|A_{n_{\nu_1}}^*\left(\frac{1}{z}\right)\right| < \frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_1})}}{(1+\delta_{n_{\nu_1}})^{n_{\nu_1}}} \quad \text{längs } |z| = 1+\delta_{n_{\nu_1}},$$

$$\left|A_{n_{\nu_1}}^*\left(\frac{1}{z}\right)\right| < e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_1}+\vartheta n_{\nu_1})} \quad \text{längs } |z| = 1+\delta \text{ mit } \delta > 0.$$

b) n_{ν_2} wählen wir so groß, daß die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\alpha) \qquad e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_1}+\vartheta n_{\nu_1})} < \frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_2})}}{(1+\delta_{n_{\nu_2}})^{n_{\nu_2}}},$$

$$\beta) \qquad \operatorname*{Max}_{n_{\nu_2}(1-\vartheta)\leqq n\leqq n_{\nu_2}(1+\vartheta)} \frac{e^{\varepsilon\varphi(n)}}{(1+\delta_{n_{\nu_1}})^{n}} < \frac{1}{2}\,\frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_1})}}{(1+\delta_{n_{\nu_1}})^{n_{\nu_1}}}.$$

Die erste dieser Ungleichungen ist nach (6) erfüllbar, da links nach der Wahl von n_{ν_1} eine feste Zahl steht. Die zweite Ungleichung ist nach (4) erfüllbar, da rechts eine feste Zahl steht. Auf Grund dieser Festsetzungen gelten nach (8) bis (10) die folgenden Abschätzungen:

$$\left|A_{n_{\nu_2}}^*\left(\frac{1}{z}\right)\right| < \frac{1}{2}\,\frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_1})}}{(1+\delta_{n_{\nu_1}})^{n_{\nu_1}}} \quad \text{längs } |z| = 1+\delta_{n_{\nu_1}},$$

$$\left|A_{n_{\nu_2}}^*\left(\frac{1}{z}\right)\right| < \frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_2})}}{(1+\delta_{n_{\nu_2}})^{n_{\nu_2}}} \quad \text{längs } |z| = 1+\delta_{n_{\nu_2}},$$

$$\left|A_{n_{\nu_2}}^*\left(\frac{1}{z}\right)\right| < e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_2}+\vartheta n_{\nu_2})} \quad \text{längs } |z| = 1+\delta \text{ mit } \delta > 0.$$

c) n_{ν_ϱ} wählen wir nun allgemein nach vorangehender Fixierung von $n_{\nu_1}, n_{\nu_2}, \ldots, n_{\nu_{\varrho-1}}$ so groß, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\alpha) \qquad \sum_{\sigma=1}^{\varrho-1} e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_\sigma}+\vartheta n_{\nu_\sigma})} < \frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_\varrho})}}{(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}})^{n_{\nu_\varrho}}},$$

$$\beta) \qquad \operatorname*{Max}_{n_{\nu_\varrho}(1-\vartheta)\leqq n\leqq n_{\nu_\varrho}(1+\vartheta)} \frac{e^{\varepsilon\varphi(n)}}{(1+\delta_{n_{\nu_\sigma}})^{n}} < \frac{1}{2^{\varrho-\sigma}}\,\frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_\sigma})}}{(1+\delta_{n_{\nu_\sigma}})^{n_{\nu_\sigma}}} \quad \text{für } \sigma = 1, 2, \ldots, \varrho-1.$$

Die Ungleichung α) ist nach (6) erfüllbar, da links eine feste Zahl steht. Die Ungleichungen β) sind nach (4) erfüllbar, da jeweils rechts eine feste Zahl steht. Auf Grund dieser Festsetzungen gelten nach (8) bis (10) die folgenden Abschätzungen:

$$\left|A_{n_{\nu_\varrho}^*}\left(\frac{1}{z}\right)\right| < \frac{1}{2^{\varrho-\sigma}} \frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_\sigma})}}{(1+\delta_{n_{\nu_\sigma}})^{n_{\nu_\sigma}}} \quad \text{längs } |z| = 1+\delta_{n_{\nu_\sigma}} \text{ mit } \sigma = 1, 2, \ldots, \varrho,$$

$$\left|A_{n_{\nu_\varrho}^*}\left(\frac{1}{z}\right)\right| < e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_\varrho}+\vartheta n_{\nu_\varrho})} \quad \text{längs } |z| = 1+\delta \text{ mit } \delta > 0.$$

Nachdem damit die Folge $n_{\nu_1}, n_{\nu_2}, \ldots, n_{\nu_\varrho}, \ldots$ und mithin auch die Hilfsfunktion $f^*(z)$ vollständig festgelegt ist, haben wir nun noch die Abschätzung dieser Funktion längs der Kreise $|z| = 1 + \delta_{n_{\nu_\varrho}}$ $(\varrho = 1, 2, \ldots)$ durchzuführen. Setzen wir

$$M^*(1+\delta) = \operatorname*{Max}_{|z|=1+\delta} |f^*(z)|,$$

so liefern die für die Polynome $A_{n_{\nu_\varrho}^*}\left(\frac{1}{z}\right)$ gewonnenen Abschätzungen nacheinander

$$M^*(1+\delta_{n_{\nu_1}}) \leqq \sum_{\sigma=1}^{\infty} \left|A_{n_{\nu_\sigma}^*}\left(\frac{1}{z}\right)\right| < \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sigma-1}} \frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_1})}}{(1+\delta_{n_{\nu_1}})^{n_{\nu_1}}} = 2\frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_1})}}{(1+\delta_{n_{\nu_1}})^{n_{\nu_1}}},$$

und allgemein für $\varrho \geqq 2$

$$\begin{aligned} M^*(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}}) &\leqq \sum_{\sigma=1}^{\varrho-1} \left|A_{n_{\nu_\sigma}^*}\left(\frac{1}{z}\right)\right| + \sum_{\sigma=\varrho}^{\infty} \left|A_{n_{\nu_\sigma}^*}\left(\frac{1}{z}\right)\right| \\ &< \sum_{\sigma=1}^{\varrho-1} e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_\sigma}+\vartheta n_{\nu_\sigma})} + \sum_{\sigma=\varrho}^{\infty} \frac{1}{2^{\sigma-\varrho}} \frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_\varrho})}}{(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}})^{n_{\nu_\varrho}}} \\ &< \frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_\varrho})}}{(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}})^{n_{\nu_\varrho}}} + 2\frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_\varrho})}}{(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}})^{n_{\nu_\varrho}}}. \end{aligned}$$

In jedem Falle hat man also

$$M^*(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}}) < 3\frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_\varrho})}}{(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}})^{n_{\nu_\varrho}}} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots) \tag{11}$$

2. Nach dieser Vorbereitung verläuft nun der zweite Beweisschritt ganz ähnlich wie bei dem Satz 1 des vorigen Paragraphen. Wir nehmen an, die Funktion $f(z)$, damit auch die Funktion $f^*(z)$ sei an der Stelle $z = 1$ regulär, und werden zeigen, daß diese Annahme auf einen Widerspruch zu den Voraussetzungen des Satzes führt. Dabei beziehen wir uns diesmal auf den Fall, daß

die rechtsseitige Lückenbedingung erfüllt ist, daß also für ein passendes q mit $0 < q < 1$ die Ungleichung

$$|a_n| < q^{\varphi(n_{\nu_\varrho})} \quad \text{für } n_{\nu_\varrho} < n \leqq n_{\nu_\varrho} + \varphi(n_{\nu_\varrho}) \tag{12}$$

gilt, sobald n_{ν_ϱ} größer als ein gewisses N_1 ist. Bei Zugrundelegung linksseitiger Lücken schließt man ganz analog.

Entsprechend unserer Annahme denken wir uns zu $f^*(z)$ einen Bereich $\mathfrak{B}_0$ der in § 1 geschilderten Art gewählt, wobei wir d so klein angenommen denken, daß

$$0 < d < \tfrac{1}{3}, \quad q < 1 - 2d \tag{13}$$

ist. Zu $\mathfrak{B}_0$ wählen wir weiter entsprechend § 1, Hilfssatz 2 eine Folge von Polynomen

$$P_0(z),\ P_1(z),\ \ldots,\ P_n(z),\ \ldots$$

mit

$$P_n(z) = z^{m_n} + p^{(n)}_{n-m_n-1} z^{m_n+1} + \cdots + p^{(n)}_0 z^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

derart, daß in einem den Rand $\mathfrak{R}_0$ von $\mathfrak{B}_0$ enthaltenden Gebiet $\mathfrak{G}$ die Abschätzung

$$|P_n(z)| \leqq \Theta^n \quad \text{für } n \geqq N_2 \tag{14}$$

gilt, wo Θ eine Zahl aus $0 < \Theta < 1$ ist. Wie beim Beweis des Satzes 1 erkennt man, daß die Koeffizienten $p^{(n)}_\varrho$ der Polynome $P_n(z)$ bei passender Wahl von $N_3 \geqq N_2$ die Abschätzung

$$|p^{(n)}_\varrho| \leqq (1 + \tfrac{3}{2}d)^n \quad \text{für } n \geqq N_3;\ \varrho = 0, 1, \ldots, n - m_n - 1 \tag{15}$$

zulassen.

Die weiteren Betrachtungen knüpfen an die für jede Kurve $\mathfrak{R}_\delta$ geltende Beziehung

$$c_{n_{\nu_\varrho}} + c_{n_{\nu_\varrho}+1} p^{(\varphi_\varrho)}_{\varphi_\varrho - m_{\varphi_\varrho}-1} + \cdots + c_{n_{\nu_\varrho}+\varphi_\varrho - m_{\varphi_\varrho}} p^{(\varphi_\varrho)}_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}_\delta} f^*(z)\, z^{n_{\nu_\varrho} - m_{\varphi_\varrho}} P_{\varphi_\varrho}(z)\, dz \tag{16}$$

an, wobei zur Abkürzung

$$\varphi_\varrho = [\varphi(n_{\nu_\varrho})]$$

gesetzt ist. Wir bezeichnen die linke Seite dieser Gleichung mit L_ϱ, die rechte mit R_ϱ und werden zu dem angekündigten Widerspruch gelangen, indem wir L_ϱ nach unten, R_ϱ nach oben abschätzen.

a) Abschätzung von R_ϱ. Sorgen wir durch Beschränkung von δ auf ein genügend kleines Intervall $0 < \delta < \delta_0$ dafür, daß $\mathfrak{R}_\delta$ dem Gebiet $\mathfrak{G}$ angehört und wählen wir ϱ so groß, daß $\varphi_\varrho \geqq N_2$ ausfällt, so erhalten wir für R_ϱ nach (14) die Abschätzung

$$|R_\varrho| \leqq \frac{l_{\delta_0}}{2\pi} \cdot M^*(\mathfrak{R}_\delta) \cdot (1+\delta)^{n_{\nu_\varrho}} \Theta^{\varphi_\varrho}, \tag{17}$$

wo $M^*(\mathfrak{R}_\delta)$ das Maximum des Betrages von $f^*(z)$ längs $\mathfrak{R}_\delta$ und l_δ die Länge von $\mathfrak{R}_\delta$ bedeutet. Da bei genügend großem ϱ nach (5) gewiß $\delta_{n_{\nu_\varrho}} < \delta_0$ ist, so dürfen wir in der vorstehenden Abschätzung von einem Index ϱ ab

$$\delta = \delta_{n_{\nu_\varrho}}$$

setzen. Um dafür $M^*(\mathfrak{R}_\delta)$ abzuschätzen, beachten wir, daß wir längs des auf $|z| = 1+\delta$ gelegenen Teiles von $\mathfrak{R}_\delta$ die Ungleichung (11) heranziehen können. Wir haben also längs dieses Teiles von $\mathfrak{R}_\delta$

$$|f^*(z)| < 3 \frac{e^{\varepsilon \varphi(n_{\nu_\varrho})}}{(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}})^{n_{\nu_\varrho}}}. \tag{18}$$

Dabei denken wir uns $\varepsilon > 0$ so klein angenommen, daß

$$e^\varepsilon \Theta < 1 \tag{19}$$

ist. (Diese Festsetzung ist möglich, obwohl ε bei der Konstruktion von $f^*(z)$ eingeht, denn $f^*(z)$ ist — wie oben hervorgehoben wurde — in einer von der speziellen Wahl der Indexfolge n_{ν_ϱ} unabhängigen Umgebung von $z = 1$ regulär, so daß $\mathfrak{B}_0$ und damit Θ ebenfalls von der speziellen Wahl der n_{ν_ϱ} unabhängig angenommen werden können.) Längs des nicht auf $|z| = 1+\delta$ gelegenen Teils von $\mathfrak{R}_\delta$ ist $|f^*(z)|$ beschränkt, und zwar gleichmäßig für alle δ. Da die rechte Seite von (18) mit $\varrho \to \infty$ über alle Grenzen wächst, wie (6) zeigt, so können wir bei genügend großem ϱ die Abschätzung (18) für den ganzen Weg $\mathfrak{R}_\delta$ in Anspruch nehmen. Für große ϱ gilt somit nach (17) und (18)

$$|R_\varrho| \leqq \frac{l_{\delta_0}}{2\pi} \cdot 3 \frac{e^{\varepsilon \varphi(n_{\nu_\varrho})}}{(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}})^{n_{\nu_\varrho}}} \cdot (1+\delta_{n_{\nu_\varrho}})^{n_{\nu_\varrho}} \Theta^{\varphi_\varrho}. \tag{20}$$

Hieraus folgt

$$|R_\varrho|^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}} \leqq \left(\frac{3 l_{\delta_0}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}} \cdot e^\varepsilon \Theta^{\frac{\varphi_\varrho}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}}$$

und damit nach (19)

$$\overline{\lim_{\varrho\to\infty}}\,|R_\varrho|^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}}<1. \tag{21}$$

b) Abschätzung von L_ϱ. Geht man auf die Konstruktion von $f^*(z)$ zurück, so findet man

$$L_\varrho=\Gamma^{n_{\nu_\varrho}}_{n^*_{\nu_\varrho}}a_{n_{\nu_\varrho}}+\Gamma^{n_{\nu_\varrho}+1}_{n^*_{\nu_\varrho}}a_{n_{\nu_\varrho}+1}p^{(\varphi_\varrho)}_{\varphi_\varrho-m_{\varphi_\varrho}-1}+\cdots+\Gamma^{n_{\nu_\varrho}+\varphi_\varrho-m_{\varphi_\varrho}}_{n^*_{\nu_\varrho}}a_{n_{\nu_\varrho}+\varphi_\varrho-m_{\varphi_\varrho}}p_0^{(\varphi_\varrho)}.$$

Für das erste Glied dieser Summe hat man nach § 1, Hilfssatz 3

$$\left|\Gamma^{n_{\nu_\varrho}}_{n^*_{\nu_\varrho}}a_{n_{\nu_\varrho}}\right|>\frac{\alpha}{\sqrt{n_{\nu_\varrho}}}|a_{n_{\nu_\varrho}}|.$$

Da nach der Voraussetzung b) unseres Satzes $\lim\limits_{\nu\to\infty}|a_{n_\nu}|^{\frac{1}{\varphi(n_\nu)}}=1$ gilt, so folgt hieraus[7])

$$\lim_{\varrho\to\infty}\left|\Gamma^{n_{\nu_\varrho}}_{n^*_{\nu_\varrho}}a_{n_{\nu_\varrho}}\right|^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}}\geqq\lim_{\varrho\to\infty}\alpha^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}}e^{-\frac{1}{2}\frac{\log n_{\nu_\varrho}}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}}|a_{n_{\nu_\varrho}}|^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}}=1. \tag{22}$$

Für die restlichen Summanden in dem Ausdruck für L_ϱ findet man, da nach § 1, Hilfssatz 3 alle Gewichte $\Gamma<1$ sind, auf Grund von (12) und (15), wenn man noch (13) berücksichtigt,

$$\left|L_\varrho-\Gamma^{n_{\nu_\varrho}}_{n^*_{\nu_\varrho}}a_{n_{\nu_\varrho}}\right|\leqq\varphi(n_{\nu_\varrho})\,q^{\varphi(n_{\nu_\varrho})}(1+\tfrac{3}{2}d)^{\varphi(n_{\nu_\varrho})}\leqq\varphi(n_{\nu_\varrho})(1-3d^2)^{\varphi(n_{\nu_\varrho})}$$

für alle genügend großen ϱ. Somit gilt

$$\overline{\lim_{\varrho\to\infty}}\left|L_\varrho-\Gamma^{n_{\nu_\varrho}}_{n^*_{\nu_\varrho}}a_{n_{\nu_\varrho}}\right|^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}}\leqq1-3d^2<1. \tag{23}$$

Aus (22) und (23) folgt schließlich

$$\overline{\lim_{\varrho\to\infty}}\,|L_\varrho|^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}}\geqq1. \tag{24}$$

Die beiden Limesrelationen (21) und (24) sind nicht miteinander verträglich. Unsere Annahme, $f(z)$ und damit $f^*(z)$ sei an der Stelle $z=1$ regulär, hat also in der Tat zu einem Widerspruch geführt und damit ist nach der Bemerkung am Anfang des Beweises die Nichtfortsetzbarkeit von $f(z)$ gezeigt.

---

[7]) An dieser Stelle kommt die Voraussetzung $\frac{\varphi(x)}{\log x}\to\infty$ für $x\to\infty$ entscheidend ins Spiel.

Bemerkungen. 1. Hervorgehoben sei besonders der Fall, daß die Koeffizientenfolge (a_n) von $f(z)$ der Bedingung

$$|a_n| \leqq n^{K_1} \qquad \text{für genügend großes } n$$

mit einem beliebigen $K_1 > 0$ genügt, während gleichzeitig für die ausgezeichnete Teilfolge (a_{n_ν}) mit einem beliebigen $K_2 > 0$

$$|a_{n_\nu}| \geqq n_\nu^{-K_2} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

gilt. Ist dann für eine beliebige, nur den Bedingungen des vorstehenden Satzes genügende (also im wesentlichen rascher als $\log x$ anwachsende) Funktion $\varphi(x)$ die Lückenbedingung

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \, |a_n|^{\frac{1}{\varphi(n_\nu)}} < 1$$

für die Gesamtheit aller a_n aus den linksseitigen Umgebungen

$$n_\nu - \varphi(n_\nu) \leqq n < n_\nu \quad \text{der } a_{n_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

oder für die Gesamtheit aller a_n aus den rechtsseitigen Umgebungen

$$n_\nu < n \leqq n_\nu + \varphi(n_\nu) \quad \text{der } a_{n_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

erfüllt, so ist $f(z)$ nicht fortsetzbar[8]).

2. Der Satz 2 ist, wie sein Beweis zeigt, unmittelbar einer wesentlichen Verallgemeinerung fähig: Da in die Hilfsfunktion $f^*(z)$ nur diejenigen Koeffizienten a_n eingehen, welche (für das willkürlich gewählte ϑ aus $0 < \vartheta < 1$) den „ϑ-Umgebungen“

$$n_\nu(1-\vartheta) \leqq n \leqq n_\nu(1+\vartheta) \quad \text{der } a_{n_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

angehören, so braucht die Voraussetzung a) nicht von der Gesamtheit aller Koeffizienten a_n erfüllt zu werden. Um die Behauptung des Satzes aufrechterhalten zu können, genügt es vielmehr, an Stelle von a) vorauszusetzen, daß die Gesamtheit aller Koeffizienten a_n der Bedingung

$$\overline{\lim} \, |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$$

genügt, während speziell die Gesamtheit derjenigen a_n, welche für ein beliebiges ϑ aus $0 < \vartheta < 1$ den ϑ-Umgebungen der a_{n_ν} $(\nu = 1, 2, \ldots)$ angehören, die schärfere Bedingung

$$\overline{\lim} \, |a_n|^{\frac{1}{\varphi(n)}} = 1$$

erfüllt.

---

[8]) Vgl. dazu F. Lösch, a. a. O. [2]).

§ 4.

Zulassung von Ausnahmekoeffizienten in den Lücken.

Die „Lückenbedingung" b) des Satzes 2 besagt, daß die in den Umgebungen der ausgezeichneten Koeffizienten a_{n_ν} stehenden Koeffizienten klein sein sollen in dem Sinne, daß für ihre Gesamtheit

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{\varphi(n_\nu)}} < 1$$

gelten soll. Entsprechend dem Übergang vom HADAMARDschen zum FABRYschen Satze läßt sich nun der Satz 2 in der Weise verallgemeinern, daß die in den „Lücken" stehenden Koeffizienten nur im allgemeinen als klein im vorstehenden Sinne vorausgesetzt werden, daß aber eine gewisse Anzahl von Ausnahmekoeffizienten in den „Lücken" auftreten, die dieser Voraussetzung nicht genügen. Genauer zeigen wir, daß in voller Analogie zum FABRYschen Satze gilt:

Satz 3. *Die Behauptung des Satzes 2 gilt auch dann noch, wenn — unter Aufrechterhaltung der Voraussetzung a) — die Voraussetzung b) in der Weise abgeschwächt wird, daß in den linksseitigen Umgebungen*

$$n_\nu - \varphi(n_\nu) \leqq n < n_\nu \quad \text{der } a_{n_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

bzw. den rechtsseitigen Umgebungen

$$n_\nu < n \leqq n_\nu + \varphi(n_\nu) \quad \text{der } a_{n_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

gewisse Ausnahmekoeffizienten zugelassen werden, welche in ihrer Gesamtheit die Bedingung

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{\varphi(n_\nu)}} < 1$$

nicht erfüllen. Es muß nur die Anzahl $\psi(n_\nu)$ der in der betreffenden Umgebung von a_{n_ν} auftretenden Ausnahmekoeffizienten der Limesrelation

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\psi(n_\nu)}{\varphi(n_\nu)} = 0$$

genügen.

Beweis. Das Bestehen der Voraussetzung a) hat zur Folge, daß das Funktionselement $f(z)$ den Konvergenzradius 1 hat. Wir zeigen, daß $z = 1$ ein singulärer Punkt von $f(z)$ ist, woraus dann unmittelbar die Nichtfortsetzbarkeit von $f(z)$ folgt, da sich alle Voraussetzungen nur auf die Beträge der Koeffizienten a_n beziehen. Der Beweis verläuft ganz ähnlich wie der des Satzes 2 im vorigen Paragraphen, so daß wir uns zum Teil auf kurze Andeutungen beschränken können.

1. Wir konstruieren zunächst in genau derselben Weise wie dort die Hilfsfunktion

$$f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}} = \sum_{\varrho=1}^{\infty} A^*_{n_{\nu_\varrho}}\left(\frac{1}{z}\right). \tag{1}$$

Wir wissen von ihr, daß sie den Konvergenzradius 1 hat und daß sie zugleich mit $f(z)$ in $z = 1$ regulär ist. Ferner gilt für das Maximum ihres Betrages längs des Kreises $|z| = 1 + \delta_{n_{\nu_\varrho}}$ die Abschätzung

$$M^*(1 + \delta_{n_{\nu_\varrho}}) < 3 \frac{e^{s\varphi(n_{\nu_\varrho})}}{(1 + \delta_{n_{\nu_\varrho}})^{n_{\nu_\varrho}}} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

2. Nunmehr nehmen wir an, die Funktion $f(z)$, damit auch $f^*(z)$, sei an der Stelle $z = 1$ regulär und werden zeigen, daß diese Annahme auf einen Widerspruch zu den Voraussetzungen des Satzes führt. Dabei beziehen wir uns wie im vorigen Paragraphen auf den Fall, daß die rechtsseitige Lückenbedingung erfüllt ist, daß also, *falls man nur von den Ausnahmekoeffizienten absieht*, für ein passendes q mit $0 < q < 1$ die Ungleichung

$$|a_n| < q^{\varphi(n_{\nu_\varrho})} \quad \text{für} \quad n_{\nu_\varrho} < n \leqq n_{\nu_\varrho} + \varphi(n_{\nu_\varrho}) \tag{3}$$

gilt, sobald n_{ν_ϱ} größer als ein gewisses N_1 ist. Die in der Umgebung von $a_{n_{\nu_\varrho}}$ auftretenden Ausnahmekoeffizienten, für die (3) nicht zu gelten braucht, bezeichnen wir mit

$$a_{n_{\nu_\varrho}+\sigma_1},\ a_{n_{\nu_\varrho}+\sigma_2},\ \ldots,\ a_{n_{\nu_\varrho}+\sigma_{\psi(n_{\nu_\varrho})}}$$

wobei natürlich $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\psi(n_{\nu_\varrho})}$ von ϱ abhängen.

Entsprechend unserer Annahme denken wir uns wie in § 3 zu $f^*(z)$ einen Bereich $\mathfrak{B}_0$ gewählt, der zu so kleinem d gehört, daß die Ungleichungen

$$0 < d < \tfrac{1}{3}, \quad q < 1 - 2d \tag{4}$$

erfüllt sind. Ferner wählen wir wieder eine Folge von Polynomen

$$P_0(z),\ P_1(z),\ \ldots,\ P_n(z),\ \ldots$$

mit

$$P_n(z) = z^{m_n} + p^{(n)}_{n-m_n-1} z^{m_n+1} + \cdots + p^{(n)}_0 z^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

derart, daß in einem den Rand $\mathfrak{R}_0$ von $\mathfrak{B}_0$ enthaltenden Gebiet $\mathfrak{G}$ die Abschätzung

$$|P_n(z)| \leqq \Theta^n \quad \text{für} \quad n \geqq N_2 \tag{5}$$

gilt, wo $0 < \Theta < 1$ ist; für die Koeffizienten $p^{(n)}_\varrho$ der Polynome $P_n(z)$ gilt bei passender Wahl von $N_3 \geqq N_2$

$$|p^{(n)}_\varrho| \leqq (1 + \tfrac{3}{2}d)^n \quad \text{für} \quad n \geqq N_3;\ \varrho = 0, 1, \ldots, n - m_n - 1. \tag{6}$$

3. Weiterhin liegt es nahe, auch jetzt wieder an die für jede Kurve $\mathfrak{R}_\vartheta$ geltende Beziehung

$$(7)\quad c_{n_{\nu_\varrho}} + c_{n_{\nu_\varrho}+1}\, p^{(\varphi_\varrho)}_{\varphi_\varrho - m_{\varphi_\varrho}-1} + \cdots + c_{n_{\nu_\varrho}+\varphi_\varrho - m_{\varphi_\varrho}} p_0^{(\varphi_\varrho)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{R}_\vartheta} f^*(z)\, z^{n_{\nu_\varrho} - m_{\varphi_\varrho}}\, P_{\varphi_\varrho}(z)\, dz$$

anzuknüpfen, wobei zur Abkürzung wie früher

$$\varphi_\varrho = [\varphi(n_{\nu_\varrho})]$$

gesetzt ist. Diese Beziehung eignet sich jedoch im gegenwärtigen Falle nicht unmittelbar für die weiteren Betrachtungen, da sich bei Anwendung derselben Schlußweise wie in § 3 bei der Abschätzung der linken Seite die Ausnahmekoeffizienten störend bemerkbar machen. Wir leiten deshalb statt ihrer eine neue Beziehung ähnlicher Art ab, bei der die Ausnahmekoeffizienten ausgeschaltet sind.

Dazu bilden wir zunächst im Anschluß an E. Fabry[9]) für beliebiges ϱ die Hilfsfunktion

$$F_\varrho(z) = \sum_{\mu=0}^{\psi(n_{\nu_\varrho})} C_\mu^{(\varrho)} z^\mu = \prod_{\tau=1}^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \left(z\, e^{-\frac{\sigma_\tau}{\Phi_\varrho}\frac{\pi i}{2}} - e^{\frac{\sigma_\tau}{\Phi_\varrho}\frac{\pi i}{2}} \right),$$

wobei zur Abkürzung

$$\Phi_\varrho = \varphi(n_{\nu_\varrho})\, \frac{\varphi(n_{\nu_\varrho})}{\psi(n_{\nu_\varrho})}$$

gesetzt ist. Führen wir hier $z = e^{\frac{\sigma}{\Phi_\varrho}\pi i}$ mit beliebigem σ ein, so erhalten wir

$$(8)\quad F_\varrho\left(e^{\frac{\sigma}{\Phi_\varrho}\pi i}\right) = \sum_{\mu=0}^{\psi(n_{\nu_\varrho})} C_\mu^{(\varrho)}\, e^{\frac{\sigma}{\Phi_\varrho}\mu\pi i}$$

$$= \prod_{\tau=1}^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \left(e^{\frac{\sigma}{\Phi_\varrho}\pi i - \frac{\sigma_\tau}{\Phi_\varrho}\frac{\pi i}{2}} - e^{\frac{\sigma_\tau}{\Phi_\varrho}\frac{\pi i}{2}} \right) = (2i)^{\psi(n_{\nu_\varrho})}\, e^{\frac{\sigma}{\Phi_\varrho}\psi(n_{\nu_\varrho})\frac{\pi i}{2}} \prod_{\tau=1}^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \sin\frac{\sigma-\sigma_\tau}{\Phi_\varrho}\frac{\pi}{2}.$$

Man erkennt, daß dieser Ausdruck so gebildet ist, daß er für $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\psi(n_{\nu_\varrho})}$ verschwindet. Weiterhin benötigen wir noch einige Abschätzungen desselben. Zunächst entnimmt man (8) unmittelbar für beliebiges σ

$$(9)\quad \left| F_\varrho\left(e^{\frac{\sigma}{\Phi_\varrho}\pi i}\right)\right| \leqq 2^{\psi(n_{\nu_\varrho})}.$$

---

[9]) E. Fabry, Sur les séries de Taylor qui ont une infinité de points singuliers. Acta Math. 22 (1899), S. 65–87.

Diese Abschätzung gilt auch für die Koeffizienten $C_\mu^{(\varrho)}$. Nach der Cauchyschen Koeffizientenformel hat man nämlich

$$C_\mu^{(\varrho)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{F_\varrho(z)}{z^{\mu+1}}\, dz,$$

und da nach (9) längs des Einheitskreises $|F_\varrho(z)| \leqq 2^{\psi(n_{\nu_\varrho})}$ gilt, so folgt sofort

$$|C_\mu^{(\varrho)}| \leqq 2^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \qquad (\varrho = 0, 1, \ldots, \psi(n_{\nu_\varrho})). \tag{10}$$

Ferner erhalten wir speziell für $\sigma = 0$

$$|F_\varrho(1)| = 2^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \prod_{\tau=1}^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \sin \frac{\sigma_\tau}{\Phi_\varrho} \frac{\pi}{2} \geqq 2^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \prod_{\tau=1}^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \sin \frac{\tau}{\Phi_\varrho} \frac{\pi}{2}$$

und wegen $\sin \frac{\pi}{2} x \geqq x$ für $0 \leqq x \leqq 1$ weiter

$$|F_\varrho(1)| \geqq 2^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \prod_{\tau=1}^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \frac{\tau}{\Phi_\varrho} = 2^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \frac{\psi(n_{\nu_\varrho})!}{\Phi_\varrho^{\psi(n_{\nu_\varrho})}} = 2^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \left[\frac{\psi(n_{\nu_\varrho})}{\varphi^2(n_{\nu_\varrho})}\right]^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \psi(n_{\nu_\varrho})!.$$

Unter Verwendung der Abschätzung $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{en}$ folgt hieraus endlich

$$|F_\varrho(1)| > \left(\frac{2}{e}\right)^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \left[\frac{\psi(n_{\nu_\varrho})}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}\right]^{2\psi(n_{\nu_\varrho})} \sqrt{e\,\psi(n_{\nu_\varrho})}.$$

Durchläuft man die Indexfolge n_{ν_ϱ} $(\varrho = 1, 2, \ldots)$, so liefert die vorstehende Ungleichung

$$\lim_{\varrho \to \infty} |F_\varrho(1)|^{\frac{1}{\psi(n_{\nu_\varrho})}} \geqq \lim_{\varrho \to \infty} \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{\psi(n_{\nu_\varrho})}{\psi(n_{\nu_\varrho})}} e^{2\frac{\psi(n_{\nu_\varrho})}{\psi(n_{\nu_\varrho})} \log \frac{\psi(n_{\nu_\varrho})}{\psi(n_{\nu_\varrho})}} \sqrt{e\,\psi(n_{\nu_\varrho})}^{\frac{1}{\psi(n_{\nu_\varrho})}} = 1,$$

oder unter Berücksichtigung von (9)

$$\lim_{\varrho \to \infty} |F_\varrho(1)|^{\frac{1}{\psi(n_{\nu_\varrho})}} = 1. \tag{11}$$

Um nun zu der angekündigten Beziehung zu gelangen, die an die Stelle von (7) treten soll, bilden wir unter Verwendung der eben eingeführten Hilfsfunktion aus den Polynomen $P_n(z)$ die Ausdrücke

$$C_\mu^{(\varrho)} e^{-\frac{m_{\varphi_\varrho}}{\Phi_\varrho} \mu \pi i} P_{\varphi_\varrho}\left(e^{\frac{\mu}{\Phi_\varrho} \pi i} z\right)$$

$$= C_\mu^{(\varrho)} \left\{ z^{m_{\varphi_\varrho}} + e^{\mu \frac{1}{\Phi_\varrho} \pi i} p_{\varphi_\varrho - m_{\varphi_\varrho} - 1}^{(\varphi_\varrho)} z^{m_{\varphi_\varrho}+1} + \cdots + e^{\mu \frac{\varphi_\varrho - m_{\varphi_\varrho}}{\Phi_\varrho} \pi i} p_0^{(\varphi_\varrho)} z^{\varphi_\varrho} \right\}$$

$$(\mu = 0, 1, \ldots, \psi(n_{\nu_\varrho})).$$

Die Addition dieser sämtlichen Gleichungen liefert

$$\sum_{\mu=0}^{\psi(n_{\nu_\varrho})} C_\mu^{(\varrho)}\, e^{-\frac{m_{\varphi_\varrho}}{\Phi_\varrho}\mu\pi i}\, P_{\varphi_\varrho}\left(e^{\mu\frac{1}{\Phi_\varrho}\pi i} z\right)$$

$$= F_\varrho(1)\, z^{m_{\varphi_\varrho}} + F_\varrho\left(e^{\frac{1}{\Phi_\varrho}\pi i}\right) p_{\varphi_\varrho - m_{\varphi_\varrho}-1}^{(\varphi_\varrho)} z^{m_{\varphi_\varrho}+1} + \cdots + F_\varrho\left(e^{\frac{\varphi_\varrho - m_{\varphi_\varrho}}{\Phi_\varrho}\pi i}\right) p_0^{(\varphi_\varrho)} z^{\varphi_\varrho}.$$

Indem wir das vorstehende Polynom an Stelle von $P_{\varphi_\varrho}(z)$ verwenden, können wir (7) durch die folgende, ebenfalls für jede Kurve $\mathfrak{R}_\vartheta$ geltende Beziehung ersetzen:

$$c_{n_{\nu_\varrho}} F_\varrho(1) + c_{n_{\nu_\varrho}+1} F_\varrho\left(e^{\frac{1}{\Phi_\varrho}\pi i}\right) p_{\varphi_\varrho - m_{\varphi_\varrho}-1}^{(\varphi_\varrho)} + \cdots + c_{n_{\nu_\varrho}+\varphi_\varrho - m_{\varphi_\varrho}} F_\varrho\left(e^{\frac{\varphi_\varrho - m_{\varphi_\varrho}}{\Phi_\varrho}\pi i}\right) p_0^{(\varphi_\varrho)}$$

$$(12) \qquad = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{R}_\vartheta} f^*(z)\, z^{n_{\nu_\varrho} - m_{\varphi_\varrho}} \left\{\sum_{\mu=0}^{\psi(n_{\nu_\varrho})} C_\mu^{(\varrho)}\, e^{-\frac{m_{\varphi_\varrho}}{\Phi_\varrho}\mu\pi i}\, P_{\varphi_\varrho}\left(e^{\mu\frac{1}{\Phi_\varrho}\pi i} z\right)\right\} dz.$$

An diese Gleichung, in deren linker Seite wegen $F\left(e^{\frac{\sigma}{\Phi_\varrho}\pi i}\right) = 0$ für $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\psi(n_{\nu_\varrho})}$ die Ausnahmekoeffizienten ausgeschaltet sind, knüpfen die weiteren Betrachtungen an. Wir bezeichnen ihre linke Seite mit L_ϱ, ihre rechte Seite mit R_ϱ. Indem wir nun wieder genau wie beim Beweis des Satzes 2 vorgehen, schätzen wir L_ϱ nach unten, R_ϱ nach oben ab und gelangen damit zu dem angekündigten Widerspruch.

a) Abschätzung von R_ϱ. Wir sorgen durch Beschränkung von δ auf ein genügend kleines Intervall $0 < \delta < \delta_0$ dafür, daß $\mathfrak{R}_\vartheta$ dem Gebiet $\mathfrak{G}$ angehört. Dann können wir zunächst die Hilfspolynome $P_{\varphi_\varrho}\left(e^{\mu\frac{1}{\Phi_\varrho}\pi i} z\right)$ längs $\mathfrak{R}_\vartheta$ abschätzen. Durchläuft nämlich z den Weg $\mathfrak{R}_\vartheta$, so beschreibt $e^{\mu\frac{1}{\Phi_\varrho}\pi i} z$ den Weg, der entsteht, wenn $\mathfrak{R}_\vartheta$ durch den Winkel $\frac{1}{\Phi_\varrho}\mu\pi$ um den Nullpunkt gedreht wird. Da nun der Weg $\mathfrak{R}_\vartheta$ dem Gebiet $\mathfrak{G}$ angehört und ferner für $\varrho \to \infty$ der Betrag des Drehwinkels

$$\frac{1}{\Phi_\varrho}\mu\pi \leqq \frac{\psi(n_{\nu_\varrho})}{\Phi_\varrho}\pi = \left(\frac{\psi(n_{\nu_\varrho})}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}\right)^2 \pi \to 0 \quad (\mu = 0, 1, \ldots, \psi(n_{\nu_\varrho}))$$

strebt, so gehört auch der gedrehte Weg für großes ϱ dem Gebiet $\mathfrak{G}$ an. Wir dürfen also zur Abschätzung unserer Hilfspolynome (5) heranziehen und erhalten damit für große ϱ längs des Integrationsweges $\mathfrak{R}_\vartheta$

$$\left|P_{\varphi_\varrho}\left(e^{\frac{1}{\Phi_\varrho}\mu\pi i} z\right)\right| \leqq \Theta^{\varphi_\varrho} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, \psi(n_{\nu_\varrho})).$$

Berücksichtigen wir noch (10), so folgt hieraus für große ϱ

$$(13)\qquad \max_{z\,\varepsilon\,\mathfrak{R}_\vartheta}\left|\sum_{\mu=0}^{\psi(n_{\nu_\varrho})} C_\mu^{(\varrho)}\, e^{-\frac{m_{\varphi_\varrho}}{\Phi_\varrho}\mu\pi i}\, P_{\varphi_\varrho}\left(e^{\mu\frac{1}{\Phi_\varrho}\pi i} z\right)\right| \leqq \sum_{\mu=0}^{\psi(n_{\nu_\varrho})} |C_\mu^{(\varrho)}|\,\Theta^{\varphi_\varrho} \leqq \{\psi(n_{\nu_\varrho})+1\}\,2^{\psi(n_{\nu_\varrho})}\,\Theta^{\varphi_\varrho}$$

Nunmehr verläuft die Abschätzung vollends genau wie beim Beweis des Satzes 2. Wählen wir nur ϱ hinreichend groß, so erhalten wir zunächst nach (13)

$$(14)\qquad |R_\varrho| \leqq \frac{l_{\vartheta_0}}{2\pi}\cdot M^*(\mathfrak{R}_\vartheta)\cdot(1+\delta)^{n_{\nu_\varrho}}\cdot\{\psi(n_{\nu_\varrho})+1\}\,2^{\psi(n_{\nu_\varrho})}\,\Theta^{\varphi_\varrho},$$

wo $M^*(\mathfrak{R}_\vartheta)$ das Maximum von $f^*(z)$ längs $\mathfrak{R}_\vartheta$ und l_ϑ die Länge von $\mathfrak{R}_\vartheta$ bedeutet. Dabei dürfen wir wie früher $\delta = \delta_{n_{\nu_\varrho}}$ wählen und erhalten für $M^*(\mathfrak{R}_\vartheta)$ anschließend an (2) die Abschätzung

$$(15)\qquad M^*(\mathfrak{R}_\vartheta) \leqq M^*(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}}) < 3\,\frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_\varrho})}}{(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}})^{n_{\nu_\varrho}}},$$

wobei wir wieder ε so klein angenommen denken, daß

$$(16)\qquad e^{\varepsilon}\Theta < 1$$

gilt. Aus (14) und (15) erhält man die für große ϱ geltende Beziehung

$$|R_\varrho| \leqq \frac{l_{\vartheta_0}}{2\pi}\cdot 3\,\frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_\varrho})}}{(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}})^{n_{\nu_\varrho}}}\cdot(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}})^{n_{\nu_\varrho}}\cdot\{\psi(n_{\nu_\varrho})+1\}\,2^{\psi(n_{\nu_\varrho})}\,\Theta^{\varphi_\varrho},$$

aus der weiter

$$|R_\varrho|^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}} \leqq \left(\frac{3\,l_{\vartheta_0}}{2\pi}\{\psi(n_{\nu_\varrho})+1\}\,2^{\psi(n_{\nu_\varrho})}\right)^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}}\cdot e^{\varepsilon}\,\Theta^{\frac{\varphi_\varrho}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}}$$

folgt. Hieraus entnimmt man unter Berücksichtigung der Voraussetzung $\frac{\psi(n_{\nu_\varrho})}{\varphi(n_{\nu_\varrho})} \to 0$ schließlich nach (16)

$$(17)\qquad \overline{\lim_{\varrho\to\infty}}\,|R_\varrho|^{\frac{r}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}} < 1.$$

b) Abschätzung von L_ϱ. Geht man auf die Konstruktion von $f^*(z)$ zurück, so findet man

$$L_\varrho = F_\varrho(1)\,\Gamma^{*\,n_{\nu_\varrho}}_{n_{\nu_\varrho}}\,a_{n_{\nu_\varrho}} + F_\varrho\left(e^{\frac{1}{\Phi_\varrho}\pi i}\right)\Gamma^{*\,n_{\nu_\varrho}+1}_{n_{\nu_\varrho}}\,a_{n_{\nu_\varrho}+1}\,p^{(\varphi_\varrho)}_{\varphi_\varrho-m_{\varphi_\varrho}-1} + \cdots +$$
$$+ F_\varrho\left(e^{\frac{\varphi_\varrho-m_{\varphi_\varrho}}{\Phi_\varrho}\pi i}\right)\Gamma^{*\,n_{\nu_\varrho}+\varphi_\varrho-m_{\varphi_\varrho}}_{n_{\nu_\varrho}}\,a_{n_{\nu_\varrho}+\varphi_\varrho-m_{\varphi_\varrho}}\,p^{(\varphi_\varrho)}_0.$$

Da dieser Ausdruck nach der Konstruktion von $F_\varrho(z)$ keine Ausnahmekoeffizienten a_n enthält, sondern nur solche, die die Lückenbedingung (3) erfüllen, so kann man ähnlich schließen wie beim Beweis des Satzes 2. Berücksichtigt man (11), so erhält man zunächst wie dort für das erste Glied

$$\overline{\lim_{\varrho\to\infty}} \left| F_\varrho(1)\, \Gamma^{n_{\nu_\varrho}}_{n_{\nu_\varrho}^*}\, a_{n_{\nu_\varrho}} \right|^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}} \geqq 1. \tag{18}$$

Unter Berücksichtigung von (9) erhält man ferner in derselben Weise wie damals

$$\left| L_\varrho - F_\varrho(1)\, \Gamma^{n_{\nu_\varrho}}_{n_{\nu_\varrho}^*}\, a_{n_{\nu_\varrho}} \right| \leqq \varphi(n_{\nu_\varrho})\,(1-3\,d^2)^{\varphi(n_{\nu_\varrho})}\, 2^{\psi(n_{\nu_\varrho})}$$

und damit

$$\overline{\lim_{\varrho\to\infty}} \left| L_\varrho - F_\varrho(1)\, \Gamma^{n_{\nu_\varrho}}_{n_{\nu_\varrho}^*}\, a_{n_{\nu_\varrho}} \right|^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}} \leqq 1-3\,d^2 < 1. \tag{19}$$

Aus (18) und (19) folgt schließlich

$$\overline{\lim_{\varrho\to\infty}} \left| L_\varrho \right|^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}} \geqq 1. \tag{20}$$

Die beiden Limesrelationen (17) und (20) sind nicht miteinander verträglich. Unsere Annahme, $f(z)$ und damit $f^*(z)$ sei an der Stelle $z=1$ regulär, hat also in der Tat zu einem Widerspruch geführt und damit ist die Nichtfortsetzbarkeit von $f(z)$ bewiesen.

Bemerkung. Es sei noch bemerkt, daß der vorstehende Satz 3 derselben Verallgemeinerung fähig ist wie der Satz 2: Da in die Hilfsfunktion $f^*(z)$ nur diejenigen Koeffizienten a_n eingehen, welche (für das willkürlich gewählte ϑ aus $0<\vartheta<1$) den ϑ-Umgebungen der a_{n_ν} angehören, so genügt es, die Voraussetzung a) für die Gesamtheit dieser Koeffizienten zu machen, während die Gesamtheit aller übrigen Koeffizienten nur der Bedingung

$$\overline{\lim} \left| a_n \right|^{\frac{1}{n}} = 1$$

genügen muß.

(Eingegangen am 8. November 1942.)

Über die absolute Konvergenz von Polynomreihen.

Von

Stephan Lipka in Szeged (Ungarn).

1. Es seien $P_n(z)$ Polynome mit lauter reellen Koeffizienten. Wir werden die absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z) \tag{1}$$

untersuchen. Weiß man, daß die Reihe in einem Punkte absolut konvergiert, so kann man hieraus auf die absolute Konvergenz in anderen Punkten schließen. Von E. Hille stammt z. B. der Satz[1]): Haben die Polynome $P_n(z)$ lauter reelle, nichtnegative Nullstellen und konvergiert die Reihe (1) im Punkte z_0, der nicht auf der reellen Achse liegt, absolut, so konvergiert sie absolut im Kreisabschnitt $|z| \leqq |z_0|$, $R(z) \geqq R(z_0)$. Es gilt die folgende, leicht beweisbare Verallgemeinerung dieses Satzes:

Satz 1. *Es seien die Nullstellen der $P_n(z)$ alle reell. Liegen die Nullstellen der $P_n(z)$ alle in einem Intervall $\xi_1 \leqq x \leqq \xi_2$, und konvergiert die Reihe* (1) *im Punkte z_0, $J(z_0) > 0$, absolut, so konvergiert sie absolut im Kreiszweieck*

$$|z - \xi_1| \leqq |z_0 - \xi_1|, \quad |z - \xi_2| \leqq |z_0 - \xi_2|. \tag{2}$$

Beweis. Die Punkte z_0, $\bar{z}_0$ bestimmen ein Kreisbüschel, dessen Zentrale die reelle Achse ist. Das Kreiszweieck (2) enthalten die Kreise des Büschels, deren Mittelpunkte im Intervall (ξ_1, ξ_2) liegen. Ist nun a eine Nullstelle von $P_n(z)$, so fällt sie nach Voraussetzung in das Intervall (ξ_1, ξ_2), also folgt nach voriger Bemerkung, daß der Kreis $|z - a| \leqq |z_0 - a|$ das Kreiszweieck (2) enthält. Ist also z ein Punkt des Kreiszweiecks (2), so gilt

$$|z - a| \leqq |z_0 - a|,$$

und durch diese Abschätzung der das Polynom $P_n(z)$ zusammensetzenden Linearfaktoren gewinnt man endlich die Ungleichung

$$|P_n(z)| \leqq |P_n(z_0)|$$

für die Punkte z von (2). Damit ist aber Satz 1 bewiesen.

Setzt man im Satz 1 $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \infty$, so gewinnt man den erwähnten Satz von E. Hille. Jetzt tritt die Halbebene $R(z) \geqq R(z_0)$ an Stelle des Kreises $|z - \xi_2| \leqq |z_0 - \xi_2|$.

[1]) E. Hille, On the absolute convergence of polynomial series. American Math. Monthly **45** (1938), S. 220–226.

2. Wendet man den Satz 1 für $\xi_1 = -\infty$, $\xi_2 = \xi > 0$ an, so gewinnt man den

Satz 2. *Die Nullstellen von $P_n(z)$ seien alle reell. Gibt es eine obere Schranke ξ (> 0) für sämtliche Nullstellen von $P_n(z)$ und konvergiert die Reihe* (1) *für ein z_0, das nicht auf der reellen Achse liegt, absolut, so konvergiert sie absolut im Kreisabschnitt*

$$|z - \xi| \leqq |z_0 - \xi|, \quad R(z) \leqq R(z_0). \tag{3}$$

Eine Erweiterung des Satzes 2 ist der

Satz 3. *Es sei ξ eine positive obere Schranke für die reellen Nullstellen von $P_n(z)$. Die komplexen nichtreellen Nullstellen von $P_n(z)$ sollen alle in dem Streifen*

$$R(z) \leqq -\delta, \quad -\eta \leqq J(z) \leqq \eta \qquad (\delta > 0, \ \eta > 0) \tag{4}$$

liegen. Konvergiert die Reihe (1) *absolut in einem Punkte*

$$z_0 = x_0 + i y_0, \quad x_0 > 0, \quad y_0 > 0,$$

liegt ferner der Kreisabschnitt (3) *in der Halbebene $R(z) \geqq 0$, d. h. ist*

$$\xi \geqq |z_0 - \xi| \tag{4_1}$$

und gilt noch

$$\delta \geqq \eta, \tag{4_2}$$

$$\xi \geqq x_0, \tag{4_3}$$

so konvergiert die Reihe (1) *absolut im Kreisabschnitt* (3).

Beweis. Es sei $\alpha \pm i\beta$ ein konjugiert-komplexes Wurzelpaar von $P_n(z)$. Wir betrachten den Faktor zweiten Grades

$$[z - (\alpha + i\beta)]\,[z - (\alpha - i\beta)] = \psi(z)$$

von $P_n(z)$. Da nach Voraussetzung (4) $\alpha < 0$ ist, so folgt aus der Formel

$$|\psi(x + iy)|^2 = \{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2\}\{(x - \alpha)^2 + (y + \beta)^2\}$$

die Ungleichung

$$|\psi(x_0 + iy)| \geqq |\psi(x + iy)| \tag{5}$$

für $0 \leqq x \leqq x_0$. Da $\alpha < 0$, ferner nach (4_2) und (4) $|\alpha| \geqq \beta$ ist, so fällt auch der Koeffizient von y^2 in dem Polynom

$$|\psi(x_0 + iy)|^2 = y^4 + 2y^2\{(x_0 - \alpha)^2 - \beta^2\} + \{\beta^2 + (x_0 - \alpha)^2\}^2$$

positiv aus. Der Wert des Polynoms wächst also mit y, und darum gilt die Ungleichung

$$|\psi(x_0 + iy_0)| \geqq |\psi(x_0 + iy)| \tag{6}$$

für $|y| \leqq y_0$. Liegt nun $z = x + iy$ im Kreisabschnitt (3), so genügt es nach (4_1) und (4_3) der Bedingungen $0 \leqq x \leqq x_0$, $|y| \leqq y_0$, d. h. der Bedingungen von (5) und (6). Infolgedessen bestehen die Ungleichungen (5) und (6), und hieraus folgt:

$$|\psi(z_0)| \geqq |\psi(z)| \tag{7}$$

für die Punkte $z = x + iy$ von (3).

Ist $(z - a)$ ein linearer Faktor von $P_n(z)$, so folgt, wie beim Beweis des Satzes (1), daß für die Punkte z von (3) die Ungleichung $|z - a| \leqq |z_0 - a|$ gilt. Hieraus folgt endlich nach (7) für die Punkte z von (3) die Abschätzung

$$|P_n(z_0)| \geqq |P_n(z)|,$$

und damit ist Satz 3 bewiesen.

3. Die Nullstellen von $P_n(z)$ seien alle reell. Es bedeute $N(P_n, a, b)$ die Anzahl der Nullstellen von $P_n(z)$ im Intervall (a, b) und $N(P, a, b)$ bedeute eine obere Grenze der Zahlen $N(P_n, a, b)$. E. Hille hat unter anderem den Satz bewiesen [2]): Es sei $N(P, a, b) < \infty$ für jedes endliche Intervall (a, b) und sei $N(P, -\infty, 0) = 0$. Konvergiert die Reihe (1) für ein z_0, das nicht auf der positiven reellen Achse liegt, absolut, so konvergiert sie absolut in der Halbebene $R(z) > R(z_0)$.

Wir beweisen eine Verallgemeinerung des Hilleschen Satzes für reelle Polynome $P_n(z)$, die nicht lauter reelle Nullstellen haben. Es bedeute $N(P_n, a)$ die Anzahl der Nullstellen von $P_n(z)$, die in der Halbebene $R(z) \leqq a$ liegen; ferner sei $N(P, a)$ die obere Grenze der Zahlen $N(P_n, a)$, d. h. $N(P_n, a) \leqq N(P, a)$. Dann gilt der

Satz 4. *Es sei $N(P, a) < \infty$ für jedes endliche a. Konvergiert die Reihe* (1) *im Punkte $z_0 = x_0 + iy_0$, $y_0 > 0$, absolut, sind ferner die Polynome $P_n(z)$ in einer festen Umgebung $|z - z_0| \leqq \varrho$ von z_0 alle von Null verschieden, so konvergiert die Reihe* (1) *absolut in der Halbebene $R(z) > x_0$.*

Beweis. Es bezeichne ω eine später passend zu wählende positive Schranke. Wir zerlegen das Polynom $P_n(z)$ in zwei Faktoren

$$P_n(z) = P_{n1}(z) P_{n2}(z),$$

wobei die Nullstellen von $P_{n1}(z) = \prod_{(j)} (z - \zeta_j)$ der Bedingung $R(\zeta_j) \leqq \omega$ genügen. [Ist das Produkt $P_{n1}(z)$ leer, so sei $P_{n1}(z) \equiv 1$.] $P_{n2}(z)$ enthält die übrigen Faktoren von $P_n(z)$. Der Grad von $P_{n1}(z)$ ist $\leqq N(P, \omega)$. Es

[2]) Siehe Fußnote [1]), Theorem 5.

sei $z_1 = x_1 + iy_1$ eine Stelle, für welche $x_1 > x_0$ gilt. Wir werden den Wert des Quotienten

$$\left|\frac{P_n(z_1)}{P_n(z_0)}\right| = \left|\frac{P_{n1}(z_1)}{P_{n1}(z_0)}\right| \left|\frac{P_{n2}(z_1)}{P_{n2}(z_0)}\right|$$

abschätzen. Der Quotient ist aus Faktoren der Form

$$\frac{z_1 - \zeta}{z_0 - \zeta}$$

zusammengesetzt. Die Anzahl der Faktoren $\frac{z_1 - \zeta_j}{z_0 - \zeta_j}$ von $\left|\frac{P_{n1}(z_1)}{P_{n1}(z_0)}\right|$ ist höchstens gleich: $N(P, \omega) = N$. Da nach Voraussetzung die $P_n(z)$ in der Umgebung $|z - z_0| \leqq \varrho$ von z_0 alle von Null verschieden sind, so folgt die Ungleichung

$$\left|\frac{z_1 - \zeta_j}{z_0 - \zeta_j}\right| = \left|1 + \frac{z_1 - z_0}{z_0 - \zeta_j}\right| < 1 + \frac{|z_1 - z_0|}{\varrho},$$

und hieraus ergibt sich die Abschätzung

$$\left|\frac{P_{n1}(z_1)}{P_{n1}(z_0)}\right| < \left(1 + \frac{|z_1 - z_0|}{\varrho}\right)^N = M^N \tag{8}$$

(wobei M bloß von z_1 abhängt).

Es sei nun $\zeta = \xi + i\eta$, $\bar{\zeta} = \xi - i\eta$ ein konjugiert-komplexes Nullstellenpaar von $P_n(z)$; dann betrachten wir den Faktor

$$\frac{|z_1 - \zeta|\,|z_1 - \bar{\zeta}|}{|z_0 - \zeta|\,|z_0 - \bar{\zeta}|} \tag{9}$$

des Quotienten $\left|\frac{P_{n2}(z_1)}{P_{n2}(z_0)}\right|$. Man kann beweisen, daß der Wert von (9) < 1 ist, wenn die positive Schranke ω passend gewählt wird. Nach den Formeln

$$|z_0 - \zeta|^2\,|z_0 - \bar{\zeta}|^2 = \{(\xi - x_0)^2 + y_0^2 + \eta^2\}^2 - 4\,y_0^2\,\eta^2,$$
$$|z_1 - \zeta|^2\,|z_1 - \bar{\zeta}|^2 = \{(\xi - x_1)^2 + y_1^2 + \eta^2\}^2 - 4\,y_1^2\,\eta^2$$

gilt nämlich die Ungleichung

$$|z_0 - \zeta|\,|z_0 - \bar{\zeta}| > |z_1 - \zeta|\,|z_1 - \bar{\zeta}|, \tag{9'}$$

wenn

$$\{(\xi - x_0)^2 + y_0^2 + \eta^2\}^2 - \{(\xi - x_1)^2 + y_1^2 + \eta^2\}^2 > 4\,\eta^2\,(y_0^2 - y_1^2),$$

d. h. wenn

$$\{(\xi - x_0)^2 + (\xi - x_1)^2 + y_0^2 + y_1^2 + 2\,\eta^2\}\{2\,(\xi - x_1)\,(x_1 - x_0) + (x_1 - x_0)^2 + y_0^2 - y_1^2\} > 4\,\eta^2\,(y_0^2 - y_1^2)$$

besteht. Man sieht aber unmittelbar, daß die letztere Ungleichung sicher erfüllt ist, wenn $R(\zeta) = \xi$ der Bedingung

$$\xi > x_1 + \frac{|y_0^3 - y_1^3|}{2(x_1 - x_0)}$$

genügt. Setzt man also

$$\omega = x_1 + \frac{|y_0^3 - y_1^3|}{2(x_1 - x_0)},$$

so ist die Ungleichung (9') für $R(\zeta) > \omega$ erfüllt und der Wert von (9) wird kleiner als 1.

Für eine reelle Nullstelle ξ von $P_{n2}(z)$ gilt ähnlich eine Ungleichung

$$\left|\frac{z_1 - \xi}{z_0 - \xi}\right| < 1$$

für $\xi > \omega$. Dies folgt einfach nach vorigen Betrachtungen, wenn man dort $\eta = 0$ setzt. Der Quotient $\left|\frac{P_{n2}(z_1)}{P_{n2}(z_0)}\right|$ hat also lauter Faktoren, die < 1 sind, und deshalb gilt

$$\left|\frac{P_{n2}(z_1)}{P_{n2}(z_0)}\right| < 1.$$

Hieraus folgt endlich nach (8) die Abschätzung

$$\left|\frac{P_n(z_1)}{P_n(z_0)}\right| < M^N,$$

d. h.

$$|P_n(z_1)| < M^N |P_n(z_0)|,$$

und damit ist Satz 4 bewiesen.

(Eingegangen am 16. November 1942.)

Über nicht meßbare Punktmengen und nicht meßbare Funktionen.

Von

Othmar Zaubek, Schrems (Nd).

Die durch G. Cantor, Peano, Jordan, Borel und anderen begründete moderne Theorie des Inhaltes wurde insbesondere von H. Lebesgue ausgebaut. Sie erhielt durch die Theorie der Maßfunktionen und der Meßbarkeit von C. Carathéodory einen gewissen Abschluß. Die hier folgenden Untersuchungen gelten einer feineren Theorie der nicht meßbaren Punktmengen und Funktionen[1]).

Wir knüpfen unsere Überlegungen an die Theorie der Meßbarkeit an. Ist R ein beliebiger metrischer Raum und $M(X)$ eine Maßfunktion, deren Definitionsbereich die Menge aller Teilmengen von R ist, wofür wir kürzer sagen wollen $M(X)$ ist in R definiert, dann heißt in bekannter Weise die Punktmenge $A \subset R$ meßbar für die Maßfunktion $M(X)$, wenn für jede Punktmenge Y endlichen äußeren Maßes die Gleichung

$$M(Y) = M(AY) + M(Y - AY)$$

besteht. Die Eigenschaft einer Punktmenge, meßbar zu sein, hängt von der zugrunde gelegten Maßfunktion ab und es ist bekannt, daß es Maßfunktionen gibt, für die jede Punktmenge des Definitionsbereiches meßbar ist. Auf hierher gehörende Einzelheiten gehen wir später noch näher ein.

Ist R ein metrischer Raum und $M(X)$ eine in ihm definierte Maßfunktion, für die es nicht meßbare Punktmengen gibt, und A eine meßbare, B eine zu A fremde nicht meßbare Punktmenge, dann ist die Summe $C = A + B$ eine nicht meßbare Punktmenge, die sich in zwei Teile spalten läßt, von denen der eine meßbar, der andere nicht meßbar ist. Diese Tatsache legt die Frage nahe, auf welche Art sich eine nicht meßbare Punktmenge in zwei Teile spalten läßt, wobei der eine meßbar, der andere nicht meßbar ist. Diese Frage führt also auf die Struktur der nicht meßbaren Punktmengen, die hier in einfacher Weise untersucht werden soll.

[1]) Es ist möglich, daß die Gedanken, die der folgenden Theorie zugrunde liegen, oder auch ähnliche, bereits von anderen Autoren entwickelt wurden und ihr Niederschlag veröffentlicht wurde. Eine Entscheidung darüber ist mir zur Zeit nicht möglich, da ich die hierher gehörenden Veröffentlichungen nicht überblicke.

Bevor wir mit den eigentlichen Entwicklungen beginnen, verallgemeinern wir den Begriff der Maßfunktion in einfacher Weise. Ist R ein beliebiger metrischer Raum und ein Mengensystem $\mathfrak{m}$ gegeben, dessen Mengen Punktmengen des Raumes R sind, so wollen wir eine Mengenfunktion mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{m}$ eine Maßfunktion nennen, wenn die die Maßfunktionen charakterisierenden Eigenschaften, bezogen auf das Mengensystem $\mathfrak{m}$, für diese Mengenfunktion gelten. Die präzise Formulierung der auf ein Mengensystem bezogenen Eigenschaften liegt auf der Hand. Diese Verallgemeinerung ist auch vom Standpunkt der elementaren Flächenrechnung gerechtfertigt; denn in der elementaren Theorie des Flächeninhaltes wird der Flächeninhalt zunächst nur für Streckenfiguren, das sind geschränkte Punktmengen, deren vollständige Begrenzung nur aus endlich vielen Strecken besteht und die einen Punkt enthalten, der nicht zur Begrenzung gehört, erklärt. Der Definitionsbereich dieser Maßfunktion wird dann schließlich in der modernen Theorie des Flächeninhaltes auf das System aller Teilmengen der Ebene ausgedehnt, wenn man den Flächeninhalt als den äußeren Inhalt interpretiert.

Diese also zunächst nur für die Streckenfiguren definierte Maßfunktion besitzt die Eigenschaft, daß ihr Definitionsbereich erweitert werden kann. Um diese Bildungen zu präzisieren, geben wir folgende Definitionen:

Definition 1. Eine Maßfunktion heißt vollständig, wenn sie in einem die Punktmengen des Definitionsbereiches enthaltenden Raume definiert ist.

Definition 2. Eine Maßfunktion mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{m}$ heißt erweiterungsfähig, wenn es eine Maßfunktion mit einem $\mathfrak{m}$ echt umfassenden Definitionsbereich gibt, deren Funktionswerte in $\mathfrak{m}$ mit denen der gegebenen übereinstimmen.

Definition 3. Eine nicht erweiterungsfähige Maßfunktion heißt starr.

Aus der Definition 1 ergibt sich unmittelbar, daß eine Maßfunktion nur dann vollständig sein kann, wenn ihr Definitionsbereich jede Teilmenge der Vereinigungsmenge aller Mengen des Definitionsbereiches enthält. Ist eine Maßfunktion vollständig, so braucht sie keineswegs starr zu sein. So läßt sich die Maßfunktion „Länge" einer geraden (linearen) Punktmenge, deren Definitionsbereich die Punktmenge Gerade ist, auf das System aller streckbaren Kurven erweitern, obwohl die Maßfunktion vollständig ist. Die Erweiterungsfunktion ist jedoch nicht vollständig. Diese Tatsache legt die Frage nahe, ob es Maßfunktionen gibt, die vollständig sind und die sich so erweitern lassen, daß die Erweiterungsfunktion wieder vollständig ist. Daß dies der Fall ist, sieht man bei folgendem einfachem Beispiel. Ist R ein beliebiger metrischer Raum und $M(X)$ eine Maßfunktion in ihm und A eine beliebige echte Teilmenge von R, fassen wir nun A als metrischen Raum

auf, so erzeugt $M(X)$ eine Maßfunktion im Raume A, diese läßt sich dann so erweitern, daß die Erweiterungsfunktion wieder vollständig ist. Nennen wir eine Erweiterung einer vollständigen Maßfunktion zu einer vollständigen Maßfunktion eine Fortsetzung, so sehen wir an dem obigen mehr oder weniger trivialen Beispiel, daß es fortsetzbare Maßfunktionen gibt. Die Untersuchung der Möglichkeit bzw. der Eindeutigkeit, bei vorgegebenem erweitertem Definitionsbereich, der Fortsetzung einer vollständigen Maßfunktion, in ihrer Abhängigkeit von der Maßfunktion, würde einen tieferen Einblick in die Theorie der Maßfunktionen geben. Wir gehen darauf nicht näher ein.

Durch diese Verallgemeinerung des Begriffes der Maßfunktion werden auch gewisse Eigenschaften des Systems der meßbaren Punktmengen abgeändert. Die Haupteigenschaften des Systems der meßbaren Punktmengen einer vollständigen Maßfunktion kommen dadurch zum Ausdruck, daß diese einen σ-Mengenkörper bilden. Setzen wir daher voraus, daß der Definitionsbereich der zugrunde gelegten Maßfunktion ein σ-Mengenkörper ist, der außerdem noch die Vereinigungsmenge aller Mengen des Systems als Element enthält, so läßt sich leicht zeigen, daß die für diese Maßfunktion definierten meßbaren Punktmengen einen σ-Mengenkörper bilden. Die Beweise laufen denen für eine vollständige Maßfunktion ganz analog. Um wieder einfacher sprechen zu können, treffen wir folgende Festsetzungen:

Definition 4. Ein Körper, der die Vereinigungsmenge aller seiner Elemente als Element enthält, heißt ein gewöhnlicher Mengenkörper.

Definition 5. Eine Maßfunktion, deren Definitionsbereich ein gewöhnlicher σ-Mengenkörper ist, heißt eine gewöhnliche Maßfunktion.

Wir werden bei unseren Untersuchungen gewöhnliche Maßfunktionen zugrunde legen, dies reicht für die meisten Fälle der Praxis hin.

Um noch gewisse Eigenschaften des Raumes einfach ausdrücken zu können, führen wir noch einige Definitionen ein.

Definition 6. Die Punktmenge A des metrischen Raumes R heißt im Punkte P des Raumes R separabel, wenn es eine Umgebung U von P gibt, so daß der Durchschnitt AU höchstens separabel ist. Gibt es keine derartige Umgebung, so heißt A nicht separabel im Punkte P.

Definition 7. Eine in jedem ihrer Punkte separable Punktmenge heißt lokal separabel. Eine in jedem Punkte des Raumes separable Menge heißt überall lokal separabel.

Eine entsprechende Erklärung gilt für den lokal separablen Raum. Um unsere Definitionen zu rechtfertigen, geben wir Beispiele von Räumen bzw. von Punktmengen, die lokal separabel, aber nicht separabel bzw. lokal separabel, aber nicht überall lokal separabel sind.

Wir gehen von einer nicht abzählbaren Menge aus und machen diese zu einem metrischen Raum, indem wir je zwei Punkten eine feste von Null verschiedene Entfernung geben. Dieser Raum ist nicht separabel und eine Punktmenge aus ihm, die nicht abzählbar unendlich viele Punkte besitzt, ist auch nicht separabel. Zu jedem Punkte gibt es eine Umgebung, die nur diesen Punkt selbst enthält. Der Raum ist daher lokal separabel.

Zur Konstruktion einer lokal separablen, nicht überall lokal separablen Punktmenge gehen wir von einer Punktmenge der Mächtigkeit $\aleph$ aus. Wir zerlegen diese in abzählbar unendlich viele zueinander fremde Mengen A_1, $A_2, \ldots A_n, \ldots$, wobei jede dieser Mengen A_k die Mächtigkeit $\aleph$ haben soll. Wir geben nun je zwei Punkten von A_1 die Entfernung 1, wählen irgendeinen Punkt aus A_1 aus, er heiße P und nennen die übrigen Elemente aus A_1 Elemente erster Ordnung, die Elemente aus A_k Elemente k-ter Ordnung. Wir legen nun folgende Entfernung fest: Je zwei Punkte k-ter Ordnung haben die Entfernung $\frac{1}{2^{k-1}}$, ein Punkt k-ter Ordnung hat von einem Punkt m-ter Ordnung $(k \neq m)$ die Entfernung $\left|\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{m-1}}\right|$, vom Punkte P die Entfernung $\frac{1}{2^{k-1}}$. Durch diese Entfernungsdefinition wird die ursprüngliche Menge zu einem metrischen Raum, denn die Entfernungsaxiome sind, wie man leicht nachrechnet, erfüllt. Dieser Raum ist in P nicht separabel, er ist daher nicht lokal separabel. Irgendeine Punktmenge aus diesem Raum, die den Punkt P nicht enthält, ist lokal separabel. Denn es gibt dann für jeden Punkt dieser Menge Umgebungen, die nur einen einzigen Punkt enthalten. Wir können aber auch Punktmengen angeben, die lokal separabel, aber nicht überall lokal separabel sind. Dazu gehen wir von einer beliebigen Umgebung U des Punktes P aus und fassen die Punktmenge $A = U - P$ ins Auge. Die Punktmenge A enthält den Punkt P nicht, ist also lokal separabel, sie ist aber im Punkte P nicht lokal separabel, also ist die Punktmenge A nicht überall lokal separabel. Durch geeignete Modifikation dieses Verfahrens kann man schließlich Räume und Punktmengen konstruieren, die in keinem einzigen Punkte separabel sind; solche Punktmengen wird man dann total nicht separabel nennen. Da wir derartige Räume weiter nicht benötigen, gehen wir darauf nicht näher ein.

Aus diesen Definitionen ergeben sich die Sätze:

Satz 1. *Eine separable Punktmenge ist überall lokal separabel, eine überall lokal separable Punktmenge ist lokal separabel.*

Satz 2. *Jede Teilmenge einer separablen, bzw. überall lokal separablen, bzw. lokal separablen Punktmenge ist bzw. höchstens separabel, überall lokal separabel, lokal separabel.*

Die Beweise der Sätze ergeben sich unmittelbar.

Nun übertragen wir den Begriff der Meßbarkeit in geeigneter Weise auf die Punkte. Wir gehen von irgendeiner Maßfunktion aus, deren Definitionsbereich ein Mengensystem $\mathfrak{m}$ ist, dessen Mengen, Punktmengen eines und desselben metrischen Raumes R sind und geben folgende Erklärungen:

Definition 8. Die Punktmenge A des metrischen Raumes R heißt für die Maßfunktion $M(X)$ im Punkte P des Raumes meßbar, wenn es eine Umgebung U von P gibt, so daß der Durchschnitt AU eine für $M(X)$ meßbare Punktmenge ist. Gibt es keine derartige Umgebung, so heißt A im Punkte P für $M(X)$ nicht meßbar.

Definition 9. Eine in jedem ihrer Punkte für $M(X)$ meßbare Punktmenge heißt für $M(X)$ lokal meßbar. Eine in jedem Punkte des Raumes für $M(X)$ meßbare Punktmenge heißt für $M(X)$ überall lokal meßbar.

Daraus folgert man die Sätze:

Satz 3. *Eine für $M(X)$ meßbare Punktmenge ist für $M(X)$ überall lokal meßbar. Eine für $M(X)$ überall lokal meßbare Punktmenge ist für $M(X)$ lokal meßbar.*

Satz 4. *Die Vereinigungsmenge endlich vieler und der Durchschnitt endlich vieler für eine vollständige Maßfunktion in P meßbarer bzw. überall lokal meßbarer Punktmengen ist für diese Maßfunktion in P meßbar bzw. überall lokal meßbar.*

Der Beweis des ersten Satzes liegt auf der Hand. Der andere Satz folgt einfach daraus, daß die Vereinigungsmenge und der Durchschnitt endlich vieler für eine vollständige Maßfunktion meßbarer Punktmengen für diese Maßfunktion wieder meßbar ist.

Wir wollen nun den Satz 3 für engere Voraussetzungen umkehren; zu diesem Zwecke beweisen wir den Satz:

Satz 5. *Eine für die gewöhnliche Maßfunktion $M(X)$ lokal meßbare Punktmenge, die höchstens separabel ist, ist für $M(X)$ meßbar. Eine überall lokal separable Punktmenge, die für eine vollständige Maßfunktion lokal meßbar ist, ist für diese Maßfunktion überall lokal meßbar.*

Zum Beweise des ersten Teiles des Satzes ordnen wir jedem Punkte, der den Bedingungen des ersten Teiles des Satzes genügenden Punktmenge A eine Umgebung so zu, daß der Durchschnitt dieser Umgebung mit A eine meßbare Punktmenge ist. Ist nun A höchstens separabel, so gibt es nach dem Lindelöfschen Überdeckungssatze eine endliche oder höchstens abzählbar unendliche Menge von Punkten $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n, \ldots$ aus A derart, daß A Teilmenge der Vereinigungsmenge der diesen Punkten zugeordneten

Umgebungen ist. Ist U_k die dem Punkte P_k zugeordnete Umgebung, so ist dann:

$$A \subset U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots,$$

es gilt daher:

$$A = AU_1 + AU_2 + AU_3 + \cdots + AU_n + \cdots.$$

A ist daher als Vereinigungsmenge abzählbar vieler meßbarer Punktmengen darstellbar, und da wir eine gewöhnliche Maßfunktion haben, ist diese Vereinigungsmenge meßbar. A ist daher meßbar.

Wir wenden uns nun zum Beweise des zweiten Teiles des Satzes. Ist P irgendein Punkt des Raumes und A eine den Bedingungen des zweiten Teiles des Satzes genügende Punktmenge, dann gibt es eine Umgebung U des Punktes, so daß der Durchschnitt AU separabel ist. Da die zugrunde gelegte Maßfunktion eine vollständige Maßfunktion ist, ist die offene Punktmenge U meßbar und da die Punktmenge lokal meßbar vorausgesetzt wird, ist nach den Sätzen 3 und 4 auch der Durchschnitt AU lokal meßbar. Wenden wir jetzt den bereits bewiesenen ersten Teil des Satzes an, so folgt, daß AU meßbar ist. Würden wir dagegen bloß voraussetzen, daß die Maßfunktion gewöhnlich ist, so könnten wir nicht ohne weiteres schließen, daß U und AU meßbar ist.

Aus der Meßbarkeit jeder abzählbaren Punktmenge für jede vollständige Maßfunktion ergibt sich aus dem Satze 5 der

Satz 6. *Für eine vollständige Maßfunktion ist eine höchstens separable Punktmenge dann und nur dann meßbar, wenn sie in jedem in ihr liegenden Kondensationspunkt meßbar ist.*

Es sei A eine beliebige Punktmenge des zugrunde gelegten Raumes R und $M(X)$ eine Maßfunktion, dessen Definitionsbereich nur aus Mengen besteht, die Teilmengen aus R sind, wofür wir kürzer sagen wollen $M(X)$ ist eine Maßfunktion aus R, dann betrachten wir die Menge, die aus allen und nur den Punkten des Raumes R besteht, in denen A meßbar ist, sie heiße die M-Menge von A und werde mit A_m bezeichnet. Die Komplementärmenge heiße die N-Menge von A und werde mit A_n bezeichnet. Es gilt dann der Satz:

Satz 7. *Für jede Maßfunktion ist die M-Menge jeder beliebigen Punktmenge offen, ihre N-Menge ist abgeschlossen.*

Zum Beweise des Satzes haben wir zu zeigen, daß jeder Punkt der M-Menge ein innerer Punkt ist. Ist P ein beliebiger Punkt der M-Menge A_m von A, so gibt es eine Umgebung U von P derart, daß der Durchschnitt AU meßbar ist. Dann existiert aber für jeden Punkt Q von U eine Umgebung V derart, daß der Durchschnitt AV meßbar ist, man braucht für V bloß U zu setzen. Die N-Menge ist als Komplement einer offenen Menge abgeschlossen.

Setzen wir voraus, daß die Punktmenge überall lokal separabel und die Maßfunktion vollständig ist, dann ist die N-Menge perfekt. Denn besäße sie einen isolierten Punkt P, so gäbe es eine Umgebung U von P, die keinen von P verschiedenen Punkt enthielte, der zur N-Menge gehört. Da die Punktmenge A überall lokal separabel ist, gibt es eine Umgebung V von P, so daß AV separabel ist. Die Punktmenge $AVU - P$ ist daher separabel und lokal meßbar, also nach Satz 5 meßbar, daher auch die Punktmenge AVU. Es würde also eine Umgebung $W = UV$ des Punktes P geben, so daß AW meßbar ist, im Gegensatz zur Annahme, daß P ein Punkt der N-Menge von A ist. Es gilt also der

Satz 8. *Für jede vollständige Maßfunktion ist die N-Menge jeder überall lokal separablen Punktmenge perfekt.*

Mit Hilfe der Sätze 3 und 5 ergibt sich unmittelbar der

Satz 9. *Für jede gewöhnliche Maßfunktion ist die M-Menge einer jeden höchstens separablen Punktmenge dann und nur dann dem Gesamtraume gleich, wenn die Punktmenge meßbar ist.*

Für eine vollständige Maßfunktion ist die M-Menge einer beliebigen überall lokal seperablen Punktmenge dann und nur dann dem Gesamtraume gleich, wenn die Punktmenge lokal meßbar ist.

Die bezüglichen N-Mengen sind in den betreffenden Fällen und nur in diesen leer.

Ferner gilt der

Satz 10. *Für jede vollständige Maßfunktion hat die Komplementärmenge einer beliebigen Punktmenge dieselbe M-Menge und dieselbe N-Menge wie diese.*

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich aus der Tatsache, daß für eine vollständige Maßfunktion aus der Meßbarkeit einer Punktmenge die Meßbarkeit ihrer Komplementärmenge folgt.

Der Durchschnitt der M-Menge der beliebigen Punktmenge A mit A heiße der M-Kern von A und werde mit A_m^* bezeichnet, der Durchschnitt der N-Menge von A mit A heiße der N-Kern von A und werde mit A_n^* bezeichnet. Es ist also $A_m^* = AA_m$ und $A_n^* = AA_n$. Ist P ein beliebiger Punkt von A_m^*, so gibt es eine Umgebung U derart, daß der Durchschnitt $A_m^* U$ meßbar ist, denn P ist als Punkt von A_m^* auch Punkt von A_m, es gibt daher eine Umgebung V von P derart, daß der Durchschnitt AV meßbar ist; A ist dann in jedem Punkte von V meßbar, also ist AV Teilmenge von A_m; setzt man also $U = V$, so ist $UA_m^* = VA_m^* = VA$ eine meßbare Punktmenge. Der M-Kern ist daher lokal meßbar, ist er außerdem überall lokal separabel und die zugrunde gelegte Maßfunktion vollständig, so ist er nach Satz 5 überall

lokal meßbar. Ist Q ein beliebiger Punkt des N-Kernes von A, so ist für jede Umgebung U von Q der Durchschnitt UA nicht meßbar. Ist nun der M-Kern in Q meßbar, die zugrunde gelegte Maßfunktion vollständig (es würde genügen, eine Maßfunktion vorauszusetzen, die gewöhnlich ist und deren Definitionsbereich alle offenen Punktmengen enthält), so muß der N-Kern in Q nicht meßbar sein. Machen wir für die Maßfunktion keine einschränkenden Voraussetzungen, so kann man zunächst schließen, falls die Menge A separabel ist, daß der N-Kern dann und nur dann leer ist, wenn die Punktmenge A meßbar ist. Wir haben also folgenden

Satz 11. *Für jede Maßfunktion ist der M-Kern der beliebigen Punktmenge A, das ist der Durchschnitt der M-Menge von A mit A, lokal meßbar. Ist die zugrunde gelegte Maßfunktion vollständig und die Punktmenge überall lokal separabel, so ist der M-Kern überall lokal meßbar.*

Um die besondere Eigenschaft gewisser N-Kerne einfach auszudrücken, geben wir noch folgende Eigenschaftserklärung:

Definition 10. Eine für eine bestimmte Maßfunktion in jedem ihrer Punkte nicht meßbare Punktmenge heißt total nicht meßbar für diese Maßfunktion.

Wir haben dann noch den Satz:

Satz 12. *Für jede vollständige Maßfunktion ist der N-Kern einer jeden überall lokal separablen Punktmenge entweder leer oder total nicht meßbar.*

Zur Formulierung des Satzes 12 bemerken wir noch, daß zwar nach Definition 10 auch die leere Menge total nicht meßbar wäre, daß es aber sprachlich ungewöhnlich wäre, eine meßbare Menge auch total nicht meßbar zu nennen, obwohl dies inhaltlich gar keinen Widerspruch bedeuten würde. Letzten Endes ist die Bezeichnungsweise reine Konvention. Wir wollen jedoch die leere Menge nicht zu den total nicht meßbaren Mengen rechnen.

Wir können nun die Ausgangsfrage unserer Entwicklungen, nämlich die nach der Zerlegung einer gegebenen nicht meßbaren Punktmenge in zwei Teilmengen mit bestimmten Meßbarkeitseigenschaften beantworten. Ist, die nicht meßbare Punktmenge A total nicht meßbar, so ist ihr M-Kern leer. Ist A nicht total nicht meßbar, so ist nach Satz 11 ihr M-Kern eine nicht leere lokal meßbare Punktmenge, ist nun A separabel und die zugrunde gelegte Maßfunktion eine gewöhnliche Maßfunktion, so ist nach Satz 5 der M-Kern meßbar, der N-Kern daher nicht meßbar. Ist dagegen die nicht meßbare Punktmenge A überall lokal separabel und die Maßfunktion vollständig, so läßt sich A nach den Sätzen 11 und 12 in eine lokal meßbare und in eine total nicht meßbare Menge zerlegen. Für vollständige Maßfunktionen sind diese Zerlegungen natürlich nicht eindeutig. Denn ist z. B. A separabel, so ist der N-Kern, weil die Punktmenge A nicht meßbar ist,

nicht leer, also nach Satz 12 total nicht meßbar, also eine nicht abzählbar unendliche Menge. Wählt man daher irgendeinen Punkt aus A_n^* aus, was man auf unendlich viele verschiedene Weisen durchführen kann, und fügt ihn zum M-Kern von A, so ist dies auch eine Zerlegung von A in eine meßbare und eine total nicht meßbare Teilmenge. Um die Eindeutigkeit zu erzwingen, müssen wir daher noch weitere Forderungen stellen. Wir wollen uns dabei auf vollständige Maßfunktionen und separable Punktmengen beschränken. Wir können dabei Forderungen an den meßbaren Teil der Zerlegung oder an den nicht meßbaren Teil stellen. Verlangen wir, daß der nicht meßbare Teil der Zerlegung eine umfassendste total nicht meßbare Punktmenge sein soll, so ist die Zerlegung unter den gemachten Voraussetzungen eindeutig. Ist nämlich $N + M$ eine Zerlegung einer nicht meßbaren Punktmenge A, in eine umfassendste total nicht meßbare Punktmenge N und ist P ein Punkt von N, so wollen wir zeigen, daß P ein Punkt des N-Kernes von A ist. Da N total nicht meßbar ist, ist N in P nicht meßbar, M als meßbare Punktmenge in P meßbar, A ist daher in P nicht meßbar, P also ein Punkt des N-Kernes von A. Der N-Kern von A hat also die Eigenschaft, diese total nicht meßbaren Teilmengen von A als Teilmengen zu enthalten, er ist außerdem nach Satz 12 total nicht meßbar, also ist der N-Kern eine umfassendste total nicht meßbare Teilmenge von A und da $A - A_n^* = A_m^*$ unter den gemachten Voraussetzungen meßbar ist, so ist eine derartige Zerlegung eindeutig. Wenn wir an den meßbaren Teil der Zerlegung ähnliche Forderungen stellen wollen, so können wir nicht verlangen, daß der meßbare Teil eine umfassendste Teilmenge sein soll, weil es im Falle, daß A nicht meßbar ist, wie wir bereits gesehen haben, ohne weitere Forderungen keine gibt. Verlangen wir aber außerdem, daß der meßbare Teil der Durchschnitt einer offenen Punktmenge mit A sein soll, so erhalten wir wieder eine eindeutige Zerlegung. Zu dem Zwecke zeigen wir, daß jede meßbare Teilmenge von A, die gleich dem Durchschnitt einer offenen Menge G mit A ist, Teilmenge des M-Kernes A_m^* von A ist. Besäße nämlich der meßbare Teil der Zerlegung M mit obiger Beschaffenheit einen nicht zu A_m^* gehörigen Punkt P, so gäbe es eine Umgehung U von P, so daß UM meßbar, dagegen AU nicht meßbar wäre. Nun ist aber UM gleich dem Durchschnitt UAG, also P auch Punkt von G, es gibt daher eine Umgebung V von P, die Teil von G ist, so daß $VA = VAG$ ist; es ist dann VUM eine meßbare Punktmenge und da $VUM = UVAG = UVA$ gilt, ist UVA eine meßbare Punktmenge. Es gibt daher eine Umgebung $W = UV$ derart, daß AW meßbar ist, die Punktmenge A ist daher im Punkte P meßbar, P daher ein Punkt des M-Kernes von A. Es kann daher AU für jede beliebige Umgebung U von P nicht nicht meßbar sein. Da nun in unserem Falle der M-Kern meßbar ist, ist eine derartige Zerlegung eindeutig. Fassen wir nun unsere Ergebnisse zusammen, so können wir also folgenden Satz aussprechen:

Satz 13. *Jede beliebige nicht leere Punktmenge läßt sich für jede beliebige Maßfunktion als Summe zweier zueinander fremder Mengen darstellen, wobei der erste Summand mindestens lokal meßbar ist und höchstens dann leer ist, wenn die Punktmenge total nicht meßbar ist.*

Jede beliebige separable Punktmenge läßt sich für jede vollständige Maßfunktion als Summe zweier zueinander fremder Mengen darstellen, wobei ein Summand leer oder total nicht meßbar ist, der andere stets meßbar ist. Ist die Punktmenge nicht meßbar, so läßt sich eine derartige Zerlegung auf unendlich viele verschiedene Weisen durchführen. Ist aber der meßbare Teil der Zerlegung ein umfassendster Durchschnitt einer offenen Punktmenge mit der gegebenen, so ist die Zerlegung eindeutig.

Für eine vollständige Maßfunktion ist die Zerlegung einer separablen nicht meßbaren Punktmenge in eine umfassendste total nicht meßbare Punktmenge und in eine meßbare Punktmenge stets und eindeutig durchführbar.

Wir wenden uns nun den total nicht meßbaren Punktmengen zu. Ihre Existenz ist nach Satz 12 für diejenigen vollständigen Maßfunktionen gesichert, für die es nicht meßbare Punktmengen gibt, die überall lokal separabel sind. Z. B. ist der n-dimensionale Inhalt eine derartige Maßfunktion. Hierher gehörende Fragen werden wir später noch näher behandeln.

Für die folgenden Untersuchungen wollen wir voraussetzen, daß die zugrunde gelegte Maßfunktion vollständig ist. Ist T eine total nicht meßbare Punktmenge, so ist jeder Punkt derselben ein Randpunkt. Denn in jedem inneren Punkt ist jede Menge für jede vollständige Maßfunktion meßbar. Entsprechendes gilt natürlich allgemeiner für den N-Kern einer Punktmenge. Es ergeben sich somit die Sätze:

Satz 14. *Für eine vollständige Maßfunktion ist der N-Kern jeder Punktmenge Teil des Randes der Punktmenge.*

Satz 15. *Jede, für eine beliebige vollständige Maßfunktion total nicht meßbare Punktmenge ist eine insichdichte nicht abzählbare Randmenge. Ihre abgeschlossene Hülle ist perfekt.*

Ferner haben wir den

Satz 16. *Der Rand der Komplementärmenge einer jeden, für eine vollständige Maßfunktion total nicht meßbaren Punktmenge ist total nicht meßbar.*

Der Beweis dieses Satzes liegt auf der Hand.

In diesem Zusammenhang haben wir noch folgenden wichtigen Satz:

Satz 17. *Der Rand einer jeden, für eine vollständige Maßfunktion nicht meßbaren Punktmenge ist für diese Maßfunktion nicht meßbar und umgekehrt.*

Der Rand einer überall lokal meßbaren Punktmenge ist überall lokal meßbar und umgekehrt.

Der Rand einer total nicht meßbaren Punktmenge ist total nicht meßbar.

Ist nämlich die Punktmenge A für die vollständige Maßfunktion $M(X)$ meßbar, so ist der Rand als Durchschnitt der meßbaren Punktmenge A mit der Begrenzung von A, die als abgeschlossene Punktmenge für $M(X)$ meßbar ist, meßbar. Ist umgekehrt der Rand einer Punktmenge für $M(X)$ meßbar, so ist auch der Rand der Komplementärmenge der gegebenen Punktmenge als Differenz einer abgeschlossenen und einer meßbaren Punktmenge meßbar. Die gegebene Punktmenge ist nun gleich der Differenz aus ihrer abgeschlossenen Hülle weniger dem Rand der Komplementärmenge, daher meßbar. Der Beweis des zweiten Teiles des Satzes wird analog durchgeführt. Der dritte Teil folgt aus dem Satz 15. Die Umkehrung gilt hier im allgemeinen natürlich nicht [2]).

Wir wenden uns nun der Frage der Zerlegung der nicht meßbaren Punktmengen in nicht meßbare Teilmengen zu. Nehmen wir das Ergebnis vorweg, so handelt es sich um folgenden Satz:

Satz 18. *Eine beliebige überall lokal separable Punktmenge, die für eine vollständige Maßfunktion nicht lokal meßbar ist, läßt sich in eine vorgeschriebene endliche oder abzählbar unendliche Anzahl zueinander fremder nicht meßbarer Summanden zerlegen. Ist die Menge total nicht meßbar, so können auch die Summanden total nicht meßbar angenommen werden.*

Nach Satz 12 genügt es, den zweiten Teil des Satzes zu beweisen. Ist also A eine beliebige total nicht meßbare Punktmenge, die nach Satz 18 zerlegt werden soll, so wählen wir einen beliebigen Punkt P von A aus und ordnen ihm eine Umgebung U zu. Ist $\overline{U}$ die abgeschlossene Hülle von U und bilden wir den Durchschnitt $A\overline{U} = B$, so ist die Punktmenge B total nicht meßbar. Ist Q ein beliebiger Punkt von $A - B$, so gibt es eine Umgebung V von Q derart, daß VB leer ist, es ist dann $V(A - B) = VA$ nicht meßbar und es ist daher für jede beliebige Umgebung W von Q der Durchschnitt $W(A - B)$ nicht meßbar. Die Punktmenge $A - B$ ist daher total nicht meßbar. Nun wählen wir eine Anzahl, die um 2 kleiner als die Anzahl der vorgeschriebenen Summanden ist, von Punkten aus B aus, die höchstens eine nicht auf die Begrenzung von $\overline{U}$ fallende Häufungsstelle haben. Ist $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n, \ldots$ diese Folge, dann ordnen wir jedem P_k eine Umgebung so zu, daß der Durchschnitt der abgeschlossenen Hüllen irgend zweier dieser Umgebungen leer ist. Ist B_k der Durchschnitt der abgeschlossenen Hülle der Umgebung des Punktes P_k mit A, dann sind diese Punktmengen B_k für jedes

---

[2]) Aus $A = G + R$ (R Rand von A) ergibt sich ein weiterer Beweis des Satzes 17.

in Frage kommende k total nicht meßbar. Die Restmenge, die durch Subtraktion aller B_k von B entsteht, ist auch total nicht meßbar. Denn ist C ein beliebiger Punkt der Restmenge, so hat er entweder von der Summe aller B_k einen positiven Abstand oder er ist Häufungspunkt dieser Summe. Im letzteren Falle muß er mit dem Häufungspunkt der Punkte $P_1, P_2, \ldots$ zusammenfallen. Im ersteren Falle folgt nun genau wie oben, daß die Restmenge in C nicht meßbar ist. Im zweiten Falle ist C, da die Folge der Punkte $P_1, P_2, \ldots$ höchstens einen Häufungspunkt besitzt, auch Häufungsstelle von Punkten der Restmenge, in denen diese nicht meßbar ist; die Restmenge ist daher in C nicht meßbar. Damit sind wir am Ziele.

Ein unendliches System total nicht meßbarer Punktmengen, wie es sich bei der Zerlegung einer total nicht meßbaren Punktmenge ergibt, hat die Eigenschaft, daß die Summe und die Differenz zweier verschiedener Mengen des Systems wieder eine Menge des Systems ist. Auch die Summe einer unendlichen Folge von Mengen des Systems ist eine Menge des Systems. Wir haben daher den

Satz 19. *Es gibt Systeme total nicht meßbarer Punktmengen, die mit der leeren Menge einen σ-Mengenkörper bilden.*

Wir wenden uns nun Fragen der Existenz und Bildung nicht meßbarer Punktmengen zu. Wie bereits erwähnt, hängt die Existenz nicht meßbarer Punktmengen wesentlich von der Maßfunktion und dem zugrunde gelegten Raum ab. Es gibt Räume, so daß für jede beliebige Maßfunktion jede beliebige Punktmenge des betreffenden Raumes meßbar ist. Z. B. ein Raum, bei dem je zwei Punkte eine Entfernung haben, die größer ist als eine positive feste Zahl, hat diese Eigenschaft. Die Eigenschaft einer Punktmenge, meßbar zu sein, kann sich in manchen Fällen durch Abänderung des Definitionsbereiches der Maßfunktion ändern. Nehmen wir z. B. eine für die Maßfunktion $M(X)$ nicht meßbare Punktmenge A, dann erzeugt $M(X)$ eine Maßfunktion $L(X)$ in der als Raum aufgefaßten Punktmenge A. Für $L(X)$ ist A als Gesamtraum meßbar. Die Punktmenge A ist also für die Maßfunktion $L(X)$ meßbar, für die Maßfunktion $M(X)$, die eine Erweiterung von $L(X)$ ist, jedoch nicht meßbar. Wir wollen daher zunächst die Abhängigkeit der Meßbarkeit einer Punktmenge vom Definitionsbereich der Maßfunktion näher untersuchen. Zu diesem Zwecke beweisen wir zunächst den

Satz 20. *Für eine vollständige Maßfunktion $M(X)$ ist die beliebige Teilmenge B der für diese Maßfunktion meßbaren Punktmenge A dann und nur dann meßbar, wenn für jede Punktmenge W von endlichem äußeren Maße, die Teilmenge von A ist, die Gleichung*

$$M(W) = M(BW) + M(W - BW)$$

besteht.

Nach Voraussetzung ist die Punktmenge A für die vollständige Maßfunktion $M(X)$ meßbar, also gilt, wenn Y eine Punktmenge endlichen äußeren Maßes ist, die Beziehung:

$$M(Y) = M(AY) + M(Y - AY). \tag{1}$$

Setzen wir $AY = Y_1$, so ist Y_1 eine Teilmenge von A, also gilt die Beziehung

$$M(Y_1) = M(BY_1) + M(Y_1 - BY_1). \tag{2}$$

Zu beweisen ist die Gleichung:

$$M(Y) = M(BY) + M(Y - BY). \tag{3}$$

Es gelten dann folgende Relationen:

$$Y - YB = (Y - Y_1) + (Y_1 - Y_1B),\ M(Y) \leqq M(YB) + M(Y - YB); \tag{4}$$

aus der ersten dieser Relationen folgt mit Hilfe von (1) und (2)

$$M(Y - YB) \leqq M(Y) - M(Y_1) + M(Y_1) - M(Y_1B) = M(Y) - M(Y_1B),$$

es gilt daher:

$$M(Y) \geqq M(Y - YB) + M(Y_1B),$$

und da $M(Y_1B) = M(YB)$, so haben wir:

$$M(Y) \geqq M(YB) + M(Y - YB). \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt nun die zu beweisende Gleichung (3)[3]).

Aus diesem Satze folgt nun der

Satz 21. *Die Eigenschaft einer Punktmenge für eine vollständige Maßfunktion meßbar bzw. nicht meßbar, bzw. lokal meßbar, bzw. überall lokal meßbar, bzw. total nicht meßbar zu sein, wofür wir kurz sagen wollen, die Meßbarkeitseigenschaften der Punktmenge bleiben bei einer Erweiterung gleichzeitig für alle Punktmengen des ursprünglichen Raumes dann und nur dann erhalten, wenn der ursprüngliche Raum für die Erweiterungsmaßfunktion meßbar ist.*

Der Beweis dieses Satzes mit Hilfe von Satz 20 liegt auf der Hand.

Wir wenden uns nun der Frage nach der Existenz von Punktmengen, die in jedem Punkt des Raumes nicht meßbar sind, zu. Dazu ist offenbar notwendig, daß für die zugrunde gelegte Maßfunktion für jeden Punkt des Raumes mindestens eine Punktmenge vorhanden sei, die in diesem Punkte nicht meßbar ist. Nun wollen wir zeigen, daß dies auch hinreicht, falls die zugrunde gelegte Maßfunktion vollständig ist. Existiert also zu jedem Punkte eine dort nicht meßbare Punktmenge, dann ist jeder Punkt des

[3]) Für reguläre Maßfunktionen läßt sich der Beweis mit Hilfe der für sie geltenden Meßbarkeitsbedingung vereinfachen.

Raumes auch Punkt einer total nicht meßbaren Punktmenge, falls diese Punktmengen überall lokal separabel sind. Es gibt dann zu jedem Punkt eine Umgebung, so daß der Durchschnitt ihrer abgeschlossenen Hülle mit der in diesem Punkte nicht meßbaren Punktmenge total nicht meßbar ist. Dieser Durchschnitt heiße D_1. Irgendein Punkt des Raumes gehört entweder zu D_1 oder nicht zu D_1. Ist der Punkt Häufungspunkt von D_1, so ist D_1 dort nicht meßbar. Bei positivem Abstand konstruieren wir für diesen genau so wie für den ersten Punkt eine total nicht meßbare Punktmenge, für die wir außerdem verlangen, daß ihre abgeschlossene Hülle zur abgeschlossenen Hülle von D_1 fremd ist. Dieses Verfahren setzen wir soweit als möglich fort. Irgendein Punkt des Raumes ist dann entweder Punkt der Vereinigungsmenge all dieser Punktmengen oder Häufungspunkt derselben, in jedem dieser Fälle aber ist diese Vereinigungsmenge V nicht meßbar in dem betreffenden Punkte. V ist daher eine in jedem Punkte des Raumes nicht meßbare Punktmenge. Wir haben also folgenden

Satz 22. *In jedem lokal separablen Raume ist für die Existenz einer für eine vollständige Maßfunktion in jedem Punkte des Raumes nicht meßbaren Punktmenge notwendig und hinreichend, daß es zu jedem Punkte des Raumes eine dort nicht meßbare Punktmenge gibt.*

Die vorhergehenden Überlegungen legen die Frage nahe, ob es für die Existenz einer in jedem Punkte des Raumes nicht meßbaren Punktmenge nicht genügt, daß es überhaupt eine für die betreffende Maßfunktion nicht meßbare Punktmenge gibt. Für irgendeinen Raum genügt dies natürlich nicht, man braucht z. B. nur einen Raum zu betrachten, der die Vereinigungsmenge eines Intervalls und einer zum Intervall fremden endlichen Menge ist. Dieser Raum hat aber eine ungewöhnliche Eigenschaft, er ist, wie wir rein anschauungsmäßig feststellen, inhomogen. Um nun derartige Eigenschaften mathematisch ausdrücken zu können, geben wir einige hierher gehörende Begriffsbildungen. Da die Terminologie nicht völlig einheitlich ist, setzen wir einige bekannte Erklärungen her.

Definition 11. Ist R ein beliebiger metrischer Raum und P ein beliebiger Punkt aus ihm und a eine beliebige reelle positive Zahl, so heißt die Punktmenge, die aus allen und nur den Punkten des Raumes besteht, deren Entfernung vom Punkte P kleiner als a ist, eine einfache Umgebung des Punktes P, a der Radius der einfachen Umgebung.

Definition 12. Eine Abbildung heißt entfernungstreu, wenn die Bildpunkte je zweier verschiedener Punkte die gleiche Entfernung haben wie ihre Urbilder. Sie heißt doppelt entfernungstreu, wenn die Abbildung und ihre Umkehrung entfernungstreu sind.

Es gilt dann der leicht zu beweisende

Satz 23. *Die Umkehrabbildung jeder entfernungstreuen Abbildung ist eindeutig.*

Jede eindeutige entfernungstreue Abbildung ist doppelt entfernungstreu.

Jede doppelt entfernungstreue Abbildung ist eineindeutig.

Definition 13. Zwei Punktmengen, die doppelt entfernungstreu aufeinander abgebildet werden können, heißen kongruent.

Definition 14. Ein Raum heißt homogen, wenn je zwei einfache Umgebungen mit gleichen Radien kongruent sind.

Definition 15. Eine Maßfunktion heißt homogen, wenn sie je zwei kongruenten Punktmengen ihres Definitionsbereiches gleiche Funktionswerte zuordnet.

Die in der Analysis betrachteten Räume sind meist homogen, eine Beschränkung auf homogene Räume bedeutet daher in vielen Fällen keine besondere Einschränkung. Dagegen bedeutet eine Beschränkung auf homogene Maßfunktionen eine wesentliche Einschränkung, die sich im folgenden Satz ausdrückt:

Satz 24. *Zwischen irgendeiner vollständigen homogenen Maßfunktion $M(X)$, deren Definitionsbereich ein n-dimensionaler euklidischer Raum ist und für die es eine offene Menge mit endlichem und von Null verschiedenem äußeren Maße gibt, und dem n-dimensionalen Inhalt $I(X)$ besteht die Gleichung*

$$M(X) = aI(X),$$

worin a eine positive reelle Zahl bedeutet.

Da wir den Satz weiter nicht benutzen, verzichten wir auf den Beweis. Er sollte bloß als Demonstration der obigen Behauptung gelten. Ein ähnlicher Satz gilt zwischen irgend zwei vollständigen homogenen Maßfunktionen in allgemeineren homogenen Räumen.

Der Vollständigkeit halber berichten wir noch folgenden Satz:

Satz 25. *Im homogenen separablen Raum läßt sich jede gewöhnliche homogene Maßfunktion, deren Definitionsbereich eine Folge offener Punktmengen mit genau einpunktigem Durchschnitt enthält, zu einer vollständigen homogenen Maßfunktion erweitern. Ist die ursprüngliche Maßfunktion regulär, so gibt es unter allen möglichen Erweiterungen nur eine einzige vollständige homogene reguläre Erweiterung.*

Ein Beispiel dafür, daß es mehrere Erweiterungen solcher Maßfunktionen gibt, ist folgendes: Der für alle inhaltsmeßbaren Punktmengen definierte äußere Inhalt stellt eine den obigen Forderungen genügende Maßfunktion vor. Diese Maßfunktion läßt sich nun zum äußeren Inhalt im Gesamtraum

erweitern, aber auch das arithmetische Mittel aus äußerem und innerem Inhalt stellt, wie allgemein bekannt ist, eine Maßfunktion vor, die im Gesamtraum definiert ist.

Ein ähnlicher Satz gilt in allgemeineren homogenen Räumen.

Kehren wir nun zur Konstruktion nicht meßbarer Punktmengen zurück! Ist R ein homogener Raum, $M(X)$ eine vollständige homogene Maßfunktion, für die es nicht meßbare Punktmengen gibt, wobei mindestens eine dieser Punktmengen separabel ist, dann wollen wir zeigen, daß es eine in jedem Punkte des Raumes nicht meßbare Punktmenge gibt. Zu diesem Zwecke benötigen wir folgenden Satz:

Satz 26. *In jedem homogenen Raum haben je zwei kongruente Punktmengen für jede homogene vollständige Maßfunktion die gleichen Meßbarkeitseigenschaften.*

Der Beweis ergibt sich unschwer aus der Definition der hier verwendeten Begriffe.

Ist nun R ein homogener Raum und A eine für die homogene vollständige Maßfunktion $M(X)$ im Punkte P nicht meßbare Punktmenge, dann gibt es eine Umgebung U von P, so daß der Durchschnitt $\overline{U}A_n^*$ der abgeschlossenen Hülle $\overline{U}$ von U mit A_n^* nicht meßbar ist. Ist nun A überall lokal separabel, so läßt sich U so wählen, daß dieser Durchschnitt total nicht meßbar ist. Ist dann V eine beliebige Umgebung von P, die Teilmenge von U ist, so ist auch der Durchschnitt der abgeschlossenen Hülle $\overline{V}$ von V mit A_n^* total nicht meßbar. Ist Q ein beliebiger Punkt des Raumes, so ist er entweder Punkt oder Häufungspunkt von UA_n^* oder er hat einen positiven Abstand von dieser Menge. In den beiden ersten Fällen ist $\overline{U}A_n^*$ nicht meßbar in Q, im letzteren Falle gibt es eine einfache Umgebung W von Q, so daß, wenn $\overline{W}$ die abgeschlossene Hülle von W bedeutet, der Durchschnitt $\overline{U}A_n^*\overline{W}$ leer ist und es außerdem eine zu W gleichradige einfache Umgebung W_1 von P gibt, so daß diese Teilmenge von U ist. Bilden wir nun diese letztere Umgebung eindeutig und entfernungstreu auf W ab, was wegen der vorausgesetzten Homogenität des Raumes möglich ist, so wird bei dieser Abbildung die in P nicht meßbare Punktmenge $A_n^*W_1$, wobei W_1 die zu W gleichradige Umgebung von P ist, in eine im Punkte Q nicht meßbare Punktmenge übergeführt (Satz 26). Da Q ein beliebiger Punkt des Raumes war, gibt es unter den gemachten Voraussetzungen eine in jedem Punkte des Raumes nicht meßbare Punktmenge. Verbinden wir dieses Ergebnis mit Satz 23, so erhalten wir den

Satz 27. *In jedem lokal separablen homogenen Raum ist für die Existenz einer für eine vollständige homogene Maßfunktion in jedem Punkt des Raumes nicht meßbaren Punktmenge notwendig und hinreichend, daß es für mindestens einen Punkt des Raumes mindestens eine dort nicht meßbare Punktmenge gibt.*

In jedem separablen homogenen Raum ist für die Existenz einer derartigen Punktmenge notwendig und hinreichend, daß es mindestens eine nicht meßbare Punktmenge gibt.

Wir wenden uns nun den nicht meßbaren Funktionen zu. Wir knüpfen an die Definition der meßbaren Funktionen an. Ist R ein beliebiger metrischer Raum und A eine beliebige Punktmenge aus ihm, dann heißt in bekannter Weise die Punktfunktion $f(P)$, deren Definitionsbereich A ist, meßbar, wenn für jede reelle Zahl a die Punktmengen $A(f > a)$, $A(f < a)$, $A(f \geqq a)$, $A(f \leqq a)$, und die Punktmengen $A(f = +\infty)$, $A(f = -\infty)$ meßbar sind. Dabei ist die Punktmenge $A(f > a)$ die Menge, die aus allen und nur den Punkten der Punktmenge A besteht, in denen $f(P) > a$ ist. Analog sind die anderen Symbole erklärt. Aus dieser Definition ergibt sich unmittelbar, daß eine Punktmenge, auf der es mindestens eine meßbare Funktion gibt, meßbar sein muß. Auf einer nicht meßbaren Punktmenge ist demnach jede beliebige Funktion nicht meßbar. Fassen wir aber den Definitionsbereich A als metrischen Raum auf und beschränken den Definitionsbereich der zugrunde gelegten Maßfunktion auf die Teilmengen von A, so ist, gleichgültig ob A im ursprünglichen Raum für die zugrunde gelegte vollständige Maßfunktion meßbar ist oder nicht, z. B. jede auf A halbstetige Funktion meßbar. Da nun der Definitionsbereich einer Funktion das Primäre ist und im Falle einer Punktfunktion, der den Definitionsbereich enthaltende Raum sekundärer Natur ist, scheint es zweckmäßig zu sein, neben der gewöhnlichen Meßbarkeit noch eine auf den Definitionsbereich bezogene relative Meßbarkeit in Betracht zu ziehen. Zu diesem Zwecke geben wir folgende

Definition 16. Ist R ein beliebiger metrischer Raum und $M(X)$ eine vollständige Maßfunktion in R, A eine beliebige Punktmenge und $L(X)$ die durch $M(X)$ in A erzeugte, in A vollständige Maßfunktion, dann heißt die Punktfunktion $f(P)$ mit dem Definitionsbereich A relativ zu A meßbar, wenn $f(P)$ für $L(X)$ meßbar ist.

Bei der relativen Meßbarkeit wird also im allgemeinen eine andere Maßfunktion zugrunde gelegt, es wird im allgemeinen der Definitionsbereich abgeändert. Für relativ zu A meßbar könnte man auch zweckmäßig minimal meßbar sagen, denn gehen wir umgekehrt vom Definitionsbereich der Funktion aus und erweitern diesen mit der in ihm definierten Maßfunktion zum vorgegebenen Raum und der in ihm definierten Maßfunktion, so ist bei jeder beliebigen Erweiterung dieser Art jede für den Raum meßbare Funktion relativ zum Definitionsbereich meßbar.

Zwischen der relativen und der gewöhnlichen Meßbarkeit einer Funktion besteht die folgende wichtige Beziehung:

Satz 28. *Die auf A definierte relativ zu A meßbare Funktion ist in einem beliebigen A umfassenden Raume für eine vollständige Maßfunktion, die eine Erweiterung der in A definierten ist, dann und nur dann meßbar, wenn A für die erweiterte Maßfunktion meßbar ist.*

Der Beweis ergibt sich aus Satz 20.

Um nun eine feinere Theorie der nicht meßbaren Funktionen zu entwickeln, betrachten wir zunächst zwei Beispiele nicht meßbarer Funktionen.

1. Beispiel. Im linearen abgeschlossenen Intervall $[0, 2]$ ist die Funktion wie folgt definiert: In $[0, 1]$ ist $F(P) = 0$; das Intervall $(1. 2]$ stellen wir als Summe zweier total nicht meßbarer zueinander fremder Punktmengen dar, $(1, 2] = A + B$, in jedem Punkte von A ist $F(P) = 1$, in jedem Punkte von B ist $F(P) = 2$. Diese Funktion ist nicht meßbar, auch relativ nicht meßbar, aber der Definitionsbereich enthält ein Teilintervall, in dem $F(X)$ meßbar ist.

2. Beispiel. Wir zerlegen das lineare Intervall $[-1, 1)$ durch die Punkte $\frac{\pm 1}{n}$, wobei n eine natürliche Zahl bedeutet, in links geschlossene Intervalle. Bezeichnen wir das den Endpunkt $\frac{1}{n}$ enthaltende Intervall mit I_n, das den Endpunkt $\frac{-1}{n}$ enthaltende Intervall mit I'_n und zerlegen I_n bzw. I'_n in zueinander fremde total nicht meßbare Mengen A_n, B_n bzw. A'_n, B'_n, also $A_n + B_n = I_n$, $A'_n + B'_n = I'_n$, dann erklären wir die Funktion $f(P)$ folgendermaßen: $f(0) = 0$, $f(P) = 0$, wenn P ein Punkt der Vereinigungsmenge aller $A_n + A'_n$ ist, $f(P) = \frac{1}{n^2}$, wenn P ein Punkt von $B_n + B'_n$ ist. Der einzige Stetigkeitspunkt dieser Funktion ist der Punkt 0; dies ergibt sich daraus, daß nach Satz 15 eine total nicht meßbare Punktmenge eine Randmenge ist. Die Funktion ist aber auch differenzierbar im Punkte 0, wie man leicht nachrechnet. Diese Funktion ist nicht meßbar, auch gibt es kein Teilintervall, in dem die Funktion meßbar oder relativ meßbar wäre.

Das erste Beispiel zeigt, daß es nicht meßbare Funktionen gibt, die in einem Teilintervall des Definitionsbereiches konstant sind. Das zweite Beispiel zeigt, daß es Funktionen mit Stetigkeitspunkten, ja sogar mit Punkten, in denen die Funktion differenzierbar ist, gibt und die in keinem Teilintervall relativ zum Definitionsbereich meßbar sind. Mit dem bisher üblichen Begriff der Meßbarkeit einer Funktion läßt sich nur aussagen, daß beide nicht meßbar sind. Um also auch eine Unterscheidung in solchen Fällen durchzuführen, schaffen wir den Begriff der lokalen Meßbarkeit einer Funktion. Wir geben folgende

Definition 17. Ist R ein beliebiger metrischer Raum, A eine beliebige Punktmenge aus ihm, $M(X)$ eine Maßfunktion mit dem Definitionsbereich R,

dann heißt die Punktfunktion $f(P)$ mit dem Definitionsbereich A im Punkte Q des Raumes (Q braucht nicht Punkt von A zu sein) für $M(X)$ meßbar, wenn es eine Umgebung U von Q gibt, so daß die auf dem Durchschnitt UA durch f erzeugte Funktion (die Teilfunktion f/UA) für $M(X)$ meßbar ist. Sie heißt relativ zu A meßbar im Punkte Q, wenn die obige Bedingung für die auf A reduzierte Maßfunktion erfüllt ist.

Eine in einem Punkte des Raumes relativ zum Definitionsbereich meßbare Funktion braucht natürlich dort nicht meßbar zu sein, ist dagegen die Funktion in einem Punkte auf den Definitionsbereich bezogen nicht meßbar, dann ist sie nach Satz 20 für jede beliebige zulässige Erweiterung in diesem Punkte nicht meßbar. Sie ist dann absolut nicht meßbar in diesem Punkte. Aus den Sätzen 20 und 28 ergibt sich dann der

Satz 29. *Eine beliebige im Punkte P relativ meßbare Funktion ist dann und nur dann in P meßbar, wenn der Definitionsbereich in P meßbar ist.*

Eine beliebige Funktion ist natürlich in einem nicht meßbaren Punkt des Definitionsbereiches nicht meßbar, da aber der Definitionsbereich für die auf den Definitionsbereich reduzierte Maßfunktion meßbar in dem betreffenden Punkt ist, so gibt es dort relativ meßbare Funktionen. Auf die hier auftretenden Möglichkeiten gehen wir später noch näher ein. Anschließend geben wir noch folgende auf der Hand liegende Erklärung:

Definition 18. Eine in jedem Punkte des Raumes meßbare Funktion heißt überall lokal meßbar. Eine in jedem Punkte des Definitionsbereiches meßbare Funktion heißt lokal meßbar.

Analog wird die relative lokale Meßbarkeit erklärt. Ferner gilt der aus dem Satz 5 folgende und ihm entsprechende Satz:

Satz 30. *Jede lokal, bzw. relativ lokal meßbare Funktion, deren Definitionsbereich überall lokal separabel ist, ist überall lokal, bzw. relativ überall lokal meßbar; ist ihr Definitionsbereich separabel, so ist die Funktion meßbar, bzw. relativ meßbar.*

Ferner gilt der aus dem Satz 21 folgende, die Sätze 28 und 29 ergänzende

Satz 31. *Die Meßbarkeitseigenschaften einer Funktion bleiben bei einer Erweiterung gleichzeitig für alle Funktionen des Definitionsbereiches dann und nur dann erhalten, wenn der Definitionsbereich im neuen Bereich meßbar ist.*

Wir können jetzt die Funktionen der beiden Beispiele dadurch charakterisieren, daß wir feststellen, daß die erste Funktion nicht in jedem Punkte des Definitionsbereiches nicht meßbar ist, während die zweite in jedem Punkte des Definitionsbereiches nicht meßbar ist, also ein Beispiel einer total nicht meßbaren Funktion ist. Dabei haben wir den Begriff total nicht meßbar ganz ähnlich wie für Punktmengen zu erklären.

Definition 19. Eine Punktfunktion heißt total nicht meßbar, wenn sie in jedem Punkte ihres Definitionsbereiches nicht meßbar ist. Sie heißt absolut total nicht meßbar, wenn sie für jeden den Definitionsbereich umfassenden Bereich (das ist ein den gegebenen Definitionsbereich umfassender Raum mit einer vollständigen Maßfunktion, die mit der ursprünglichen Maßfunktion identisch ist oder eine Erweiterung derselben ist) total nicht meßbar ist.

Daraus ergibt sich der Satz:

Satz 32. *Jede auf einer beliebigen total nicht meßbaren Punktmenge definierte Punktfunktion ist total nicht meßbar.*

Satz 33. *Eine Funktion ist dann und nur dann absolut total nicht meßbar, wenn sie relativ zum Definitionsbereich total nicht meßbar ist.*

Die Funktion des zweiten Beispiels ist offenbar eine absolut total nicht meßbare Funktion.

Ist eine Funktion in einem Punkte meßbar, so ergibt sich aus der Definition dieser Meßbarkeit und dem Satz 3, daß dann die Funktion in jedem Punkte einer Umgebung meßbar ist. Die Menge aller Punkte des Raumes, in denen eine Funktion meßbar ist, ist daher offen. Ist P ein Punkt, in welchem die Funktion nicht meßbar ist, so gibt es für jede Umgebung U von P eine reelle Zahl a, so daß mindestens eine der Punktmengen $UA(f > a)$, $UA(f < a)$, $UA(f \geqq a)$, $UA(f \leqq a)$ ... nicht meßbar ist, dabei bedeutet A den Definitionsbereich der Funktion. Ist nun A überall lokal separabel, so besitzt die obige nicht meßbare Darstellungsmenge einen nicht leeren total nicht meßbaren Kern (Satz 12) bei geeigneter Wahl der Umgebung U. In jedem Punkt dieses Kernes ist aber die Funktion nicht meßbar. Der Punkt P ist daher Häufungspunkt von Punkten, in denen die Funktion nicht meßbar ist. Noch einfacher hierfür ist folgender Beweis: Ist A in P separabel und gibt es eine Umgebung des Punktes P, so daß die Funktion in jedem Punkte dieser Umgebung meßbar ist, so ist sie nach Satz 5 auch in P meßbar. Wir erhalten also den

Satz 34. *Die Menge aller Punkte des Raumes, in denen die beliebige Funktion $f(P)$ meßbar ist, ist offen. Die Menge aller Punkte des Raumes, in denen $f(P)$ nicht meßbar ist, ist abgeschlossen; ist der Definitionsbereich von $f(P)$ überall lokal separabel, so ist sie perfekt.*

Wir können jetzt, ähnlich wie für die meßbaren Funktionen, eine Theorie der Systeme von in einem und demselben Punkte meßbarer Funktionen entwickeln. Es gilt folgender Satz:

Satz 35. *Die Summe endlich vieler und das Produkt endlich vieler im gleichen Punkte meßbarer Funktionen sind in diesem Punkte meßbar. Die Differenz und der Quotient zweier in demselben Punkte meßbarer Funktionen*

sind in diesem Punkte meßbar. Dabei wird vorausgesetzt, daß die verlangten Operationen ausführbar sind.

Die Sätze für Folgen von meßbaren Funktionen lassen sich nicht ohne Einschränkung übertragen. Um ein Beispiel hierfür zu geben, gehen wir von der Funktion des zweiten Beispiels aus. Nennen wir diese $f(P)$, so wollen wir $f_n(P) = f(P)$ setzen, wenn P ein Punkt der dort definierten Intervalle I_n ist. In jedem anderen Punkte sei $f_n(P) = 0$. Jede dieser Funktionen ist im Punkte 0 meßbar, ihre obere Grenze ist jedoch nicht meßbar im Punkte 0. Es gibt eben in diesem Falle keine Umgebung des Punktes 0, in der gleichzeitig alle Funktionen der Folge meßbar sind. Gibt es dagegen eine derartige Umgebung, so gelten dieselben Sätze wie für meßbare Funktionen. Wir geben noch folgende

Definition 20. Irgendeine Menge von Punktfunktionen mit dem gemeinsamen Definitionsbereich A heißt im Punkte P gleichmäßig meßbar, wenn es eine Umgebung U von P gibt, so daß jede Funktion der Menge in UA meßbar ist.

Es gilt dann offenbar der Satz

Satz 36. *Die obere und die untere Grenze endlich vieler in demselben Punkte meßbarer Funktionen sind in diesem Punkte meßbar. Die obere und die untere Grenze der Limes superior und der Limes inferior einer unendlichen Folge von im Punkte P gleichmäßig meßbarer Funktionen sind in P meßbar.*

Auch den Begriff der äquivalenten Funktionen können wir in den Kreis der Betrachtungen ziehen. Es gilt offenbar der Satz:

Satz 37. *Äquivalente Funktionen haben die gleichen Meßbarkeitseigenschaften.*

Wir wenden uns nun der feineren Theorie der in einem Punkte nicht meßbaren Funktionen zu. Ist der Definitionsbereich in dem ins Auge gefaßten Punkt nicht meßbar, so ist dort, wie bereits festgestellt, jede Funktion nicht meßbar. Das Unregelmäßige liegt hier schon im Definitionsbereich. Derartige Punkte gibt es bei der relativen Meßbarkeit natürlich nicht. Ist zweitens der Definitionsbereich im Punkte P meßbar, $f(P)$ dagegen nicht, so gibt es entweder eine reelle Zahl a derart, daß für jede Umgebung, die Teilmenge einer festen Umgebung von P ist, eine der Darstellungsmengen der Funktion, bezogen auf den Durchschnitt dieser Umgebung mit dem Definitionsbereich, nicht meßbar ist. Die Funktion wollen wir in diesem Falle von dritter Art nennen im Punkte P. Den Punkt P nennen wir dann einen Punkt dritter Art für die Funktion. Oder es gibt keine derartige reelle Zahl, dann nennen wir den Punkt einen Punkt zweiter Art für die Funktion. Einen Punkt, in dem die Funktion meßbar ist, nennen wir dann in diesem Zusammenhang

einen Punkt erster Art für die Funktion. Man überzeugt sich an Beispielen, daß derartige Punkte jeder Art existieren. Die Punkte erster Art bilden eine offene Punktmenge, die Punkte vierter Art bilden bei überall lokal separablem Definitionsbereich eine perfekte Punktmenge. Wir haben also den Satz:

Satz 38. *Für jede beliebige Punktfunktion bilden alle Punkte erster Art eine offene Punktmenge, die Vereinigungsmenge der Punkte zweiter, dritter und vierter Art ist abgeschlossen.*

Ist der Definitionsbereich überall lokal separabel, so bildet die Menge aller Punkte vierter Art eine perfekte Punktmenge.

Ist der Definitionsbereich meßbar, so gibt es keine Punkte vierter Art.

(Eingegangen am 24. Oktober 1942.)

Über eine Erweiterung des Äquivalenzsatzes der C- und H-Verfahren und eine Klasse regulär wachsender Funktionen.

Herrn Constantin Carathéodory zum 70. Geburtstag gewidmet.

Von

Konrad Knopp in Tübingen.

Einleitung.

In einer vorangehenden Arbeit[1]), in der ein Beweis des Äquivalenzsatzes der Cesàroschen und Hölderschen Limitierungsverfahren einheitlich für Folgen und Funktionen dargestellt wurde, war einleitend schon die weitgehende Verallgemeinerung dieses Satzes erwähnt, die I. Schur [3][2]) für Zahlenfolgen und ganzzahlige Ordnung bewiesen hatte und die im wesentlichen besagt, daß nicht nur die Konvergenz der C- und H-Mittel gleicher Ordnung k, sondern auch ihr asymptotisches Verhalten sehr eng gekoppelt ist. Sein Beweis setzt die Ordnung k wesentlich als ganzzahlig voraus und ist nicht auf beliebige reelle k übertragbar. Auch auf Funktionen (statt Folgen) läßt sich der dort gegebene Beweis ohne wesentliche Einschränkung anderer Art nicht übertragen[3]).

Im folgenden soll nun zunächst (Teil II) gezeigt werden, daß unter Benutzung eines Beweisgedankens, den I. Schur für Zahlenfolgen schon in seiner Arbeit [4] zur Vereinfachung seines ursprünglichen Beweises benutzt hat, sich eine entsprechende Verallgemeinerung des Äquivalenzsatzes bei ganzzahligem k auch für Funktionen gewinnen läßt. Bei Weiterbenutzung der in Äq. I eingeführten Bezeichnungen und vorbehaltlich einer genauen Charakterisierung der Vergleichsfunktionen $p(x)$ lautet dieser erweiterte Äquivalenzsatz:

---

[1]) Über eine Klasse konvergenzerhaltender Integraltransformationen und den Äquivalenzsatz der C- und H-Verfahren. Math. Zeitschr. 47 (1941), S. 229–264. Diese Arbeit wird im folgenden mit „Äq. I" zitiert.

[2]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Schriftenverzeichnis am Ende von Äq. I.

[3]) Vgl. hierzu Äq. I, Fußnote 4.

Für eine zugelassene[4]) *Funktion* $s(t)$, *für ein bestimmtes* k *und eine bestimmte Vergleichsfunktion* $p(x)$ *streben bei* $x \to +\infty$[5]) *die Quotienten*

$$\frac{C_k(x; s(t))}{p(x)} \quad \text{und} \quad \frac{H_k(x; s(t))}{p(x)}$$

entweder beide gegen einen (endlichen) Grenzwert oder beide nicht. Im ersten Falle hängen die Grenzwerte selbst in einfacher Weise zusammen (s. u. (6. 3)*). Überdies lassen sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen angeben, denen die Vergleichsfunktion* $p(x)$ *(innerhalb einer allgemeinen Funktionenklasse) genügen muß, damit der ausgesprochene Satz für jedes zugelassene* $s(t)$ *und jedes ganzzahlige* $k > 0$ *gültig ist.*

Die Ausdehnung dieses zunächst nur für ganzzahlige $k > 0$ bewiesenen Satzes auf nicht ganzzahlige $k > 0$[6]) ist wesentlich schwieriger und erfordert ganz andere Methoden. Sie sind in der Hauptsache von G. H. Hardy und M. Riesz beim Beweise des second theorem of consistency (für den Fall der Konvergenz der betrachteten Mittel) entwickelt worden[7]) und dienten schon M. Jacob [1] zum Beweise des gewöhnlichen Äquivalenzsatzes für Funktionen bei nicht-ganzer Ordnung $k > 0$. Mit ihnen gelingt es, den erweiterten Äquivalenzsatz für beliebige $k > 0$ zu beweisen (Teil IV), wodurch zugleich ein zweiter Beweis für den Fall ganzer k erhalten wird, für den sich in **29.** als Anwendung eines Hilfssatzes noch ein dritter und besonders durchsichtiger Beweis ergibt. Für $p(x) \equiv 1$ geht der Satz in den gewöhnlichen Äquivalenzsatz über.

Im I. Teil werden die für $x \geqq 0$ erklärten, komplexwertigen Funktionen $p(x)$ eingeführt, die als Vergleichsfunktionen für das asymptotische Verhalten unserer Mittel allein in Betracht kommen, und ihre für die Beweise des II. Teils (k ganzzahlig) erforderlichen Eigenschaften entwickelt. Es wird sich zeigen, daß eine stetige Funktion $p(x)$ dann und nur dann hierfür in Betracht kommt, wenn sie die beiden Eigenschaften

$$\text{(0. 1)} \qquad \frac{1}{x\,|p(x)|}\int_0^x |p(t)|\,dt \leqq M \quad \text{für alle } x > 0,$$

(M von x unabhängig),

---

[4]) D. h. eine (komplexwertige) Funktion $s(t)$ aus $\mathfrak{S}$ (s. Äq. I, S. 238). Die Funktionen aus $\mathfrak{S}$ sind für $t > 0$ erklärt, für jedes $t_0 > 0$ in $0 < t \leqq t_0$ beschränkt und über $(0, t_0)$ im Lebesgueschen Sinne integrierbar.

[5]) Die im folgenden vorkommenden Grenzprozesse beziehen sich, wenn nichts anderes ausdrücklich gesagt ist, stets auf x (bzw. t) $\to +\infty$.

[6]) Komplexe k werden im folgenden nicht in Betracht gezogen.

[7]) G. H. Hardy u. M. Riesz, The general theory of Dirichlet's series. Cambridge Tracts Nr. 18, Cambridge 1915, S. 30—33. — G. H. Hardy, The second theorem of consistency for summable series. Proc. London. math. Soc. (2) **15** (1915), S. 72—88.

und

$$\frac{1}{x\,p(x)}\int_0^x p(t)\,dt \to a \qquad \text{für } x \to +\infty \tag{0.2}$$

besitzt. Auf Funktionen, die diese beiden Bedingungen erfüllen, ist man unter spezielleren Annahmen und teilweise in anderen Zusammenhängen schon mehrfach gestoßen: Rob. Schmidt[8]), der nur positive, monoton wachsende Zahlenfolgen in Betracht zog, nannte sie Vergleichsfolgen, I. Schur [3], [4], der komplexe Zahlenfolgen benutzte, nannte sie Mittelfolgen, in engem Anschluß an ihn nannte N. Obreschkoff [1] sie Mittelfunktionen, J. Karamata[9]), der positive Funktionen von x behandelte und sehr weitgehende Ergebnisse erzielte, regulär wachsende Funktionen. Im Anschluß an diesen letzten soll eine Funktion $p(x)$, die die Bedingungen (0. 1) und (0. 2) erfüllt (vgl. hierzu noch **1.**), regulär wachsend und a ihr Index heißen. Dabei ist „wachsend" im weiteren Sinne zu verstehen, denn unsere Funktionen brauchen, auch wenn sie reell sind, nicht monoton zu sein, und auch abnehmende Funktionen, wie $x^{-\alpha}$, $(0 < \alpha < 1,\ x \geqq 1)$, sollen zu den regulär wachsenden gerechnet werden.

Für die Beweise des IV. Teils ist eine erheblich genauere Kenntnis dieser Funktionen erforderlich, als sie der sich an I. Schur anlehnende Teil I vermittelt. Sie wird im III. Teil gegeben, der sich mehr an die genannten Arbeiten von J. Karamata anschließt. Bei diesem werden aber, wie betont, nur positive Funktionen behandelt. Dadurch wird (0. 1) eine Folge von (0. 2), was an vielen Stellen eine Vereinfachung bedeutet. Andererseits setzt er seine Funktionen nur als integrierbar voraus, während wir uns mit Rücksicht auf den vorliegenden Anwendungszweck mit der Betrachtung stetiger Funktionen begnügen, was die Beweise erleichtert.

In einem kurzen Teil V wird schließlich noch gezeigt, daß auch die Abel-Laplaceschen Mittelbildungen [s. Äq. I, (3. 19) und § 7] in ähnlicher Weise an die Hölderschen und Cesaroschen gekoppelt sind.

I. Regulär wachsende Funktionen.

1. Da die Funktionen $p(x)$ nur zum asymptotischen Vergleich mit anderen (meist stetigen) Funktionen für $x \to +\infty$ verwendet werden, dürfen wir sie für alle hinreichend großen x als stetig und von 0 verschieden voraussetzen. Und da es auf ihre Werte in einem beschränkten Intervall nicht ankommt, so wollen wir sogleich annehmen, daß sie für alle $x \geqq 0$ stetig und

[8]) Robert Schmidt, Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen. Math. Zeitschr. **22** (1925), S. 89—152.

[9]) J. Karamata, Sur un mode de croissance régulière des fonctions. Mathematica **4** (1930), S. 38—53. — Sur un mode de croissance régulière. Bull. Soc. math. France **61** (1933), S. 55—62.

von 0 verschieden sind. *Die Klasse dieser (komplexwertigen) Funktionen werde mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet.*

Eine für alle hinreichend großen x, etwa für $x \geqq \gamma$, stetige und von 0 verschiedene Funktion kann man sich in $0 \leqq x \leqq \gamma$ stets so abgeändert denken, daß sie zu $\mathfrak{P}$ gehört. Es genügt z. B., sie dort $\equiv p(\gamma)$ zu setzen.

Erklärung 1. *Eine Funktion $p(x)$ aus $\mathfrak{P}$, die die Bedingungen (0. 1) und (0. 2) erfüllt, soll regulär wachsend und a ihr Index heißen*[10]).

Der Betrag einer Funktion $p(x)$ aus $\mathfrak{P}$ liegt in jedem beschränkten Intervall zwischen zwei festen positiven Schranken. *Eine Beziehung der Form (0. 1) ist daher in einem solchen Intervall von selbst erfüllt.* Wesentlich ist allein, daß diese Bedingung für alle großen x erfüllt ist.

Beispiele.

(1. 1) $p(x) = x^c$, $x \geqq 1$, $\Re(c) > -1$. Es ist $a = \frac{1}{b} = \frac{1}{c+1}$.

(1. 2) $p(x) = e^{cx}$, $x \geqq 0$, $\Re(c) \geqq 0$, $c \neq 0$. Es ist $a = 0$.

(1. 3) $p(x) = (\log x)^c = e^{c \log\log x}$, $x \geqq 3$, c beliebig. Es ist $a = 1$.

Im folgenden werden die Grundeigenschaften dieser Funktionen festgestellt. Dabei bedeutet $p(x)$ stets eine regulär wachsende Funktion mit dem Index a.

2. *Es gilt*

$$\int_0^x |p(t)|\,dt \to \infty \tag{2. 1}$$

und

$$x\,|p(x)| \to +\infty \text{ [5])}. \tag{2. 2}$$

Nach (0. 1) ist nämlich für $x \geqq \gamma > 0$

$$x\,|p(x)| \geqq \frac{1}{M}\int_0^{\gamma} |p(t)|\,dt = C > 0, \quad \text{also} \quad |p(x)| \geqq \frac{C}{x}.$$

Hieraus folgt (2. 1). Aus

$$x\,|p(x)| \geqq \frac{1}{M}\int_0^{x} |p(t)|\,dt$$

folgt nunmehr auch (2. 2).

3. *Strebt eine zugelassene Funktion* [4]) $\varepsilon(x) \to 0$ *und erfüllt ein $p(x)$ aus $\mathfrak{P}$ allein die Bedingung (0. 1), so strebt auch*

$$\eta(x) = \frac{1}{x\,p(x)}\int_0^{x} p(t)\,\varepsilon(t)\,dt \to 0. \tag{3. 1}$$

[10]) Der im Falle $a \neq 0$ oft auftretende reziproke Wert $\frac{1}{a}$ möge der *reziproke Index* genannt und mit b bezeichnet werden.

Beweis (vgl. Äq. I, § 3, Satz V). Ist $|\varepsilon(t)| < \varepsilon$ für $t > x_0$, so ist für $x > x_0$

$$|\eta(x)| \leqq \frac{1}{x|p(x)|}\int_0^{x_0} |p(t)\,\varepsilon(t)|\,dt + \frac{\varepsilon}{x|p(x)|}\int_0^{x} |p(t)|\,dt$$

$$\leqq \frac{K}{x|p(x)|} + \varepsilon M\ ^{11}),$$

woraus nach (2. 2) die Behauptung folgt.

4. *Die mit einer Funktion $p(x)$ aus $\mathfrak{P}$ angesetzte Integraltransformation*

$$\frac{1}{x\,p(x)}\int_0^{x} p(t)\,s(t)\,dt \tag{4. 1}$$

einer Funktion $s(t)$ aus $\mathfrak{S}$ ist dann und nur dann konvergenzerhaltend, wenn $p(x)$ regulär wächst. Ist dies der Fall, so ist (4. 1) *multiplikativ [s. Äq. I, S. 241] mit dem Faktor a.*

Beweis. Daß die Bedingungen hinreichend sind, ist bekannt: Strebt $s(t) = s + \varepsilon(t) \to s$, also $\varepsilon(t) \to 0$, so strebt (4. 1), d. h.

$$s\,\frac{1}{x\,p(x)}\int_0^{x} p(t)\,dt + \frac{1}{x\,p(x)}\int_0^{x} p(t)\,\varepsilon(t)\,dt \to a\,s,$$

da der zweite Summand nach (0. 1) und **3.** gegen 0, der erste nach (0. 2) gegen $a\,s$ strebt. Daß (0. 1) notwendig ist, wurde in Übertragung der bekannten Toeplitzschen Bedingung bei Matrixtransformationen schon von L. L. Silverman und von T. Kojima [12]) bewiesen; und daß (0. 2) notwendig ist, ist trivial [es genügt, die Funktion $s(t) \equiv 1$ zu betrachten].

5. *Der Index a einer regulär wachsenden Funktion $p(x)$ hat stets einen nicht negativen Realteil: $\Re(a) \geqq 0$. Ist $\Re(\lambda) > 0$ und ist für $x \geqq \gamma \geqq 1$ die zu $\mathfrak{P}$ gehörige Funktion $p_1(x)$ gleich $x^{\lambda}\,p(x)$, so ist auch sie regulär wachsend und hat den Index*

$$a_1 = \frac{a}{1+\lambda a}. \tag{5. 1}$$

---

[11]) Mit K wird hier und im folgenden eine von den jeweils veränderlichen Größen unabhängige Konstante bezeichnet. Sie darf bei jedem Auftreten einen anderen Wert haben.

[12]) L. L. Silverman, On the notion of summability for the limit of a function of a continuous variable. Trans. Amer. math. Soc. **17** (1916), S. 284–294. – T. Kojima, Theorems on convergent integrals. Tôhoku math. Journ. **14** (1918), S. 64–79. – Eine eingehende Behandlung der hierher gehörigen Fragen gab H. Raff, Lineare Transformationen beschränkter integrierbarer Funktionen. Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 605–629.

Beweis. Für $x \geqq \gamma$ ist

$$\frac{1}{x|p_1(x)|}\int_0^x |p_1(t)|\,dt \leqq \frac{1}{|x^\lambda|\cdot x|p(x)|}\left\{\int_0^\gamma |p_1(t)|\,dt + |x^\lambda|\int_\gamma^x |p(t)|\,dt\right\}$$

$$\leqq M + \frac{1}{x|p(x)|}\int_0^\gamma |p_1(t)|\,dt.$$

Wegen (2. 2) und der Vorbemerkung in **1.** gibt es also eine Konstante M_1, so daß für alle $x > 0$

$$\frac{1}{x|p_1(x)|}\int_0^x |p_1(t)|\,dt \leqq M_1 \tag{5. 2}$$

ist. Die Bedingung (0. 1) ist erfüllt. Um (0. 2) zu prüfen, setzen wir

$$\int_0^x p(t)\,dt = P(x) = x\,p\,(x)\{a + \varepsilon(x)\}.$$

Dann gehört $\varepsilon(x)$ zu $\mathfrak{S}$, strebt $\to 0$ für $x \to \infty$, und es ist

$$\int_\gamma^x p_1(t)\,dt = \int_\gamma^x t^\lambda p(t)\,dt = x^\lambda P(x) - \gamma^\lambda P(\gamma) - \lambda\int_\gamma^x t^{\lambda-1} P(t)\,dt,$$

wegen (2. 2) also

$$\frac{1}{xp_1(x)}\int_\gamma^x p_1(t)\,dt = a - \frac{\lambda}{x^{\lambda+1}p(x)}\int_\gamma^x t^\lambda\, p(t)\,\{a + \varepsilon\,(t)\}\,dt + o(1)$$

oder

$$\frac{1+\lambda a}{xp_1(x)}\int_\gamma^x p_1(t)\,dt = a - \frac{\lambda}{xp_1(x)}\int_\gamma^x p_1(t)\,\varepsilon(t)\,dt + o(1).$$

Wegen $\varepsilon(t) \to 0$ strebt nach (2. 2), (5. 2) und **3.** das mittlere Glied $\to 0$, und folglich

$$\frac{1+\lambda a}{xp_1(x)}\int_0^x p_1(t)\,dt \to a. \tag{5. 3}$$

Hiernach ist $1 + \lambda a \neq 0$. Denn andernfalls wäre auch $a = 0$, was zugleich mit $1 + \lambda a = 0$ nicht sein kann. Die Ungleichung $a \neq -\frac{1}{\lambda}$ bedeutet aber, da $-\frac{1}{\lambda}$ eine beliebige Zahl mit negativem Realteil sein kann, daß notwendig $\Re(a) \geqq 0$ sein muß. Aus (5. 3) folgt nun

$$\frac{1}{xp_1(x)}\int_0^x p_1(t)\,dt \to \frac{a}{1+\lambda a},$$

was die übrigen Behauptungen beweist.

Bemerkung. Wenn $p_1(x) = x^l\, p(x)$ für alle $x \geqq 0$ gesetzt wird, so erfüllt $p_1(x)$ ebenfalls die Bedingungen (0. 1) und (0. 2). Denn es ist in $0 < x \leqq \gamma$, wenn dort $m_1 \leqq |p(x)| \leqq m_2$ ist,

$$\frac{1}{x\,|p_1(x)|}\int_0^x |p_1(t)|\,dt \leqq \frac{m_2}{m_1}.$$

Wir werden eine solche Funktion darum gelegentlich auch als regulär wachsend bezeichnen, obwohl $p_1(0) = 0$ ist.

II. Der erweiterte Äquivalenzsatz für ganzzahlige $k > 0$.

6. Wir setzen für ein bestimmtes zugelassenes $s(t)$ zur Abkürzung

$$C_k(x; s(t)) = c_k(x), \quad H_k(x; s(t)) = h_k(x).$$

Dann lautet der in der Einleitung angedeutete Satz genauer:

Erweiterter Äquivalenzsatz. *Existiert für eine bestimmte regulär wachsende Funktion $p(x)$ und ein bestimmtes ganzzahliges $k > 0$ der Grenzwert*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{c_k(x)}{p(x)} = g_k, \tag{6. 1}$$

so existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h_k(x)}{p(x)} = g_k', \tag{6. 2}$$

und umgekehrt. Ist a der Index von $p(x)$, so ist dabei

$$g_k' = \frac{(1+a)}{2}\frac{(1+2a)}{3}\cdots\frac{(1+\overline{k-1}\,a)}{k}\, g_k \text{ [13]}. \tag{6. 3}$$

Ist $p(x)$ eine beliebige Funktion der Klasse $\mathfrak{P}$, so folgt aus der Existenz des einen der Grenzwerte (6. 1) *und* (6. 2) *dann und nur dann die des anderen für jede zugelassene Funktion $s(t)$ und jedes ganzzahlige $k > 0$, wenn $p(x)$ regulär wächst.*

7. Wir zeigen zunächst: *Aus* (6. 1) *folgt* (6. 2). Da der Satz für $k = 1$ trivial ist, darf weiterhin $k \geqq 2$ angenommen werden. Nach Äq. I, (4. 3) ist nun für ganzes $r \geqq 2$

$$MC_{r-1} = \left(\frac{1}{r}E + \frac{r-1}{r}M\right)C_r = T_r C_r,$$

wenn

$$\frac{1}{r}E + \frac{r-1}{r}M = T_r$$

[13]) Nach 5. ist der vor g_k stehende Faktor sicher von 0 verschieden.

gesetzt wird. Die Transformation (4. 1) bezeichnen wir mit M^*, ebenso ihre Vermittlungsfunktion $\frac{p(t)}{x\,p(x)}$, $(0 < t \leqq x)$. Entsprechend setzen wir

$$\frac{1}{r}E + \frac{r-1}{r}M^* = T_r^*.$$

Nach 4. ist M^* wie M eine Integraltransformation der in Äq. I, § 3 beschriebenen Klasse $\mathfrak{B}$, während T_r und T_r^* nicht zu $\mathfrak{B}$ gehören; sie haben aber die dort S. 245 behandelte Form $\alpha E + \alpha' A$ mit A aus $\mathfrak{B}$. Es darf daher mit ihnen nach den dort entwickelten Regeln gerechnet werden (deren Gültigkeit man hier auch ganz unmittelbar einsieht).

Mit P bezeichnen wir endlich noch die Operation, die $s(t)$ in

$$P(x; s(t)) = p(x)\,s(x)$$

überführt. Zu ihr ist die Operation P^{-1}, die $s(t)$ in

$$P^{-1}(x; s(t)) = \frac{s(x)}{p(x)}$$

überführt, invers. Beide sind keine Integraltransformationen. Doch kann nun

$$M^* = P^{-1} M P, \quad T_r^* = P^{-1} T_r P$$

geschrieben werden, und dies zeigt, daß, wie M und T_r, auch M^* und T_r^* miteinander vertauschbar sind.

Damit ist nun

$$M^*\left(x; \frac{c_{r-1}(t)}{p(t)}\right) = \frac{1}{p(x)} M C_{r-1} = \frac{1}{p(x)} T_r C_r = T_r^*\left(x; \frac{c_r(t)}{p(t)}\right),$$

wenn an den beiden mittleren Stellen $s(t)$ den angegebenen Transformationen unterworfen wird. Abgekürzt schreiben wir dafür

$$M^*\left(\frac{c_{r-1}}{p}\right) = T_r^*\left(\frac{c_r}{p}\right).$$

Für $r = 2$ liefert dies, da $c_1(x) \equiv h_1(x)$ und $\frac{h_2(x)}{p(x)} = M^*\left(\frac{h_1}{p}\right)$ ist,

$$\frac{h_2(x)}{p(x)} = M^*\left(\frac{h_1}{p}\right) = M^*\left(\frac{c_1}{p}\right) = T_2^*\left(\frac{c_2}{p}\right),$$

sodann für $r = 3$

$$\frac{h_3(x)}{p(x)} = M^*\left(\frac{h_2}{p}\right) = M^* T_2^*\left(\frac{c_2}{p}\right) = T_2^* M^*\left(\frac{c_2}{p}\right) = T_2^* T_3^*\left(\frac{c_3}{p}\right).$$

So fortschließend ergibt sich schließlich

$$\frac{h_k(x)}{p(x)} = T_2^* T_3^* \ldots T_k^*\left(x; \frac{c_k(t)}{p(t)}\right). \tag{7. 1}$$

Nach 4. ist nun T_r^*, $(r = 2, 3, \ldots)$, multiplikativ mit dem Faktor $\frac{1+(r-1)a}{r}$. Aus (6. 1) folgt daher nach (7. 1) unmittelbar, daß

$$\frac{h_k(x)}{p(x)} \to \frac{1+a}{2} \cdot \frac{1+2a}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{1+(k-1)a}{k} g_k = g_k'$$

strebt. Damit ist die erste Hälfte des Äquivalenzsatzes bewiesen.

Soll dieser Teil des Satzes bei beliebigem $p(x)$ aus $\mathfrak{P}$ für jedes $k = 2, 3, \ldots$ und jede zugelassene Funktion $s(t)$ gelten, so insbesondere für $k = 2$. Dies erfordert, daß T_2^*, also auch M^* konvergenzerhaltend ist. Das ist aber nach 4. dann und nur dann der Fall, wenn $p(x)$ regulär wächst.

8. *Aus* (6. 2) *folgt* (6. 1). Nach Äq. I, (4. 7) und (4. 10) besitzt T_r die Inverse

$$T_r^{-1} = r E - (r-1) N_{r-1},$$

wenn [vgl. Äq. I, (4. 8)] N_{r-1} die Transformation mit der Vermittlungsfunktion $r\frac{t^{r-1}}{x^r}$, $(0 < t \leqq x)$, bedeutet. Also besitzt T_r^* die Inverse

$$T_r^{*-1} = P^{-1} T_r^{-1} P = r E - (r-1) N_{r-1}^*,$$

wenn $N_{r-1}^* = P^{-1} N_{r-1} P$ die Transformation mit der Vermittlungsfunktion

$$N_{r-1}^* = r \frac{t^{r-1} p(t)}{x^r p(x)}$$

bedeutet. Sie gehört wieder zu $\mathfrak{P}$, da $x^{r-1} p(x)$ nach 5. und der zusätzlichen Bemerkung in 5. zugleich mit $p(x)$ regulär wächst.

Aus (7. 1) folgt daher

$$\frac{c_k(x)}{p(x)} = T_k^{*-1} \cdot \ldots \cdot T_2^{*-1}\left(x; \frac{h_k(t)}{p(t)}\right). \tag{8. 1}$$

Da $t^{r-1} p(t)$, $(r = 2, 3, \ldots)$, nach 5. überdies den Index $\frac{a}{1+(r-1)a}$ hat, so ist N_{r-1}^* konvergenzerhaltend mit diesem Index als Multiplikator. Also ist auch T_r^{*-1} multiplikativ mit dem Faktor

$$r - (r-1)\frac{ra}{1+(r-1)a} = \frac{r}{1+(r-1)a}.$$

Aus (6. 2) folgt daher auf Grund von (8. 1) die Beziehung (6. 1) mit

$$g_k = \frac{k}{1+(k-1)a} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{1+a} g_k'.$$

Damit ist auch die zweite Hälfte des Äquivalenzsatzes bewiesen. Damit sie in demselben Sinne wie die erste stets gilt, ist notwendig und hinreichend, daß $x^{r-1} p(x)$, $(r = 2, 3, \ldots, k)$, regulär wächst, für beide Hälften zusammen also, daß $p(x)$ regulär wächst.

III. Weitere Eigenschaften der regulär wachsenden Funktionen.

9. *Erfüllt ein $p(x)$ aus $\mathfrak{P}$ die Bedingung (0. 2) und ist $a \neq 0$ [14], so gibt es eine Funktion $b(x)$, die für ein $\gamma > 0$ in $x \geqq \gamma$ stetig und $\neq 0$ ist, für die*

$$b(x) \to b = \frac{1}{a} \neq 0 \text{ [10]}$$

gilt und mit der bei geeignetem $C \neq 0$ in $x \geqq \gamma$

$$p(x) = C \cdot \frac{b(x)}{x} \exp \int_{\gamma}^{x} \frac{b(t)}{t}\, dt \tag{9. 1}$$

ist.

Beweis. $\int_0^x p(t)\, dt = \varphi(x)$ ist für $x > 0$ stetig differenzierbar, und es ist $\varphi'(x) = p(x) \neq 0$. Wegen $\frac{\varphi(x)}{x\varphi'(x)} \to a \neq 0$ gibt es ein $\gamma > 0$, so daß $\varphi(x) \neq 0$ ist in $x \geqq \gamma$. Dann leistet die Funktion

$$b(x) = \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} \qquad (x \geqq \gamma)$$

das Verlangte. Denn $b(x)$ ist in $x \geqq \gamma$ stetig und $\neq 0$ und strebt für $x \to \infty$ gegen $b = \frac{1}{a} \neq 0$. Mit ihr ist ferner

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{b(x)}{x}, \quad [\log \varphi(t)]_{\gamma}^{x} = \int_{\gamma}^{x} \frac{b(t)}{t}\, dt,$$

also

$$\varphi(x) = \int_0^x p(t)\, dt = C \exp \int_{\gamma}^{x} \frac{b(t)}{t}\, dt, \qquad \left(C = \int_0^{\gamma} p(t)\, dt = \varphi(\gamma) \neq 0\right),$$

und

$$p(x) = \varphi'(x) = \frac{b(x)}{x}\varphi(x) = C\frac{b(x)}{x} \exp \int_{\gamma}^{x} \frac{b(t)}{t}\, dt, \qquad (x \geqq \gamma).$$

Die Darstellung (9. 1), die insbesondere für jede regulär wachsende Funktion mit von 0 verschiedenem Index möglich ist, wollen wir deren *kanonische Darstellung* nennen.

Setzt man in ihr $b(x) = b + \varepsilon(x)$, $\frac{b(x)}{b} = c(x)$, $\frac{bC}{\gamma^b} = C'$, so kann ihr die Form

$$p(x) = C' c(x)\, x^{b-1} \exp \int_{\gamma}^{x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt, \qquad (x \geqq \gamma), \tag{9. 2}$$

---

[14]) Die regulär wachsenden Funktionen mit dem Index $a = 0$ unterscheiden sich in wesentlichen Eigenschaften von denen mit $a \neq 0$ und werden im folgenden meist beiseite gelassen.

gegeben werden[15]), in der $c(x)$ und $\varepsilon(x)$ für $x \geqq \gamma$ stetig sind, $c(x) \neq 0$ ist und $c(x) \to 1$, $\varepsilon(x) \to 0$ strebt.

10. Auf Grund von **9.** läßt sich das eine der Ergebnisse in **5.** erneut und verschärft beweisen: *Der Index a einer regulär wachsenden Funktion ist entweder $= 0$ oder er hat einen positiven Realteil*: $\Re(a) > 0$.

Beweis. In (0.1) setzen wir $\int_0^x |p(t)|\,dt = \psi(x)$, $\frac{1}{M} = \mu$, so daß für alle $x \geqq 1$

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \geqq \frac{\mu}{x}, \qquad \psi(x) \geqq \psi(1)\, x^{\mu},$$

$$|p(x)| = \psi'(x) \geqq \frac{\mu}{x}\,\psi(x) > \frac{c_1}{x}\,x^{\mu} \tag{10.1}$$

ist ($c_1 > 0$ und von x unabhängig). Wäre nun $a \neq 0$ und $\Re(a) \leqq 0$, also auch $\Re(b) \leqq 0$, so wäre für $x > x_1 \geqq \gamma$

$$\Re\big(b(x)\big) = \beta(x) < \frac{\mu}{2},$$

nach (9.1) also für $x > x_1$

$$p(x) < |C|\,\frac{|b(x)|}{x} \exp \int_{\gamma}^{x_1} \frac{\beta(t)}{t}\,dt \cdot \exp\left\{\frac{\mu}{2}\int_{x_1}^{x}\frac{dt}{t}\right\}$$

$$< \frac{c_2}{x}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{\mu}{2}}, \qquad (c_2 > 0 \text{ von } x \text{ unabhängig}),$$

was für alle hinreichend großen x mit (10.1) in Widerspruch steht. Also ist $\Re(a) > 0$, $\Re(b) > 0$.

11. (Umkehrung von **9.**) *Es sei $b(x)$ in $x > \gamma' \geqq 0$ stetig und für $x \to \infty$ strebe $b(x) \to b$ mit $\Re(b) > 0$. Dann ist bei geeignetem $\gamma > \gamma'$ und beliebigem $C \neq 0$ die Funktion*

$$p(x) = C\,\frac{b(x)}{x} \exp \int_{\gamma}^{x} \frac{b(t)}{t}\,dt, \qquad (x \geqq \gamma), \tag{11.1}$$

die man sich in $0 \leqq x \leqq \gamma$ beliebig gemäß **1.** *erklärt denken möge, regulär wachsend mit dem Index $a = \frac{1}{b} \neq 0$.*

Beweis. I. Es werde $\Re\big(b(x)\big) = \beta(x)$, $\Re(b) = \beta$ gesetzt. Dann strebt $\beta(x) \to \beta > 0$, und es kann $\gamma > \gamma'$ so gewählt werden, daß $\beta(x) > 0$ ist für $x \geqq \gamma$. Wird dies γ in (11.1) verwendet, so ist das dadurch erklärte $p(x)$

[15]) Potenzen mit positiver Grundzahl und komplexen Exponenten sind wie üblich eindeutig erklärt.

in $x \geqq \gamma$ stetig und $\neq 0$, gehört also, wenn in $0 \leqq x \leqq \gamma$ irgendwie gemäß 1. erklärt, jedenfalls zur Klasse $\mathfrak{P}$. Weiter ist für $x \geqq \gamma$

$$\int_\gamma^x p(t)\,dt = C \int_\gamma^x \frac{b(t)}{t} \exp\left\{\int_\gamma^t \frac{b(u)}{u}\,du\right\} dt$$

$$= C\left[\exp \int_\gamma^t \frac{b(u)}{u}\,du\right]_\gamma^x = C \exp \int_\gamma^x \frac{b(t)}{t}\,dt - C.$$

Hiernach ist für $x \geqq \gamma$

$$\frac{1}{x\,p(x)} \int_\gamma^x p(t)\,dt = \frac{1}{b(x)} - \frac{C}{x\,p(x)} \tag{11.2}$$

und strebt also $\to \frac{1}{b}$, da $x|p(x)|$ offenbar gegen $+\infty$ strebt.

II. Wir setzen nun für $x \geqq \gamma$

$$q(x) = \frac{\beta(x)}{x} \exp \int_\gamma^x \frac{\beta(t)}{t}\,dt$$

und $q(x) \equiv q(\gamma)$ in $0 \leqq x \leqq \gamma$. Dann ist einerseits

$$|p(x)| = |C| \frac{|b(x)|}{\beta(x)} q(x),$$

so daß

$$\chi(x) = \frac{|p(x)|}{q(x)} \to |C| \frac{|b|}{\beta} = d > 0 \tag{11.3}$$

strebt. Andererseits strebt, nach I, da $\beta(x)$ die entsprechenden Voraussetzungen erfüllt wie $b(x)$,

$$\frac{1}{x\,q(x)} \int_\gamma^x q(t)\,dt \to \frac{1}{\beta}.$$

Mit $x|p(x)|$ strebt nach (11.3) auch $x\,q(x) \to \infty$ und also auch

$$\frac{1}{x\,q(x)} \int_0^x q(t)\,dt \to \frac{1}{\beta}.$$

Da $q(x) > 0$ und also die Bedingung (0.1) für $q(x)$ eine Folge von (0.2) ist, so ist $q(x)$ regulär wachsend mit dem Index $\frac{1}{\beta}$. Folglich strebt nach (2.2), 4. und (11.3)

$$\frac{1}{x\,q(x)} \int_\gamma^x q(t)\,\chi(t)\,dt \to \frac{d}{\beta}$$

und also

$$(11.4) \qquad \frac{1}{x|p(x)|}\int_{\gamma}^{x}|p(t)|\,dt \to \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\Re\left(\frac{1}{a}\right)}.$$

Wegen $x|p(x)| \to \infty$ ergibt sich aus (11.4), daß (0.1) erfüllt ist, und aus (11.2), daß (0.2) erfüllt ist. — Darüber hinaus haben sich die beiden folgenden Tatsachen ergeben:

12. 1. *Ist $p(x)$ regulär wachsend mit einem Index $a \neq 0$, so ist auch $|p(x)|$ regulär wachsend und hat den Index $\frac{1}{\Re\left(\frac{1}{a}\right)}$.* Denn in der kanonischen Darstellung (9.1) von $p(x)$ erfüllt $b(x)$ nach **10.** die Voraussetzungen von **11.** Es gilt also (11.4), und zwar auch dann, wenn dort die untere Integrationsgrenze γ durch 0 ersetzt wird.

2. *Erfüllt eine Funktion $p(x)$ aus $\mathfrak{P}$ allein die Bedingung (0.2) und ist in ihr $\Re(a) > 0$, so ist auch (0.1) erfüllt und $p(x)$ also regulär wachsend mit dem Index a.* Denn $p(x)$ besitzt dann eine Darstellung (9.1) und ist also nach **11.** regulär wachsend mit dem Index a.

13. 1. *Ist $p(x)$ regulär wachsend mit dem Index a und ihr die Funktion $p_1(x)$ aus $\mathfrak{P}$ asymptotisch proportional: $p_1(x) \cong g \cdot p(x)$, $(g \neq 0)$, so ist auch $p_1(x)$ regulär wachsend mit dem Index a.* Denn setzt man $p_1(x) = (g + \varepsilon(x))\,p(x)$, so erkennt man nach **3.** sofort, daß auch

$$\frac{1}{x\,p_1(x)}\int_{0}^{x} p_1(t)\,dt \to a$$

strebt. Weiter ist

$$\frac{1}{x|p_1(x)|}\int_{0}^{x}|p_1(t)|\,dt \leqq \frac{1}{x|p_1(x)|}\left\{g\int_{0}^{x}|p(t)|\,dt + \int_{0}^{x}|\varepsilon(t)\,p(t)|\,dt\right\}$$

und bleibt also für alle $x > 0$ unter einer festen Schranke M_1.

Hieraus folgt noch:

2. *Jede Funktion aus $\mathfrak{P}$, der für $x \geqq \gamma$ die Form (9.2) gegeben werden kann, ist regulär wachsend mit dem Index $a = \frac{1}{b}$, falls $\Re(b) > 0$ ist und $c(x)$ und $\varepsilon(x)$ die dort genannten Bedingungen erfüllen.* Denn für $x \geqq \gamma$ kann dann

$$p(x) = C \cdot \frac{b \cdot c(x)}{x}\,\exp\int_{\gamma}^{x}\frac{b+\varepsilon(t)}{t}\,dt$$

gesetzt werden. Mit $b + \varepsilon(t) = b(t)$ ist sie also der (nach 11.) regulär wachsenden Funktion

$$C \frac{b(x)}{x} \exp \int_{\gamma}^{x} \frac{b(t)}{t} dt$$

asymptotisch gleich und also selbst regulär wachsend mit dem Index $a = \frac{1}{b}$.

14. Auch das zweite Ergebnis in **5.** ergibt sich jetzt im Falle $a \neq 0$ aus der kanonischen Darstellung. Denn ist $p(x)$ regulär wachsend mit dem Index $a \neq 0$ und also für $x \geqq \gamma$ von der Form (9. 2), so hat $p_1(x) = x^\lambda p(x)$ für $x \geqq \gamma$ die gleiche Form, nur daß der Exponent $\frac{1}{a} - 1$ durch $\frac{1}{a} + \lambda - 1 = \frac{1 + \lambda a}{a} - 1$ ersetzt ist. Daraus ergibt sich die Behauptung, und zwar in der erweiterten Form:

Zusatz. *Ist $p(x)$ regulär wachsend mit dem Index $a \neq 0$, so ist auch jede Funktion $p_1(x)$ aus $\mathfrak{P}$ regulär wachsend, die für alle hinreichend großen x mit $x^\lambda p(x)$ übereinstimmt, wofern nur $\Re(\lambda) > -\Re\left(\frac{1}{a}\right)$ ist. Der Index von $p_1(x)$ ist dann $a_1 = \frac{a}{1 + \lambda a}$.*

15. *Ist $p(x)$ regulär wachsend und $a = \frac{1}{b} \neq 0$, so strebt bei jedem festen $\tau > 0$*

$$\frac{p(\tau x)}{p(x)} \to \tau^{b-1}. \tag{15. 1}$$

Beweis. Nach (9. 2) ist für $x > \mathrm{Max}\left(\gamma, \frac{\gamma}{\tau}\right)$

$$\frac{p(\tau x)}{p(x)} = \frac{c(\tau x)}{c(x)} \cdot \tau^{b-1} \cdot \exp \int_{x}^{\tau x} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt.$$

Rechts strebt der erste Faktor $\to 1$; ebenso der letzte, denn nach Wahl von $\varepsilon > 0$ kann x_0 so bestimmt werden, daß für $x > x_0$ im Intervall $\langle x, \tau x \rangle$ stets $|\varepsilon(t)| < \varepsilon$, also

$$\left| \int_{x}^{\tau x} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right| < \varepsilon |\log \tau|$$

ist. Also gilt (15. 1) [16]).

---

[16]) J. KARAMATA nimmt in der zweiten der in Fußnote [9]) genannten Arbeiten die Eigenschaft (15. 1) zum Ausgangspunkt für die Behandlung seiner (positiven) regulär wachsenden Funktionen. Genauer: Er nennt eine (positive) Funktion $p(x)$ regulär wachsend, wenn bei festem $\tau > 0$ stets $p(\tau x)/p(x)$ für $x \to \infty$ einem Grenzwert, etwa $h(\tau)$, zustrebt. Es zeigt sich dann, daß $h(\tau)$ notwendig $= \tau^\varkappa$, ($\varkappa$ reell), sein muß und daß seine regulär wachsenden Funktionen für $\varkappa > -1$ auch in unserem Sinne regulär wachsend sind.

Dies Ergebnis, wie auch schon die kanonische Darstellung (9. 2), zeigt, daß die regulär wachsenden Funktionen vom Index 1 besonders ausgezeichnet sind. Wir definieren:

Erklärung 2. *Eine regulär wachsende Funktion vom Index* 1 *soll eine langsam wachsende Funktion heißen* [R. SCHMIDT [8]), J. KARAMATA [9])]. Sie wird in der Folge meist mit $L(x)$ bezeichnet. Für sie strebt bei festem $\tau > 0$ stets

$$\frac{L(\tau x)}{L(x)} \to 1. \tag{15. 2}$$

Umgekehrt ist auch jede Funktion der Klasse $\mathfrak{P}$, die die Eigenschaft (15. 2) hat, langsam wachsend mit dem Index 1. Von dieser Tatsache werden wir indessen keinen Gebrauch machen. Ein Beweis findet sich für positive Funktionen bei J. KARAMATA [9]).

Aus der Erklärung 2, (9. 2) und **13.** 2. folgt unmittelbar:

16. *Eine Funktion der Klasse* $\mathfrak{P}$ *ist dann und nur dann langsam wachsend, wenn sie für ein* $\gamma > 0$ *in* $x \geqq \gamma$ *auf die Form*

$$L(x) = C(x) \cdot \exp \int_{\gamma}^{x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt \tag{16. 1}$$

gebracht werden kann mit stetigem $C(x) \neq 0$, $C(x) \to C \neq 0$ *und stetigem* $\varepsilon(x) \to 0$. Sowie:

17. *Eine Funktion* $p(x)$ *der Klasse* $\mathfrak{P}$ *ist dann und nur dann regulär wachsend vom Index* $a \neq 0$, *wenn* $\Re(a) > 0$ *ist und die Funktion für alle hinreichend großen* x *mit* $b = \frac{1}{a}$ *auf die Form*

$$p(x) = x^{b-1} L(x) \tag{17. 1}$$

mit langsam wachsendem $L(x)$ *gebracht werden kann.*

18. *Ist* $L(x)$ *langsam wachsend und* $\varepsilon > 0$, *so ist für alle hinreichend großen* x

$$x^{-\varepsilon} < |L(x)| < x^{\varepsilon}. \tag{18. 1}$$

Beweis. $L(x)$ werde auf die Form (16. 1) gebracht. Für $t > x_0 \geqq \gamma$ sei $|\varepsilon(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist für $x > x_0$

$$\left| \int_{x_0}^{x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} \log \frac{x}{x_0}.$$

Hieraus folgt aber, da $|C(x)|$ für alle hinreichend großen x zwischen festen positiven Schranken bleibt, sofort die Behauptung. Aus ihr folgt in Ergänzung zu (2. 2) insbesondere noch:

Hat $p(x)$ einen von 0 verschiedenen Index, so strebt auch für jedes reelle $\varrho > 0$

$$x\,|p(x)|\,(\log x)^{-\varrho} \to \infty. \tag{18.2}$$

19. *Die Beziehungen* (15.1) *und* (15.2) *gelten gleichmäßig für alle τ eines Intervalles der Form $0 < \tau_1 \leqq \tau \leqq \tau_2$.*

Beweis. Wegen (17.1) genügt es, dies für (15.2) zu beweisen. Nach (16.1) ist

$$\frac{L(\tau x)}{L(x)} = \frac{C(\tau x)}{C(x)} \cdot \exp \int_x^{\tau x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt.$$

Wegen $C(x) \to C \neq 0$ strebt $\frac{C(\tau x)}{C(x)} \to 1$ gleichmäßig in $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$, und wegen

$$\left| \int_x^{\tau x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt \right| \leqq \varepsilon \cdot \operatorname{Max}\{|\log \tau_1|, |\log \tau_2|\}$$

(vgl. den Beweis in 15.) tut es auch der Exponentialfaktor.

20. *Es sei $q(x)$ eine positive regulär wachsende Funktion mit einem Index $0 < \alpha = \frac{1}{\beta} < 1$ (so daß $q(x)$ nach* (17.1) *und* (18.1) *gegen ∞ strebt) und*

$$Q(x) = \operatorname{Max}\{q(t)\} \quad \text{in} \quad 0 \leqq t \leqq x.$$

Dann strebt $Q(x)/q(x) \to 1$, so daß die monoton wachsende und stetige Funktion $Q(x)$ nach 13.1. *wiederum regulär wächst und den Index α hat* [17]).

Beweis. Es ist $Q(x) = q(\vartheta_x x)$ mit $0 \leqq \vartheta_x \leqq 1$. Bringt man nun $q(x)$ auf die Form (9.2), so ist

$$\frac{Q(x)}{q(x)} = \frac{q(\vartheta_x x)}{q(x)} = \frac{c(\vartheta_x x)}{c(x)} \cdot \vartheta_x^{\beta-1} \cdot \exp \int_x^{\vartheta_x x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt. \tag{20.1}$$

Da wegen $q(x) \to \infty$ auch $\vartheta_x x \to \infty$ streben muß, hat der erste Faktor rechts den Grenzwert 1. Es genügt also zu zeigen, daß $\vartheta_x \to 1$ strebt. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es eine gegen $+\infty$ strebende Folge x_ν, für die $\vartheta_{x_\nu} \to \vartheta < 1$ strebt. Für diese würde nach (20.1) $Q(x_\nu)/q(x_\nu) \to \vartheta^{\beta-1}$ streben [18]). Das ist jedoch unmöglich, da $Q(x) \geqq q(x)$ ist und $\vartheta^{\beta-1} < 1$

---

[17]) J. KARAMATA, S. 45 der ersten in Fußnote [9]) genannten Arbeiten. Der dortige Beweis benutzt die bei ihm nicht vorausgesetzte Stetigkeit von $q(x)$.

[18]) Dies gilt auch, wenn $\vartheta = 0$ sein sollte. Denn ist $0 < \varepsilon < \beta - 1$, so ist für alle hinreichend großen x

$$\vartheta_x^{\beta-1} \cdot \exp \int_x^{\vartheta_x x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt < \vartheta_x^{\beta-1-\varepsilon}.$$

wäre. (Für $\beta = 1$ gilt, wie J. KARAMATA a. a. O. durch ein Beispiel zeigt, der Satz nicht mehr allgemein.) — Analog gilt:

Es sei $q(x)$ eine positive regulär wachsende Funktion mit dem Index $\alpha = \frac{1}{\beta} > 1$ (so daß $q(x) \to 0$ strebt) und

$$\overline{Q}(x) = \operatorname{Max}\{q(t)\} \quad \text{in} \quad t \geqq x.$$

Dann ist auch $\overline{Q}(x) \asymp q(x)$, regulär wachsend mit dem Index α und monoton fallend.

Beweis. Jetzt ist $\overline{Q}(x) = q(\vartheta_x x)$ mit $\vartheta_x \geqq 1$. Würde $\vartheta_x \to 1$ nicht gelten, so gäbe es eine Folge $x_\nu \to \infty$, für die $\vartheta_{x_\nu} \to \vartheta > 1$ strebt. Für sie würde $\overline{Q}(x_\nu)/q(x_\nu) \to \vartheta^{\beta-1}$ streben, was unmöglich, weil wieder die linke Seite $\geqq 1$, die rechte < 1 ist.

21. *Es sei $p(x)$ regulär wachsend mit dem Index $a \neq 0$. Es werde $\frac{1}{a} = b$, $\Re(b) = \beta$ gesetzt. Die Funktion $f(t)$ sei in $0 < t < \tau$ erklärt und über $(0, \tau)$ absolut integrierbar. Gilt dann für ein $\delta < 1$ mit $0 < \delta < \tau$ in $0 < t \leqq \delta$ eine Ungleichung der Form $|f(t)| < K t^\varkappa$ mit $\varkappa > -\beta$ und > -1, so ist*

$$\int_0^\tau f(t)\, p(xt)\, dt \asymp p(x) \int_0^\tau f(t)\, t^{b-1}\, dt.$$

Beweis. Für $0 < \varepsilon < \delta$ und $x > 0$ ist

$$\left| \int_0^\varepsilon f(t)\, p(xt)\, dt \right| < K \int_0^\varepsilon t^\varkappa |p(xt)|\, dt = \frac{K}{x^{\varkappa+1}} \int_0^{\varepsilon x} t^\varkappa |p(t)|\, dt.$$

Es sei $p_1(t)$ eine Funktion aus $\mathfrak{P}$, die für $t \geqq 1$ mit $t^\varkappa p(t)$ übereinstimmt. Mit ihr ist für $x > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\left| \frac{1}{p(x)} \int_0^\varepsilon f(t)\, p(xt)\, dt \right|$$

$$< \frac{K}{x\,|p_1(x)|} \int_0^1 t^\varkappa |p(t)|\, dt + K \left| \frac{p(\varepsilon x)}{p(x)} \right| \varepsilon^{\varkappa+1} \cdot \frac{1}{(\varepsilon x)\,|p_1(\varepsilon x)|} \int_0^{\varepsilon x} |p_1(t)|\, dt.$$

Da nach dem Zusatz zu **14.** $p_1(x)$ regulär wächst, so ist dies bei passender Wahl von M_1

$$< \frac{K'}{x\,|p_1(x)|} + K M_1 \varepsilon^{\varkappa+1} \cdot \left| \frac{p(\varepsilon x)}{p(x)} \right|.$$

∞ strebt diese Summe nach (2. 2) und (15. 1) gegen $K M_1 \varepsilon^{\varkappa+\beta}$ und also für alle $x > x_1(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$

$$< 2 K M_1 \varepsilon^{\varkappa+\beta}.$$

Da nun

$$\left|\int_0^\varepsilon f(t)\,t^{b-1}\,dt\right| < K\int_0^\varepsilon t^{\varkappa+\beta-1}\,dt = \frac{K}{\varkappa+\beta}\,\varepsilon^{\varkappa+\beta}$$

ist, so ist

$$\frac{1}{p(x)}\int_0^\tau f(t)\,p(xt)\,dt - \int_0^\tau f(t)\,t^{b-1}\,dt = \int_\varepsilon^\tau f(t)\left[\frac{p(xt)}{p(x)} - t^{b-1}\right]dt + \eta(x)$$

mit

$$|\eta(x)| < K\left(2M_1 + \frac{1}{\varkappa+\beta}\right)\varepsilon^{\varkappa+\beta}.$$

Nach **19.** strebt der Wert der eckigen Klammer in $\varepsilon \leqq t \leqq \tau$ gleichmäßig $\to 0$, ist also seinem Betrage nach $< \varepsilon^{\varkappa+\beta}$ für alle $x > x_2(\varepsilon)$ und alle t in $\varepsilon \leqq t \leqq \tau$. Für $x > x_0 = \mathrm{Max}\,(x_1, x_2)$ ist also

$$\left|\frac{1}{p(x)}\int_0^\tau f(t)\,p(xt)\,dt - \int_0^\tau f(t)\,t^{b-1}\,dt\right| \leqq \left\{\int_0^\tau |f(t)|\,dt + 2KM_1 + \frac{K}{\varkappa+\beta}\right\}\varepsilon^{\varkappa+\beta},$$

was die Behauptung beweist.

Schließlich bringen wir noch einige später gebrauchte Hilfssätze über die $p(x)$ im Zusammenhang mit ihren C- und H-Transformationen. Hierbei wollen wir verabreden, daß wir die durch eine Transformation V aus einem zugelassenen $s(t)$ gewonnene Funktion $V(x; s(t))$ kurz mit $V(x)$ bezeichnen, wenn über die Funktion $s(t)$, die transformiert wurde, auf Grund des Zusammenhanges kein Zweifel möglich ist.

22. *Ist die Funktion $p(t)$ regulär wachsend mit dem Index $a = \frac{1}{b} \neq 0$, so gelten für ihre S_k-, C_k- und H_k-Transformationen bei $k > 0$* [vgl. Äq. I, (1. 5) und (3. 18); in letzterer ist noch $(k-1)!$ durch $\Gamma(k)$ zu ersetzen] *die Beziehungen*

$$(22.\,1)\qquad S_k(x; p(t)) = \frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^x (x-t)^{k-1}\,p(t)\,dt \simeq \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(k+b)}\,x^k\,p(x),$$

$$(22.\,2)\qquad C_k(x; p(t)) = \frac{k}{x}\int_0^x \left(1-\frac{t}{x}\right)^{k-1} p(t)\,dt \simeq \frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(b)}{\Gamma(k+b)}\,p(x),$$

$$(22.\,3)\qquad H_k(x; p(t)) = \frac{1}{\Gamma(k)\,x}\int_0^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1} p(t)\,dt \simeq a^k\,p(x).$$

Beweis. Es ist zunächst

$$S_k(x; p(t)) = \frac{x^k}{\Gamma(k)}\int_0^1 (1-t)^{k-1}\,p(xt)\,dt.$$

Da die Funktion $f(t) = (1-t)^{k-1}$ in $(0 \dots 1)$ offenbar die in **21.** gemachten Voraussetzungen erfüllt (etwa mit $\varkappa = 0$), so ist dies weiter

$$\cong \frac{1}{\Gamma(k)} x^k\, p(x) \cdot \int_0^1 (1-t)^{k-1}\, t^{b-1}\, dt = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(k+b)}\, x^k\, p(x),$$

was die erste Behauptung beweist. Die zweite ergibt sich hieraus durch Division mit $x^k/\Gamma(k+1)$.

Ganz entsprechend hat man

$$H_k(x; p(t)) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^1 \left(\log \frac{1}{t}\right)^{k-1} p(xt)\, dt,$$

und da jetzt die Funktion $f(t) = \left(\log \frac{1}{t}\right)^{k-1}$ in $(0 \dots 1)$ die in **21.** gemachten Voraussetzungen erfüllt, wenn $\varkappa$ negativ (aber $> -\beta$, > -1) gewählt wird, so ist dies nach **21.** weiter

$$\cong \frac{1}{\Gamma(k)}\, p(x) \cdot \int_0^1 \left(\log \frac{1}{t}\right)^{k-1} t^{b-1}\, dt.$$

Das neue Integral ist aber

$$= \int_0^\infty e^{-bt}\, t^{k-1}\, dt = \frac{1}{b^k} \int_0^\infty e^{-t}\, t^{k-1}\, dt,$$

wenn bei dem letzten Integral der Weg geradlinig von 0 über b nach ∞ genommen und für t^k (und b^k) der Hauptwert gewählt wird. Es hat also den Wert $\Gamma(k)$, was den Beweis vollendet.

Etwas allgemeiner gilt:

23. *Ist* $s(t) \cong g \cdot p(t)$ *für* $t \to \infty$, ($s(t)$ *aus* $\mathfrak{S}$), *und* $k > 0$, *so gilt für* $x \to \infty$

$$S_k(x; s(t)) \cong \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(k+b)}\, g \cdot x^k\, p(x), \tag{23. 1}$$

$$C_k(x; s(t)) \cong \frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(b)}{\Gamma(k+b)}\, g \cdot p(x), \tag{23. 2}$$

$$H_k(x; s(t)) \cong a^k\, g \cdot p(x). \tag{23. 3}$$

[Im Falle $g = 0$ ist die rechte Seite von Voraussetzung und Behauptung durch $o(p(t))$ bzw. $o(x^k\, p(x))$ und $o(p(x))$ zu ersetzen.]

Beweis. Wird $s(t) = (g + \varepsilon(t))\, p(t)$ gesetzt, so gehört $\varepsilon(t)$ zu $\mathfrak{S}$ und strebt $\to 0$ für $t \to \infty$. Wegen des linearen Charakters der Transformationen ist nun

$$S_k(x; s(t)) = g \cdot S_k(x; p(t)) + S_k(x; \varepsilon(t)\, p(t)),$$

und entsprechendes gilt für die C_k- und H_k-Transformation. Auf Grund von 22. genügt es daher zu zeigen, daß der zweite Summand rechts $= o(x^k p(x))$ und im Falle der C_k- und H_k-Transformation $= o(p(x))$ ist. Das ergibt sich aber wie üblich[19]): Man bestimmt bei gegebenem $\varepsilon > 0$ ein x_0 so, daß $|\varepsilon(t)| < \varepsilon$ für $t \geqq x_0$. Dann ist für $x > x_0$

$$\frac{1}{x^k p(x)} \int_0^x (x-t)^{k-1} \varepsilon(t)\, p(t)\, dt \Big|$$

$$\leqq \frac{1}{x^k |p(x)|} \left| \int_0^{x_0} (x-t)^{k-1} \varepsilon(t)\, p(t)\, dt \right| + \frac{\varepsilon}{x^k |p(x)|} \int_0^x (x-t)^{k-1} |p(t)|\, dt.$$

Hier ist der erste Summand rechts

$$< \frac{K}{x |p(x)|} \int_0^{x_0} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{k-1}$$

und ist also wegen $x\,|p(x)| \to \infty$ für alle hinreichend großen x kleiner als ε. Der zweite Summand strebt, weil nach 12. 1. auch $|p(t)|$ regulär wächst, nach (22. 1) gegen einen Grenzwert der Form $\varepsilon \cdot c$, ist also für alle hinreichend großen x kleiner als ein festes Vielfaches von ε. Das gilt also auch für den ganzen Ausdruck. Die linke Seite strebt daher $\to 0$, d. h. es ist $S_k(x; \varepsilon(t)\, p(t)) = o(x^k p(x))$. Für C_k ergibt sich die entsprechende Behauptung durch Division mit x^k.

Daß auch die H_k-Transformation von $\varepsilon(t)\, p(t)$ gleich $o(p(x))$, folgt aus der analog wie oben angesetzten Abschätzung

$$(23.4) \quad \left| \frac{1}{x\, p(x)} \int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} \varepsilon(t)\, p(t)\, dt \right|$$

$$\leqq \frac{1}{x |p(x)|} \int_0^{x_0} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} |\varepsilon(t)\, p(t)|\, dt + \frac{\varepsilon}{x |p(x)|} \int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} |p(t)|\, dt,$$

und zwar für den zweiten Summanden auf Grund von (22. 3), für den ersten folgendermaßen: Es ist

$$\int_0^{x_0} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} |\varepsilon(t)\, p(t)|\, dt \leqq K \int_0^{x_0} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} dt = O(\log^{k-1} x),$$

---

[19]) Das Folgende besagt kurz: Die Integraltransformationen mit den Vermittlungsfunktionen $\frac{p(t)}{x\, p(x)} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{k-1}$ und $\frac{p(t)}{x\, p(x)} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1}$ sind konvergenzerhaltend und zwar multiplikativ.

denn das letzte Integral ist

$$= x \int_{\log \frac{x}{x_0}}^{\infty} e^{-t} t^{k-1} dt,$$

und es ist bekanntlich für $y \to \infty$

$$\int_{y}^{\infty} e^{-t} t^{k-1} dt = e^{-y} y^{k-1} \left\{1 + O\left(\frac{1}{y}\right)\right\} = O(e^{-y} y^{k-1}). \tag{23.5}$$

Es ist also für alle hinreichend großen x der erste Summand rechts in (23.4)

$$< \frac{K'}{x|p(x)|} (\log x)^{k-1},$$

was nach (18.2) gegen 0 strebt.

Aus diesen Sätzen ergeben sich noch leicht die folgenden erweiterten Permanenzsätze:

24. *Aus* $C_r(x; s(t)) \cong g\, p(x)$ *folgt*

$$C_{r+k}(x; s(t)) \cong \frac{\Gamma(k+r+1)\,\Gamma(b+r)}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(b+k+r)} g \cdot p(x), \tag{24.1}$$

und aus $H_r(x; s(t)) \cong g\, p(x)$ *folgt*

$$H_{r+k}(x; s(t)) \cong a^k g \cdot p(x), \tag{24.2}$$

wenn r *und* $k > 0$ *sind und* $p(x)$ *den von* 0 *verschiedenen Index* $a = \frac{1}{b}$ *hat.* (Für $g = 0$ ist dies entsprechend wie in **23.** zu deuten.)

Beweis. Die Voraussetzung zu (24.1) besagt, daß

$$S_r(x; s(t)) \cong \frac{g}{\Gamma(r+1)} x^r p(x) \tag{24.3}$$

ist. Da nun $S_{r+k} = S_k(S_r)$ ist [20]), da ferner $x^r p(x)$ regulär wächst und den reziproken Index $b + r$ hat [21]), so ist nach (23.1)

$$S_{r+k}(x; s(t)) = S_k(x; S_r(t)) \cong \frac{\Gamma(b+r)}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(b+r+k)} g \cdot x^{k+r} p(x),$$

woraus durch Division mit $x^{k+r}/\Gamma(k+r+1)$ die Behauptung (24.1) folgt.

Ganz ähnlich, aber noch unmittelbarer, folgt wegen $H_{k+r} = H_k(H_r)$ die Behauptung (24.2) aus der zugehörigen Voraussetzung nach (23.3).

---

[20]) Ausführlich: $S_{r+k}(x; s(t)) = S_k(x; S_r(t; s(u)))$.

[21]) Hier hat rechterhand genauer eine Funktion $p_1(x)$ aus $\mathfrak{P}$ zu stehen, die für alle hinreichend großen x mit $x^r p(x)$ übereinstimmt (vgl. die Bemerkung zu 5.).

Schließlich bedürfen wir noch des folgenden Mittelwertsatzes von M. Riesz [22]:

25. *Wird zur Abkürzung die S_k-Transformation der reellen Funktion $s(t)$ aus $\mathfrak{S}$*

$$\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^x (x-t)^{k-1}\, s(t)\, dt = S_k(x)$$

gesetzt und ist $0 \leqq \xi < x$, $0 < k < 1$, so gilt: Für mindestens ein τ in $0 \leqq \tau < \xi$ ist

$$\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^\xi (x-t)^{k-1}\, s(t)\, dt = S_k(\tau). \tag{25.1}$$

Nur eine Variante davon ist der entsprechende Satz für die H_k-Transformation [23]:

Wird zur Abkürzung bei reeller Funktion $s(t)$

$$\frac{1}{\Gamma(k)}\,\frac{1}{x}\int_0^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1} s(t)\, dt = H_k(x)$$

gesetzt und ist $0 \leqq \xi < x$, $0 < k < 1$, so gilt: Für mindestens ein τ in $0 \leqq \tau < \xi$ ist

$$\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^\xi \left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1} s(t)\, dt = \tau\, H_k(\tau). \tag{25.2}$$

IV. Der erweiterte Äquivalenzsatz für beliebige $k > 0$.

26. Der erweiterte Äquivalenzsatz (vgl. 6.) kann so formuliert werden: Aus

$$\frac{k}{x^k}\int_0^x (x-t)^{k-1}\, s(t)\, dt \cong g_k\, p(x) \tag{26.1}$$

---

[22]) Vgl. Hardy-Riesz [7]), S. 28 f. Hier wird mit Recht betont, daß der Satz in der Theorie der C-Transformationen (oder also: der Riemann-Liouvilleschen Integrale) dieselbe wichtige Rolle spielt wie der klassische Mittelwertsatz bei gewöhnlichen Ableitungen. Eine ausführlichere Behandlung des Satzes gibt M. Riesz, Sur un théorème de la moyenne et ses applications. Acta Szeged 1 (1923), S. 114–126. Eine vorläufige Form des Satzes findet sich schon bei M. Riesz, Sur une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques. C. R. Acad. Sci., Paris, 152 (1911), S. 1651–1654.

[23]) Ausgeführter Beweis bei M. Jacob [1], S. 676 ff.

folgt

$$(26.2)\qquad \frac{1}{\Gamma(k)\,x}\int_0^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1} s(t)\,dt \mathrel{\widehat{=}} g'_k\,p(x)$$

mit

$$g'_k = \frac{\Gamma(b+k)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(b)}\,a^k\,g_k, \qquad \left(b=\frac{1}{a}\neq 0\right),$$

und umgekehrt, wofern $s(t)$ eine zugelassene Funktion, $p(x)$ regulär wachsend mit einem Index $a \neq 0$ [24]) und $k>0$ ist.

Nun kann (26. 1) in der Form

$$(26.3)\qquad \int_0^x (x-t)^{k-1}\,s(t)\,dt = \frac{g_k}{k}\,x^k\,p(x) + o\left(x^k\,p(x)\right)$$

geschrieben werden. Nach (22. 1) ist

$$\int_0^x (x-t)^{k-1}\,p(t)\,dt = \frac{\Gamma(k)\,\Gamma(b)}{\Gamma(k+b)}\,x^k\,p(x) + o\left(x^k\,p(x)\right).$$

Setzt man also

$$(26.4)\qquad s(t) - c\,p(t) = S(t) \quad \text{mit} \quad c = \frac{\Gamma(k+b)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(b)}\,g_k,$$

so erweist sich (26. 1) als gleichbedeutend mit

$$(C)\qquad \int_0^x (x-t)^{k-1}\,S(t)\,dt = o\left(x^k\,p(x)\right).$$

Ganz entsprechend erkennt man auf Grund von (22. 3), daß (26. 2) gleichbedeutend ist mit

$$(H)\qquad \int_0^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1} S(t)\,dt = o\left(x\,p(x)\right),$$

und zwar mit *derselben* Funktion $S(t)$ aus (26. 4). Es handelt sich also darum zu zeigen, daß jede der beiden letzten Beziehungen aus der anderen folgt, falls $a \neq 0$ und $k>0$ ist. Diese Doppelbehauptung wird erst für $0<k\leqq 1$, dann für $k>1$ bewiesen. Es genügt offenbar, diese Beweise für *reelle Funktionen* $S(t)$ durchzuführen. Denn besteht die Beziehung (C) für eine komplexwertige Funktion $S(t)$, so besteht sie auch einzeln für deren Real- und Imaginärteil und umgekehrt. Da entsprechendes für (H) gilt, dürfen wir also weiterhin annehmen, daß $S(t)$ *reell* ist.

---

[24]) Der Fall $a=0$ wird im folgenden beiseite gelassen. Ob in ihm der erweiterte Äquivalenzsatz bei beliebigem $k>0$ gilt, bleibt unentschieden.

27. *Schluß von* (H) *auf* (C) *für* $0 < k \leqq 1$. Da die Behauptung für $k = 1$ trivial ist, dürfen wir $0 < k < 1$ annehmen. Nach dem erweiterten Permanenzsatz **24.** folgt dann aus der Voraussetzung (H), daß — die zu transformierende Funktion ist weiterhin stets $S(t)$ —

$$S_1(x) = x H_1(x) = x H_{1-k}(H_k) = o(x\,p(x))$$

ist. Nach Wahl von $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $x_1 > 1$, so daß in $t \geqq x_1$

$$|S_1(t)| < \varepsilon\, t\, |p(t)| \tag{27.1}$$

ist. Dies x_1 nehmen wir zugleich so groß an, daß für $t \geqq x_1$ auch

$$|t\, H_k(t)| < \varepsilon\, t\, |p(t)| \tag{27.2}$$

ausfällt, was nach (H) möglich ist. Wir nehmen nun $x > 2\,x_1$ und zerlegen das Integral $J(x)$ in der Behauptung (C) gemäß

$$J(x) = J = \int_0^{x_1} + \int_{x_1}^{\frac{1}{2}x} + \int_{\frac{1}{2}x}^{x} = J_1 + J_2 + J_3.$$

Dann ist zunächst

$$|J_1| \leqq K \int_0^{x_1} (x-t)^{k-1}\, dt = O(x^{k-1}) = O\Big(\frac{x^k\, p(x)}{x\, p(x)}\Big) = o(x^k\, p(x)).$$

Für J_2 ergibt sich durch Teilintegration

$$J_2 = \Big[S_1(t)\,(x-t)^{k-1}\Big]_{x_1}^{\frac{1}{2}x} + (k-1)\int_{x_1}^{\frac{1}{2}x} (x-t)^{k-2}\, S_1(t)\, dt.$$

Hierin ist die eckige Klammer [es ist (15.1) zu berücksichtigen!]

$$= S_1(\tfrac{1}{2}x)\,(\tfrac{1}{2}x)^{k-1} - S_1(x_1)\,(x-x_1)^{k-1} = o(x^k\, p(x)),$$

und das neue Integral ist wegen (27.1) seinem Betrage nach

$$< \varepsilon \int_{x_1}^{\frac{1}{2}x} (x-t)^{k-2}\, t\, |p(t)|\, dt < \varepsilon\, x^k \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^{k-2}\, t\, |p(x\,t)|\, dt.$$

Dieser letzte Ausdruck ist aber nach **21.** asymptotisch gleich einem festen Vielfachen von $\varepsilon\, x^k\, |p(x)|$, für alle hinreichend großen x also $< \varepsilon K\, x^k\, |p(x)|$, d. h. wiederum $= o(x^k\, p(x))$. Es ist also auch $J_2 = o(x^k\, p(x))$.

Endlich schreiben wir J_3 in der Form

$$J_3 = \int_{\frac{1}{2}x}^{x} \Big(\frac{x-t}{\log x - \log t}\Big)^{k-1} \Big(\log \frac{x}{t}\Big)^{k-1} S(t)\, dt.$$

Die Funktion $\left(\frac{x-t}{\log x - \log t}\right)^{k-1}$ fällt nun, wenn t von 0 bis x läuft, monoton, ist aber positiv. Nach dem zweiten Mittelwertsatz kann daher

$$J_3 = \left(\frac{\frac{1}{2}x}{\log 2}\right)^{k-1} \int_{\frac{1}{2}x}^{\xi} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} S(t)\,dt = K x^{k-1} \left\{ \int_0^{\xi} - \int_0^{\frac{1}{2}x} \right\}$$

mit passendem ξ in $\frac{1}{2}x \leqq \xi \leqq x$ gesetzt werden. Nach dem Mittelwertsatz (25. 2) ist also

$$|J_3| \leqq 2\,\Gamma(k)\,K x^{k-1} \cdot \operatorname*{Max}_{0 \leqq t \leqq x} |t H_k(t)|. \tag{27. 3}$$

In $0 \leqq t \leqq x_1$ ist nun $t H_k(t)$ beschränkt, etwa dem Betrage nach $\leqq K_1$. Weiter ist nach (27. 2)

$$\operatorname*{Max}_{x_1 \leqq t \leqq x} |t H_k(t)| \leqq \varepsilon \cdot \operatorname*{Max}_{x_1 \leqq t \leqq x} t\,|p(t)|.$$

Die Funktion $q_1(t) = t\,|p(t)|$, ($t \geqq x_1$; in $0 \leqq t \leqq x_1$ sei etwa $q_1(t) \equiv q_1(x_1)$), ist aber regulär wachsend mit dem reziproken Index $\beta_1 = \beta + 1 > 1$. Die Funktion

$$Q_1(x) = \operatorname*{Max}_{0 \leqq t \leqq x} q_1(t),$$

die, weil $q_1(t) \to \infty$ strebt, für alle hinreichend großen x mit $\operatorname*{Max}_{x_1 \leqq t \leqq x} q_1(t)$ übereinstimmt, ist nach **20.** wiederum regulär wachsend mit dem reziproken Index β_1, aber zugleich monoton, und es strebt $Q_1(x)/q_1(x) \to 1$. Daher ist

$$\operatorname*{Max}_{x_1 \leqq t \leqq x} |t\,H_k(t)| = o\,(Q_1(x)) = o\,(q_1(x)) = o\,(x\,p(x)).$$

Wegen $x\,|p(x)| \to \infty$ ist auch das in (27. 3) auftretende $\operatorname{Max} = o\,(x\,p(x))$. Daher ist J_3 und also auch $J = o\,(x^k\,p(x))$, wie behauptet.

Ein Beweis der eben durchgeführten Art wird im folgenden noch zweimal auftreten. Seine Struktur ist diese: In Voraussetzung und Behauptung tritt je ein Integral der Form $\int_0^x V(x,t)\,s(t)\,dt$ auf [vgl. Äq. I, (1. 1)]. Für ein geeignetes x_1 und $x > 2x_1$ wird das in der Behauptung stehende in die drei Teile

$$J_1 = \int_0^{x_1}, \quad J_2 = \int_{x_1}^{\frac{1}{2}x}, \quad J_3 = \int_{\frac{1}{2}x}^{x}$$

zerlegt. In J_1 ist $s(t)$ beschränkt, J_2 wird durch Teilintegration in ein Integral gleicher Art mit $S_1(t) = \int_0^t s(u)\,du$ an Stelle von $s(t)$ übergeführt. In beiden

Fällen ergibt sich dann aus den Voraussetzungen leicht die gewünschte Abschätzung. Das schwierigste ist die Abschätzung von J_3. Hier wird durch Abtrennung eines monotonen Faktors im Integranden und Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes das Integral der Behauptung in ein solches der Voraussetzung übergeführt, über dessen Größenordnung dann die Mittelwertsätze (25. 1) und (25. 2) eine erste Auskunft geben. Das hierbei sich einstellende $\underset{0 \leqq t \leqq x}{\mathrm{Max}}$ läßt sich dann mit Hilfe der monotonisierenden Funktionen aus **20.** und auf Grund der Voraussetzungen abschätzen.

28. *Schluß von* (C) *auf* (H) *für* $0 < k \leqq 1$ *und* $\Re(b) = \beta \geqq 1$. Bei dem umgekehrten Schluß von (C) auf (H) ist man gezwungen, die Fälle $\Re(b) = \beta \geqq 1$ und $0 < \beta < 1$ zu trennen. Wir setzen zunächst $\beta \geqq 1$ voraus und dürfen wieder $0 < k < 1$ annehmen. Wir schließen dann ganz ähnlich wie in **27.**: Von der Voraussetzung (C) gehen wir nach **24.** auf S_1 über und können nach Wahl von $\varepsilon > 0$ ein x_1 so bestimmen, daß für $t \geqq x_1$ wieder (27. 1) gilt. Dies x_1 nehmen wir zugleich so groß, daß, wenn die linke Seite in (C) mit $S_k(x)$ bezeichnet wird, für $t \geqq x_1$ auch

$$|S_k(t)| < \varepsilon\, t^k\, |p(t)| \tag{28. 1}$$

ist, was auf Grund von (C) möglich ist.

Wir nehmen nun $x > 2\,x_1$, bezeichnen mit $J(x)$ das in der jetzigen Behauptung (H) auftretende Integral und zerlegen es gemäß dem letzten Absatz von **27.** in $J_1 + J_2 + J_3$. Dann ergibt sich zunächst

$$|J_1| = \left| \int_0^{x_1} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} S(t)\, dt \right| < K \cdot \int_0^{x_1} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} dt$$

$$= O(\log^{k-1} x) = o(x\, p(x))$$

[vgl. die Abschätzung zu (23. 4)].

Für J_2 ergibt sich durch Teilintegration

$$J_2 = \left[\left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} S_1(t)\right]_{x_1}^{\frac{1}{2}x} + (k-1) \int_{x_1}^{\frac{1}{2}x} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-2} S_1(t)\, \frac{dt}{t}.$$

Hierin ist die eckige Klammer

$$= (\log 2)^{k-1} S_1(\tfrac{1}{2}x) - \left(\log \frac{x}{x_1}\right)^{k-1} S_1(x_1),$$

wegen (27. 1) also dem Betrage nach

$$< \varepsilon K x\, |p(x)| + O(\log^{k-1} x).$$

Sie ist also $= o(xp(x))$. Der andere Summand ist dem Betrage nach

$$< \varepsilon K \int_0^{\frac{1}{2}x} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-2} |p(t)|\, dt = \varepsilon K x \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\log \frac{1}{t}\right)^{k-2} |p(xt)|\, dt.$$

Das letzte Integral ist aber nach **21.** [vgl. hierzu den Beweis von (22. 3)] asymptotisch gleich einem festen Vielfachen von $|p(x)|$, dieser Summand also weiter für alle hinreichend großen x

$$< \varepsilon K x\, |p(x)|,$$

ist also wiederum $= o(xp(x))$.

Für J_3 schreiben wir

$$J_3 = \int_{\frac{1}{2}x}^{x} (x-t)^{k-1} \left(\frac{\log x - \log t}{x-t}\right)^{k-1} S(t)\, dt.$$

Nun wächst die (positive) Funktion $\left(\frac{\log x - \log t}{x-t}\right)^{k-1}$, wenn t von 1 bis x läuft, monoton und hat für $t \to x$ den Grenzwert x^{1-k}. Nach dem zweiten Mittelwertsatz ist also

$$J_3 = x^{1-k} \int_{\xi}^{x} (x-t)^{k-1} S(t)\, dt \quad \text{mit} \quad \tfrac{1}{2}x \leqq \xi \leqq x.$$

Setzt man $\int_{\xi}^{x} = \int_0^x - \int_0^{\xi}$, so lehrt nun der Rieszsche Mittelwertsatz (25. 1), daß

$$|J_3| \leqq x^{1-k} \cdot 2\,\Gamma(k) \max_{0 \leqq t \leqq x} |S_k(t)| \tag{28. 2}$$

ist mit $S_k(t)$ aus (C).

In $0 \leqq t \leqq x_1$ ist $|S_k(t)|$ beschränkt, etwa $\leqq K_1$. Weiter ist nach (28. 1)

$$\max_{x_1 \leqq t \leqq x} |S_k(t)| \leqq \varepsilon \cdot \max_{x_1 \leqq t \leqq x} t^k\, |p(t)|.$$

Die Funktion $q_2(t) = t^k\, |p(t)|$, ($t \geqq x_1$; in $0 \leqq t \leqq x_1$ sei etwa $q_2(t) \equiv q_2(x_1)$), ist aber (nach **12.** und **14.**) regulär wachsend mit dem reziproken Index $\beta_2 = k + \beta$. Da wir jetzt $\beta \geqq 1$ vorausgesetzt haben, ist $\beta_2 > 1$. Die Funktion

$$Q_2(x) = \max_{0 \leqq t \leqq x} q_2(t),$$

die, weil $q_2(t) \to \infty$ strebt, für alle hinreichend großen x mit $\max_{x_1 \leqq t \leqq x} q_2(t)$ übereinstimmt, ist nach **20.** wiederum regulär wachsend mit dem reziproken Index β_2, aber zugleich monoton wachsend, und es strebt $Q_2(x)/q_2(x) \to 1$. Daher ist

$$\max_{x_1 \leqq t \leqq x} |S_k(t)| = o(Q_2(x)) = o(q_2(x)) = o(x^k\, p(x)).$$

Wegen $x^k\,|\,p(x)| \to \infty$ ist auch das in (28. 2) auftretende Max $= o\,(x^k p(x))$. Daher ist J_3 und also $J = o\,(x\,p(x))$, wie behauptet.

29. *Schluß von* (C) *auf* (H) *für* $0 < k \leqq 1$ *und* $0 < \Re(b) = \beta < 1$. Um das eben gewonnene Ergebnis auf den Fall $0 < \beta < 1$ zu übertragen, bedarf es zweier Hilfssätze:

A. *Es sei* $k > 0$ *und* $s(t)$ *irgendeine zugelassene Funktion. Aus*

$$\int_0^x (x-t)^{k-1}\, s(t)\, dt = o\,(x^k\, p(x)) \tag{29. 1}$$

folgt dann

$$\int_0^x (x-t)^{k-1}\, t s(t)\, dt = o\,(x^{k+1}\, p(x)) \tag{29. 2}$$

und umgekehrt. Und entsprechend

B. *Aus*

$$\int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} s(t)\, dt = o\,(x\, p(x)) \tag{29. 3}$$

folgt, falls $0 < k \leqq 1$,

$$\int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} t\, s(t)\, dt = o\,(x^2\, p(x)) \tag{29. 4}$$

und umgekehrt[25]).

Nehmen wir diese Sätze für den Augenblick als bewiesen an, so ergibt sich der in der Überschrift genannte Schluß nun ganz einfach: Aus (C) und $0 < \beta < 1$ folgt nach A., wenn $t\,S(t) = \bar{S}(t)$ und $t\,p(t) = \bar{p}(t)$ gesetzt wird,

$$(\bar{C}) \qquad \int_0^x (x-t)^{k-1}\, \bar{S}(t)\, dt = o\,(x^k\, \bar{p}(x)).$$

Da aber für $|\bar{p}(x)|$ der reziproke Index $\bar{\beta} = \beta + 1 > 1$ ist, so folgt hieraus nach 28.

$$(\bar{H}) \qquad \int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} \bar{S}(t)\, dt = o\,(x\, \bar{p}(x)) = o\,(x^2\, p(x))$$

und hieraus nach B. die Behauptung (H).

---

[25]) Zu diesen Hilfssätzen vgl. den ähnlichen, bezüglich der Vergleichsfunktionen aber spezielleren Grenzwertsatz 1, den ich für Zahlenfolgen in der Arbeit „Zur Theorie der C- und H-Summierbarkeit", Math. Zeitschr. 19 (1923), S. 97—113, bewiesen habe.

Beweis von A. I. Wegen $t = x - (x-t)$ ist

$$(29.5)\quad \int_0^x (x-t)^{k-1} t\, s(t)\, dt = x\int_0^x (x-t)^{k-1} s(t)\, dt - \int_0^x (x-t)^k s(t)\, dt = J_1(x) + J_2(x).$$

Nach der Voraussetzung (29. 1) ist $J_1(x) = o(x^{k+1} p(x))$ und nach dem erweiterten Permanenzsatz auch $J_2 = o(x^{k+1} p(x))$, was (29. 2) beweist.

II. Mit $C_k(x; s(t)) = C_k(x)$ bedeutet (29. 2) gemäß (29. 5)

$$\frac{x^{k+1}}{k} C_k(x) - \int_0^x t^k C_k(t)\, dt = o(x^{k+1} p(x))$$

[hier wurde links $S_{k+1} = S_1(S_k)$ benutzt!] oder

$$\overline{C}(x) = C_k(x) - \frac{k}{x^{k+1}} \int_0^x t^k C_k(t)\, dt = o(p(x)).$$

Nach Äq. I, (6. 4) und (6. 5) besitzt aber die hier in der Mitte stehende Operation, die $C_k(t)$ in $\overline{C}(x)$ überführt, eine Inverse, und zwar ist umgekehrt

$$C_k(x) = \overline{C}(x) + \frac{k}{x} \int_0^x \overline{C}(t)\, dt.$$

Wegen $\overline{C}(t) = o(p(t))$ ist also auch $C_k(x) = o(p(x))$, und dies ist gleichbedeutend mit (29. 1).

Beweis von B. I. Es ist für ein ξ in $0 \leqq \xi \leqq x$

$$\int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} t\, s(t)\, dt = x \int_\xi^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} s(t)\, dt.$$

Nach dem Mittelwertsatz (25. 2) ist also

$$(29.6)\quad \left| \int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} t s(t)\, dt \right| \leqq 2\,\Gamma(k)\, x \cdot \operatorname*{Max}_{0 \leqq t \leqq x} |t\, H_k(t)|.$$

Im Anschluß an (27. 3) wurde aber auf Grund einer der jetzigen Annahme (29. 3) entsprechenden Voraussetzung gezeigt, daß das hier auftretende $\operatorname{Max} = o(x\, p(x))$ ist. Also gilt (29. 4).

II. Mit $t\,s(t) = \bar{s}(t)$ lautet die nunmehrige Voraussetzung (29. 4)

$$\int_0^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1} \bar{s}(t)\,dt = o\left(x^2\,p(x)\right) \tag{29. 7}$$

und die Behauptung (29. 3)

$$\int_0^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1} \bar{s}(t)\,\frac{dt}{t} = o\left(x\,p(x)\right) \tag{29. 8}$$

(doch ist dabei $\frac{1}{t}\,\bar{s}(t)$ in jeder rechten Umgebung von 0 beschränkt).

Aus (29. 7) folgt zunächst, wie am Anfang von **27.**, daß auch

$$\bar{S}_1(x) = \int_0^x \bar{s}(t)\,dt = o\left(x^2\,p(x)\right)$$

ist. Nach Wahl von $\varepsilon > 0$ kann also x_1 so bestimmt werden, daß für $t \geqq x_1$

$$|\bar{S}_1(t)| < \varepsilon\,t^2\,|p(t)| \tag{29. 9}$$

ist. Dies x_1 sei zugleich so groß, daß für $t \geqq x_1$ auch

$$|t\,H_k(t; \bar{s}(u))| < \varepsilon\,t^2\,|p(t)| \tag{29. 10}$$

ausfällt, was nach (29. 7) erreicht werden kann. Wir nehmen dann $x > 2\,x_1$ und zerlegen das Integral J der Behauptung (29. 8) wieder gemäß dem letzten Absatz von **27.** in $J_1 + J_2 + J_3$. Wörtlich wie in **28.** ergibt sich sofort $J_1 = o\left(x\,p(x)\right)$ und sehr ähnlich wie dort durch Teilintegration

$$J_2 = \left[\left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1}\frac{\bar{S}_1(t)}{t}\right]_{x_1}^{\frac{1}{2}x} + \int_{x_1}^{\frac{1}{2}x}\left\{(k-1)\left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-2} + \left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1}\right\}\frac{\bar{S}_1(t)}{t^2}\,dt,$$

auf Grund von (29. 9) und **21.** also

$$= o\left(x\,p(x)\right) + O\left(\log^{k-1}x\right) + o\left(x\,p(x)\right) = o\left(x\,p(x)\right).$$

Schließlich ist nach dem zweiten Mittelwertsatz für ein ξ in $\frac{1}{2}\,x \leqq \xi \leqq x$

$$J_3 = \frac{2}{x}\int_{\frac{1}{2}x}^{\xi}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1}\bar{s}(t)\,dt,$$

nach (25. 2) also

$$|J_3| \leqq \frac{4}{x}\,\Gamma(k)\max_{0 \leqq t \leqq x}\left|\int_0^t \left(\log\frac{t}{u}\right)^{k-1}\bar{s}(u)\,du\right|.$$

Wegen (29. 10) ergibt sich aber, genau wie bei (27. 3), für dieses Max die Abschätzung $o(x^2 p(x))$, so daß J_3 und folglich, wie behauptet, auch $J = o(x p(x))$ ist.

Zusatz 1. Aus dem Hilfssatz A kann ein weiterer und besonders einfacher Beweis des erweiterten Äquivalenzsatzes für ganzzahliges k ($\geqq 2$) gewonnen werden: Nach **26.** behauptet der Satz, daß jede der dortigen Beziehungen (C) und (H), für die auch

$$(C) \qquad C_k(x; S(t)) = o(p(x)); \qquad (H) \qquad H_k(x; S(t)) = o(p(x))$$

geschrieben werden kann, aus der andern folgt. Wegen $S_k = S_{k-1}(S_1)$ ist nun (C) gleichbedeutend mit

$$\int_0^x (x-t)^{k-2} S_1(t)\, dt = \int_0^x (x-t)^{k-2}\, t\, H_1(t)\, dt = o(x^k p(x)).$$

Aus (C) folgt also nach Hilfssatz A die Beziehung

$$\int_0^x (x-t)^{k-2} H_1(t)\, dt = o(x^{k-1} p(x))$$

und umgekehrt. Ebenso aus dieser die Beziehung

$$\int_0^x (x-t)^{k-3} H_2(t)\, dt = o(x^{k-2} p(x))$$

und umgekehrt. Aus (C) folgt also schließlich

$$\int_0^x H_{k-1}(t)\, dt = o(x p(x)),$$

d. h.

$$(H) \qquad H_k(x) = o(p(x))$$

und umgekehrt.

Zusatz 2. Mit wenig mehr Mühe läßt sich zeigen, daß (29. 2) in Hilfssatz A durch

$$(29.\,2') \qquad \int_0^x (x-t)^{k-1}\, t^\varrho\, s(t)\, dt = o(x^{k+\varrho} p(x))$$

und (29. 4) in Hilfssatz B durch

$$(29.\,4') \qquad \int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} t^\varrho\, s(t)\, dt = o(x^{1+\varrho} p(x))$$

($\varrho > 0$, beliebig) ersetzt werden kann und daß in B die Beschränkung bezüglich $k\,(>0)$ fortgelassen werden kann.

30. Die Ordnungen > 1. Um den Satz für die Ordnungen > 1 zu beweisen, genügt es, die Ordnungen $r + k$ mit ganzzahligem $r \geqq 1$ und $0 < k \leqq 1$ zu betrachten und zu zeigen, daß jede der beiden Beziehungen

$$(C') \qquad \int_0^x (x-t)^{r+k-1} S(t)\, dt = o\left(x^{r+k} p(x)\right)$$

und

$$(H') \qquad \int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{r+k-1} S(t)\, dt = o\left(x\, p(x)\right)$$

aus der anderen folgt.

31. Schluß von (C') auf (H'). Durch r-malige Teilintegration erhält das Integral in $(H)'$ die Form

$$\int_0^x S_r(t)\, D^r \left(\log \frac{x}{t}\right)^{r+k-1} dt.$$

Dabei soll $S_r(t)$ das r-mal wiederholte Integral von $S(t)$ und D^r das gewöhnliche Symbol für die r-malige Differentiation nach t bedeuten. Mit gewissen Zahlenwerten c_ϱ ist nun

$$D^r \left(\log \frac{x}{t}\right)^{r+k-1} = \frac{1}{t^r} \sum_{\varrho=1}^{r} c_\varrho \left(\log \frac{x}{t}\right)^{r-\varrho+k-1}.$$

Die Behauptung (H') geht also über in

$$(31.1) \qquad \sum_{\varrho=1}^{r} c_\varrho \int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{r-\varrho+k-1} S_r(t) \frac{dt}{t^r} = o\left(x\, p(x)\right).$$

Ist nun $\varrho < r$, so erhält man für das ϱ-te Integral in dieser Summe durch nochmalige Teilintegration zwei Integrale der Form

$$\int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{r-\varrho+k-1} S_{r+1}(t) \frac{dt}{t^{r+1}}$$

mit $1 \leqq \varrho \leqq r$. Nach dem erweiterten Permanenzsatz **24.** folgt aber aus der jetzigen Voraussetzung, d. h. aus $C_{r+k}(x) = o\left(p(x)\right)$, daß auch $C_{r+1} = o\left(p(x)\right)$, also $S_{r+1}(t) = o\left(t^{r+1} p(t)\right)$ ist. Nach **23.** sind also alle diese Integrale $= o\left(x\, p(x)\right)$.

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß das in (31.1) für $\varrho = r$ auftretende Integral

$$(31.2) \qquad \int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} \frac{S_r(t)}{t^r} dt = o\left(x p(x)\right)$$

ist. Aus der Voraussetzung (C'), d. h. aus $S_k(S_r) = o(x^k \cdot x^r p(x))$ folgt wegen $0 < k \leqq 1$ nach **28.** [es ist hierbei $x^r p(x)$ als Vergleichsfunktion zu nehmen] zunächst, daß

$$\int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} S_r(t)\, dt = o(x^{r+1}\, p(x))$$

ist, und hieraus durch r-malige Anwendung des Hilfssatzes B sofort die Beziehung (31. 2), denn $t^{-r} S_r(t)$ ist eine Funktion aus $\mathfrak{S}$, da sie für $t > 0$ sogar stetig ist und für $t \to +0$ beschränkt bleibt.

32. *Schluß von* (H') *auf* (C'). Die r-malige Teilintegration des Integrals in (C') bringt es auf die Form

$$\int_0^x H_r(t)\, D_r(x-t)^{r+k-1}\, dt,$$

wenn $D_r\, \varphi(t)$ durch $D_0\, \varphi(t) = \varphi(t)$, $D_r\, \varphi(t) = t\, \frac{d}{dt}\, D_{r-1}\, \varphi(t)$ erklärt wird.

Mit gewissen Zahlenwerten d_ϱ ist aber

$$D_r(x-t)^{r+k-1} = \sum_{\varrho=1}^{r} d_\varrho\, t^\varrho\, (x-t)^{r-\varrho+k-1}$$

und die Behauptung (C') geht somit über in

$$\text{(32. 1)} \qquad \sum_{\varrho=1}^{r} d_\varrho \int_0^x H_r(t)\, t^\varrho (x-t)^{r-\varrho+k-1} dt = o(x^{r+k} p(x)).$$

Ist $\varrho < r$, so liefert das ϱ-te Integral in dieser Summe durch nochmalige Teilintegration je zwei Integrale der Form

$$\int_0^x H_{r+1}(t)\, t^\varrho (x-t)^{r-\varrho+k-1}\, dt$$

mit $1 \leqq \varrho \leqq r$. Nach dem erweiterten Permanenzsatz **24.** folgt aber aus der Voraussetzung (H'), d. h. $H_{r+k}(x) = o(p(x))$, daß auch $H_{r+1}(x) = o(p(x))$ ist. Nach (23. 1) sind also alle diese Integrale $= o(x^{r+k} p(x))$.

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß auch das in (32. 1) für $\varrho = r$ auftretende Integral

$$\text{(32. 2)} \qquad \int_0^x (x-t)^{k-1}\, t^r\, H_r(t)\, dt = o(x^{r+k} p(x))$$

ist. Aus der Voraussetzung (H'), d. h. aus $H_k(H_r) = o(p(x))$ folgt aber wegen $0 < k \leqq 1$ nach **27.**, daß

$$\int_0^x (x-t)^{k-1} H_r(t)\, dt = o(x^k p(x))$$

ist, und hieraus (32. 2) durch r-malige Anwendung des Hilfssatzes A in **29.** Damit ist der Beweis vollendet.

V. Die Abel-Laplaceschen Mittelbildungen.

33. Der ursprüngliche Hölдersche Satz besagt, daß aus der H_k-Limitierbarkeit einer Folge (s_ν) ihre A-Limitierbarkeit zum gleichen Werte folgt. I. Schur [3] hatte für positive regulär wachsende Vergleichsfolgen (p_n) und ganzzahlige Ordnung k schon gezeigt, daß auch das asymptotische Verhalten der H_k-Mittel sich auf das der A-Mittel überträgt. Die im vorangehenden entwickelten Methoden setzen uns instand, einen entsprechenden Satz für Funktionen $s(t)$, beliebige reelle Ordnung $k > 0$ und beliebige regulär wachsende Vergleichsfunktionen $p(x)$ zu beweisen. Der Satz lautet:

Für eine zugelassene Funktion $s(t)$, für ein $k > 0$ und ein regulär wachsendes $p(x)$ mit einem Index $a = \frac{1}{b} \neq 0$ strebe

$$\text{(33. 1)} \qquad \frac{H_k(x; s(t))}{p(x)} \to s \quad \text{oder} \quad \frac{C_k(x; s(t))}{p(x)} \to \frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(b)}{a^k\,\Gamma(k+b)}\, s$$

(so daß nach dem erweiterten Äquivalenzsatz beide Beziehungen gelten). Dann ist die A-Transformation von $s(t)$

$$A(x; s(t)) = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{x}} s(t)\, dt$$

für $x > 0$ vorhanden, und es strebt

$$\text{(33. 2)} \qquad \frac{A(x; s(t))}{p(x)} \to \frac{\Gamma(b)}{a^k}\, s.$$

Den Sätzen in **21.**, **22.** und **23.** entsprechend, beweisen wir zunächst die folgenden beiden Hilfssätze:

34. *Ist $p(x)$ regulär wachsend mit dem Index $a = \frac{1}{b} \neq 0$, so ist die A-Transformation von $p(x)$*

$$A(x; p(t)) = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{x}} p(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-t} p(x\,t)\, dt$$

für $x > 0$ konvergent, und es gilt die Beziehung

$$\text{(34. 1)} \qquad A(x; p(t)) \simeq \Gamma(b)\, p(x).$$

Beweis. Nach (9.1) gilt $p(x) = O(x^m)$ für ein geeignetes m; daher steht die Konvergenz der Integrale für $x > 0$ außer Frage. Wir betrachten nun für ein $\varepsilon > 0$ erstlich den Ausdruck

$$J_1(x) = \left|\frac{1}{p(x)}\int_0^{\varepsilon} e^{-t}\,p(xt)\,dt\right| \leqq \frac{1}{|p(x)|}\int_0^{\varepsilon}|p(xt)|\,dt = \frac{1}{x\,|p(x)|}\int_0^{\varepsilon x}|p(t)|\,dt$$

$$= \varepsilon\left|\frac{p(\varepsilon x)}{p(x)}\right|\frac{1}{\varepsilon x\,|p(\varepsilon x)|}\int_0^{\varepsilon x}|p(t)|\,dt \leqq \varepsilon\left|\frac{p(\varepsilon x)}{p(x)}\right| M.$$

Der letzte Ausdruck strebt $\to M\varepsilon^{\beta}$, so daß für alle $x > x_1(\varepsilon)$

$$J_1(x) < 2M\varepsilon^{\beta} \tag{34.2}$$

ist. Das ε denken wir uns so klein, daß mit $\omega = \frac{1}{\varepsilon}$

$$t^{\beta-1} < e^{\frac{1}{2}t} \text{ für } t \geqq \omega \quad \text{und} \quad \int_{\omega}^{\infty} e^{-t}\,t^{\mu}\,dt < 2\,e^{-\omega}\,\omega^{\mu} < \varepsilon \tag{34.3}$$

ist, wenn μ den gleich nachher genannten, nur von β abhängigen Wert hat. Eine solche Wahl von ε ist offenbar möglich, da [vgl. (23.5)] das letzte Integral $= e^{-\omega}\,\omega^{\mu}\left\{1 + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right\}$ ist. Nun betrachten wir zweitens den Ausdruck

$$J_2(x) = \left|\frac{1}{p(x)}\int_{\omega}^{\infty} e^{-t}\,p(xt)\,dt.\right.$$

Es ist

$$J_2(x) \leqq \frac{x^{\mu}}{|p(x)|}\int_{\omega}^{\infty} e^{-t}\,t^{\mu}\left|\frac{p(xt)}{(xt)^{\mu}}\right|dt.$$

Hierin wählen wir μ so, daß $t^{-\mu}\,|p(t)|$ regulär wächst und einer reziproken Index $\beta' < 1$ hat. Es genügt dazu, wenn wir etwa

$$\mu = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 < \beta < 1 \text{ ist.} \\ \beta - \frac{1}{2}, & \text{falls } \beta \geqq 1 \text{ ist,} \end{cases}$$

setzen. Denn dann ist $\beta' = \beta - \mu$, d. h. $= \beta$ oder $= \frac{1}{2}$, je nachdem $\beta < 1$ oder $\geqq 1$ ist, also jedenfalls $\beta' < 1$. Daher ist nach **20.** die Funktion

$$q(x) = \operatorname*{Max}_{t \geqq x}\left|\frac{p(t)}{t^{\mu}}\right|$$

regulär wachsend mit dem reziproken Index β' und überdies monoton fallend. Also ist

$$J_2(x) \leqq \frac{q(x)}{\left|\frac{p(x)}{x^{\mu}}\right|}\cdot\frac{q(\omega x)}{q(x)}\int_{\omega}^{\infty} e^{-t}\,t^{\mu}\,dt.$$

Der erste Faktor rechts strebt (nach **20.**) gegen 1, der zweite $\to \omega^{\beta'-1}$. Für alle $x > x_2(\varepsilon)$ ist also

$$J_2(x) < 2\,\omega^{\beta'-1}\int_{\omega}^{\infty} e^{-t}\,t^{\mu}\,dt < 4\,e^{-\omega}\,\omega^{\beta-1}.$$

Wegen $\beta - 1 < \mu$ ist dies wiederum $< 2\,\varepsilon$.

Ganz ähnlich hat man

$$J_3(x) = \left|\int_0^{\varepsilon} e^{-t}\,t^{b-1}\,dt\right| \leqq \int_0^{\varepsilon} t^{\beta-1}\,dt = \frac{1}{\beta}\,\varepsilon^{\beta}$$

und nach (34. 3)

$$J_4(x) = \left|\int_{\omega}^{\infty} e^{-t}\,t^{b-1}\,dt\right| < \int_{\omega}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t}\,dt = 2\,e^{-\frac{1}{2}\omega}.$$

Hiernach ist

$$\frac{1}{p(x)}\int_0^{\infty} e^{-t}\,p(x\,t)\,dt - \int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{b-1}\,dt = \int_{\varepsilon}^{\omega} e^{-t}\left[\frac{p(x\,t)}{p(x)} - t^{b-1}\right]dt + \eta(x,)$$

mit einem $\eta(x)$, dessen Betrag für $x > \mathrm{Max}\,(x_1, x_2)$ unter der Summe der vier für J_1, J_2, J_3, J_4 gefundenen Schranken bleibt. Für $x > x_3(\varepsilon)$ ist auch (vgl. den Beweis von **21.**) der Wert des neuen Integrals $< \varepsilon$. Für alle hinreichend großen x ist also die linke, von ε unabhängige Seite dem Betrage nach kleiner als ein Wert, der mit ε beliebig klein gemacht werden kann. Etwas allgemeiner gilt:

35. *Aus* $s(t) \simeq g \cdot p(t)$ *folgt*

$$(35.\,1)\cdot \qquad A\{x; s(t)\}\,dt = \frac{1}{x}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{x}}\,s(t)\,dt \simeq \Gamma(b)\,g \cdot p(x).$$

Beweis. Setzen wir $s(t) = (g + \varepsilon(t))\,p(t)$, $\varepsilon(t) \to 0$, so ist

$$A(x; s(t)) = g\,A(x; p(t)) + A(x; \varepsilon(t)\,p(t)).$$

Nach **34.** genügt es also zu zeigen, daß der zweite Summand rechts $= o(p(x))$ ist. Ist aber $|\varepsilon(t)| < \varepsilon$ für $t \geqq x_0(\varepsilon)$, so ist

$$|A(x; \varepsilon(t)\,p(t))| \leqq \frac{K}{x}\int_0^{x_0} e^{-\frac{t}{x}}\,dt + \varepsilon \cdot \frac{1}{x}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{x}}\,|p(t)|\,dt.$$

Der erste Summand rechts ist offenbar $O\left(\frac{1}{x}\right) = O\left(\frac{p(x)}{x\,p(x)}\right) = o(p(x))$, der zweite, da nach **34.** das Integral in ihm $\simeq \Gamma(\beta)\,|p(x)|$ ist, kleiner als $\varepsilon K\,|p(x)|$, womit die Behauptung schon bewiesen ist. [Im Falle $g = 0$ ist

natürlich die rechte Seite der Voraussetzung durch $o(p(t))$, die der Behauptung durch $o(p(x))$ zu ersetzen.]

36. ***Beweis des Satzes in* 33.** Wir nehmen die Konvergenz der auftretenden Integrale (für $x > 0$), die sich sogleich von selbst ergeben wird, zunächst an. Nach (22. 3) ist $H_k(x; p(t)) \cong a^k p(x)$. Also ist die Voraussetzung (33. 1) gleichbedeutend mit

$$(H) \qquad H_k(x; S(t)) = o(p(x))$$

mit

$$(36.\,1) \qquad S(t) = s(t) - \frac{s}{a^k}\, p(t).$$

Nach (34. 1) ergibt sich ebenso, daß die Behauptung (33. 2) gleichbedeutend ist mit

$$(A) \qquad A(x; S(t)) = o(p(x))$$

mit derselben Funktion $S(t)$ aus (36. 1). Es braucht also nur (A) aus (H) gefolgert zu werden. Nach dem erweiterten Äquivalenzsatz ist aber (H) gleichbedeutend mit

$$(C) \qquad C_k(x; S(t)) = o(p(x)),$$

und nach Äq. I, § 7, ist

$$(36.\,2) \qquad A(x; S(t)) = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{x}}\, t^k\, C_k(t; S(u))\, dt.$$

Wegen (C) und $p(x) = O(x^m)$ ist das rechts stehende Integral für $x > 0$ sicher konvergent, und da (36. 2) sich durch eine erlaubte Vertauschung zweier Integrationen unmittelbar nachprüfen läßt (s. Äq. I, S. 261 und 241/3), so ist $A(x; S(t))$ und folglich auch $A(x; s(t))$ für $x > 0$ konvergent. Nach (C) ist nun weiter $t^k C_k(t; S(u)) = o(t^k p(t))$. Nach dem Satz in **35.**, bei dem man $p(t)$ durch $t^k p(t)$ zu ersetzen hat, folgt also

$$A(x; S(t)) = o\left(\frac{1}{x^k} \cdot x^k p(x)\right) = o(p(x)),$$

wie behauptet.

(Eingegangen am 1. Dezember 1942.)

Bemerkungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Herrn F. Pfeiffer zum 60. Geburtstag gewidmet.

Von

E. Kamke in Tübingen.

Es handelt sich hier im Bereich reeller Veränderlicher um eine einzige partielle Differentialgleichung erster Ordnung und um Systeme von solchen für eine gesuchte Funktion, ferner um die entsprechenden linearen Differentialgleichungen[1]). In methodischer Hinsicht wird insofern kaum etwas Neues gebracht, als die Grundgedanken der Beweise schon lange zum klassisch gewordenen Bestand der Theorie der partiellen Differentialgleichungen gehören. Dagegen dürfte die Durchführung im einzelnen doch mancherlei Neues enthalten. Es werden Existenzbereiche wirklich angegeben[2]), wobei es mir jedoch weniger auf möglichst genaue als auf leicht angebbare Bereiche ankommt, in denen die Lösung zugleich eindeutig bestimmt ist. Ferner werden auch Aussagen über mehrmalige Differenzierbarkeit der Lösungen und ihre Abhängigkeit von Parametern gemacht. Solche Aussagen braucht man bei der Zurückführung von Systemen von Differentialgleichungen auf eine einzige Differentialgleichung sowie bei dem Nachweis der Existenz vollständiger Integrale. Schließlich wird die Gelegenheit benutzt, einige Irrtümer zu berichtigen, die sich in der Literatur finden. Für nähere Angaben zu all diesem sei auf die einzelnen Abschnitte verwiesen, insbesondere auf die Fußnoten.

§ 1.

Existenz- und Eindeutigkeitssatz für eine Differentialgleichung.

Es handelt sich hier um die Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y_1, \ldots, y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y_n}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m\right)$$

oder in abgekürzter Schreibweise

$$p = f(x, \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q}, \lambda), \tag{1}$$

---

[1]) Nicht quasilineare, wohl aber allgemeine lineare (auch unhomogene) Differentialgleichungen.

[2]) Für *eine* partielle Differentialgleichung hat das schon Herr Ważewski getan.

wo

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q_\nu = \frac{\partial z}{\partial y_\nu}$$

ist und $\mathfrak{y}$ für $y_1, \ldots, y_n$ geschrieben ist, $\mathfrak{q}$ für $q_1, \ldots, q_n$ und λ für $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$; die λ_μ sind Parameter.

Satz 1. Voraussetzung. *Für fest gegebenes ξ existieren in dem Bereich*

$$|x - \xi| \leqq a; \quad \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q} \text{ beliebig}; \quad \Lambda_\mu \leqq \lambda_\mu \leqq \Lambda_\mu^* \text{ [3]} \tag{2}$$

die partiellen Ableitungen f_{y_ν}, f_z, f_{q_ν} und sind nebst der Funktion $f(x, \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q}, \lambda)$ *selber k-mal stetig differenzierbar ($k \geqq 1$) nach allen $2n + m + 2$ Argumenten x, $y_\varkappa$, z, $q_\varkappa$, $\lambda_\varkappa$. Ferner ist für $\mu, \nu = 1, \ldots, n$*

$$\left\{\begin{matrix} |f_z|, \ |f_{y_\nu}|, \ |f_z|, \ |f_{q_\nu}| \\ |f_{y_\mu y_\nu}|, \ |f_{y_\mu z}|, \ |f_{y_\mu q_\nu}|, \ |f_{zz}|, \ |f_{z q_\nu}|, \ |f_{q_\mu q_\nu}| \end{matrix}\right\} \leqq A. \tag{3}$$

In dem Bereich

$$\mathfrak{y} \text{ beliebig}, \quad \Lambda_\mu \leqq \lambda_\mu \leqq \Lambda_\mu^* \text{ [3]}$$

existieren für die gegebene Funktion $\omega(\mathfrak{y}, \lambda)$ die partiellen Ableitungen ω_{y_ν} und sind nebst ω selber k-mal stetig differenzierbar nach den $y_\varkappa$ und $\lambda_\varkappa$; ferner ist

$$|\omega_{y_\mu}| + \sum_{\nu=1}^{n} |\omega_{y_\mu y_\nu}| \leqq B \qquad (\mu = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Schließlich sei

$$0 < \beta < \frac{1}{A} \log\left(1 + \frac{\log 3}{2n(B+1)}\right) \quad \text{und} \quad \alpha = \operatorname{Min}(a, \beta). \tag{5}$$

Behauptung. *Bei gegebenen λ hat die Differentialgleichung* (1) *in dem Bereich*

$$|x - \xi| \leqq \alpha; \quad \mathfrak{y} \text{ beliebig}$$

genau ein zweimal stetig differenzierbares Integral

$$z = \psi(x, \mathfrak{y}, \lambda),$$

das für $x = \xi$ die Werte

$$\psi(\xi, \mathfrak{y}, \lambda) = \omega(\mathfrak{y}, \lambda) \tag{6}$$

annimmt. Die Funktion $\psi(x, \mathfrak{y}, \lambda)$ ist nebst den Ableitungen ψ_x und ψ_{y_ν} in dem Bereich

$$|x - \xi| \leqq \alpha, \quad \mathfrak{y} \text{ beliebig}, \quad \Lambda_\mu \leqq \lambda_\mu \leqq \Lambda_\mu^* \tag{7}$$

k-mal stetig differenzierbar nach allen ihren $n + m + 1$ Argumenten x, $y_\varkappa$, $\lambda_\varkappa$ [4].

---

[3]) Diese abgeschlossenen Intervalle können auch durch halboffene oder offene Intervalle oder durch eine beliebige offene Punktmenge im λ-Raum ersetzt werden.

[4]) Dieser Satz ist im wesentlichen von Herrn WAŻEWSKI aufgestellt [Annales de la Société Polonaise Mathématique 13 (1935), S. 1–9]. Neu ist nur die Formulierung

Zusatz 1. Es kann

$$\beta = \frac{1}{3nA(B+1)}, \quad \text{also } \alpha = \text{Min}\left(a, \frac{1}{3nA(B+1)}\right)$$

gewählt werden.

Denn nach (5) ist

$$\frac{1}{3n(B+1)} < \log\left(1 + \frac{\log 3}{2n(B+1)}\right), \quad \text{d. h. } \exp\frac{1}{3n(B+1)} - 1 < \frac{\log 3}{2n(B+1)}$$

zu beweisen. Für $0 \leqq u \leqq \frac{1}{3}$ ist

$$e^u = 1 + u\left(1 + \frac{u}{2!} + \frac{u^2}{3!} + \cdots\right)$$
$$\leqq 1 + u\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \cdots\right) = 1 + \frac{6}{5}u.$$

Daher ist in der Tat

$$\exp\frac{1}{3n(B+1)} - 1 \leqq \frac{2}{5n(B+1)} < \frac{\log 3}{2n(B+1)}.$$

Zusatz 2. In Satz 1 können die Ungleichungen $|x - \xi| \leqq a$, $|x - \xi| \leqq \alpha$ auch durch $|x - \xi| < a$, $|x - \xi| < \alpha$ ersetzt werden.

Denn bei gegebenem a ist der Satz dann in der ursprünglichen Fassung richtig, wenn a durch eine beliebige Zahl $a_1 < a$ ersetzt wird. Wegen der eindeutigen Bestimmtheit des Integrals folgt daraus der Zusatz 2.

Beweis des Satzes. **(a)** *Die Charakteristiken und ihr Existenzbereich.* Die charakteristischen Gleichungen der Differentialgleichung (1) sind

$$(8) \quad \begin{cases} y_\nu'(x) = -f_{q_\nu} & (\nu = 1, \ldots, n) \\ z'(x) = f - \sum_{\varkappa=1}^{n} q_\varkappa f_{q_\varkappa}, \\ q_\nu'(x) = f_{y_\nu} + q_\nu f_z & (\nu = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Nach der Voraussetzung sind die rechten Seiten k-mal stetig differenzierbar nach $x, y_\mu, z, q_\mu, \lambda_\mu$. Daher gibt es für ein beliebiges ξ^* innerhalb der Grenzen

---

der Aussagen über mehrfache Differenzierbarkeit des Integrals und seine Abhängigkeit von den Parametern sowie die Ungleichung (5), die bei WAŻEWSKI in weniger durchsichtiger Form auftritt; ihm ist anscheinend — vgl. a. a. O., S. 9 — die Umformung in die einfachere Gestalt (5) entgangen. Für den Beweis zieht Herr WAŻEWSKI einen Abbildungssatz von HADAMARD heran. Das, was man davon braucht, läßt sich hier jedoch leichter auch unmittelbar herleiten. Es entsteht dann ein Beweis, der wie der nachfolgende eine unmittelbare Ausdehnung des von KAMKE [Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1930, S. 352ff.] für $n = 1$ gegebenen auf den Fall eines beliebigen n ist. Es erschien mir angebracht, nicht nur die einzelnen Abänderungen zu dem Beweis WAŻEWSKIs anzugeben, sondern den Beweis im Zusammenhang darzustellen.

Für einen Existenzbeweis für eine endliche Doppelpyramide s. WAŻEWSKI, a. a. O. 14 (1936), S. 149–177.

$|\xi^* - \xi| \leqq a$ und für ein beliebiges Zahlensystem $\mathfrak{y}^*$, z^*, $\mathfrak{q}^*$, λ genau eine Integralkurve des Systems (8), die durch den Punkt ξ^*, $\mathfrak{y}^*$, z^*, $\mathfrak{q}^*$ geht; diese sei

$$(9)\qquad \begin{cases} y_\nu = y^\nu(x, \xi^*, \mathfrak{y}^*, z^*, \mathfrak{q}^*, \lambda) & (\nu = 1, \ldots, n), \\ z = z(x, \xi^*, \mathfrak{y}^*, z^*, \mathfrak{q}^*, \lambda), & \\ q_\nu = q^\nu(x, \xi^*, \mathfrak{y}^*, z^*, \mathfrak{q}^*, \lambda) & (\nu = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Diese Funktionen, die sogenannten charakteristischen Funktionen des Systems (8), haben an jeder Stelle ihres Existenzbereichs stetige partielle Ableitungen bis zur k-ten Ordnung einschl. nach allen $2n + m + 3$ Argumenten x, ξ^*, $y_\varkappa^*$, z^*, $q_\varkappa^*$, $\lambda_\varkappa$[5]).

Es wird behauptet, daß die Funktionen (9) in dem Bereich

$$(10)\qquad |x - \xi| \leqq a,\ |\xi^* - \xi| \leqq a;\ \mathfrak{y}^*, z^*, \mathfrak{q}^* \text{ beliebig};\ \Lambda_\mu \leqq \lambda_\mu \leqq \Lambda_\mu^*$$

existieren.

Aus der ersten Zeile von (8) folgt nämlich wegen (3)

$$|y_\nu'(x)| \leqq A,$$

also

$$(11)\qquad |y_\nu(x) - y_\nu^*| = |y_\nu(x) - y_\nu(\xi^*)| \leqq 2aA,$$

und aus der dritten Zeile von (8)

$$|q_\nu'(x)| \leqq A|q_\nu| + A,$$

also[6])

$$(12)\qquad |q_\nu(x)| \leqq (|q_\nu(\xi^*)| + 1)\, e^{A|x-\xi^*|} - 1$$

und somit

$$(13)\qquad |q_\nu(x)| < (|q_\nu^*| + 1)\, e^{2aA}.$$

Es bleibt noch $z(x)$ abzuschätzen. Nach dem Mittelwertsatz ist wegen (3), (11) und (13)

$$\begin{aligned} |f(x, \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q}, \lambda) - f(\xi^*, 0, 0, 0, \lambda)| &\leqq |x - \xi^*| A + \sum_\nu |y_\nu| A + |z| A + \sum_\nu |q_\nu| A \\ &\leqq A|z| + C, \end{aligned}$$

wo C eine passend gewählte Konstante ist. Daher folgt aus der zweiten Zeile von (8)

$$|z'(x)| \leqq A|z| + C + A \sum_\varkappa (|q_\varkappa^*| + 1)\, e^{2aA} = A|z| + D$$

---

[5]) Vgl. dazu etwa Ka, DGlen 1930 = KAMKE, Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1930, S. 164f. Nach dem dortigen Satz 3 haben die Funktionen (9) zunächst nur stetige partielle Ableitungen bis zur k-ten Ordnung nach den $y_\varkappa^*$, z^*, $q_\varkappa^*$, $\lambda_\varkappa$, aber aus den Überlegungen zu dem dortigen Satz 4 auf S. 166 ergibt sich dann die volle obige Behauptung.

[6]) Vgl. z. B. Ka, DGlen 1930, S. 93.

und somit[6])

$$|z(x)| \leqq \left(|z^*| + \frac{D}{A}\right) e^{2aA}.$$

Für jede einzelne Charakteristik (9), soweit sie existiert, liegen also y_ν, z, q_ν unter einer festen Schranke. Da die Charakteristik bei festem λ nach beiden Seiten an den Rand des Bereiches (2) herankommen muß, existiert sie also im ganzen Intervall $|x - \xi| \leqq a$ und die Funktionen (9) somit im Bereich (10).

(b) *Die Funktionen Y^ν, Z, Q^ν; Existenzbereich und Differenzierbarkeit.* In (9) wird nun $\xi^* = \xi$ gesetzt und

$$\mathfrak{y}^* = (\eta_1, \ldots, \eta_n),\ z^* = \omega(\eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda),\ \mathfrak{q}^* = (\omega_{\eta_1}, \ldots, \omega_{\eta_n})$$

eingetragen. Ferner wird zur Abkürzung

$$(14)\quad \begin{cases} Y^\nu(x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) = y^\nu(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \omega, \omega_{\eta_1}, \ldots, \omega_{\eta_n}, \lambda), \\ Z(x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) = z(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \omega, \omega_{\eta_1}, \ldots, \omega_{\eta_n}, \lambda), \\ Q^\nu(x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) = q^\nu(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \omega, \omega_{\eta_1}, \ldots, \omega_{\eta_n}, \lambda) \end{cases}$$

gesetzt. Nach (a) existieren die linken Seiten dann für

$$|x - \xi| \leqq a;\quad \eta_1, \ldots, \eta_n \text{ beliebig};\quad \Lambda_\mu \leqq \lambda_\mu \leqq \Lambda_\mu^*$$

und sind dort k-mal stetig differenzierbar nach $x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda$ auf Grund von (a) und der Voraussetzung über ω.

Ferner ist

$$(15)\quad \begin{cases} Y^\nu_{\eta_\mu}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) = e_{\mu,\nu}, \\ Z_{\eta_\mu}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) = \omega_{\eta_\mu}, \\ Q^\nu_{\eta_\mu}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) = \omega_{\eta_\mu \eta_\nu}. \end{cases}$$

Denn[7]) die partiellen Ableitungen der charakteristischen Funktionen (9) nach den Anfangswerten y_ν^*, z^*, q_ν^* haben für $x = \xi$ die Werte

$$y^\nu_{y^*_\mu}(\xi) = e_{\mu,\nu},\quad y^\nu_{z^*}(\xi) = 0,\quad y^\nu_{q^*_\mu}(\xi) = 0,$$
$$z_{y^*_\mu}(\xi) = 0,\quad z_{z^*}(\xi) = 1,\quad z_{q^*_\mu}(\xi) = 0,$$
$$q^\nu_{y^*_\mu}(\xi) = 0,\quad q^\nu_{z^*}(\xi) = 0,\quad q^\nu_{q^*_\mu}(\xi) = e_{\mu,\nu}.$$

Daher folgt aus (14) für die in (15) auftretenden Ableitungen in der Tat

$$Y^\nu_{\eta_\mu}(\xi) = y^\nu_{y^*_\mu}(\xi) + y^\nu_{z^*}(\xi)\omega_{\eta_\mu} + \sum_\varkappa y^\nu_{q^*_\varkappa}(\xi)\omega_{\eta_\varkappa \eta_\mu} = e_{\mu,\nu},$$
$$Z_{\eta_\mu}(\xi) = z_{y^*_\mu}(\xi) + z_{z^*}(\xi)\omega_{\eta_\mu} + \sum_\varkappa z_{q^*_\varkappa}(\xi)\omega_{\eta_\varkappa \eta_\mu} = \omega_{\eta_\mu},$$
$$Q^\nu_{\eta_\mu}(\xi) = q^\nu_{y^*_\mu}(\xi) + q^\nu_{z^*}(\xi)\omega_{\eta_\mu} + \sum_\varkappa q^\nu_{q^*_\varkappa}(\xi)\omega_{\eta_\varkappa \eta_\mu} = \omega_{\eta_\mu \eta_\nu}.$$

---

[7]) Vgl. z. B. Ka, DGlen 1930, S. 155ff.

(c) *Abschätzung von*

$$U(x) = \sum_{\varkappa=1}^{n} |Y^{\varkappa}_{\eta_\mu}| + |Z_{\eta_\mu}| + \sum_{\varkappa=1}^{n} |Q^{\varkappa}_{\eta_\mu}|. \tag{16}$$

Man trage die Funktionen (14) in (8) ein und differenziere nach η_μ. Die erste Zeile von (8) liefert dann

$$Y^{\nu}_{\eta_\mu x} = -\sum_{\varkappa} f_{q_\nu y_\varkappa} Y^{\varkappa}_{\eta_\mu} - f_{q_\nu z} Z_{\eta_\mu} - \sum_{\varkappa} f_{q_\nu q_\varkappa} Q^{\varkappa}_{\eta_\mu},$$

also nach (3)

$$|Y^{\nu}_{\eta_\mu x}| \leqq A\, U(x). \tag{17}$$

Die zweite Zeile von (8) liefert

$$Z_{\eta_\mu x} = \sum_{\varkappa} f_{y_\varkappa} Y^{\varkappa}_{\eta_\mu} + f_z Z_{\eta_\mu} - \sum_{\varkappa} Q^{\varkappa} \Big(\sum_{\varrho} f_{q_\varkappa y_\varrho} Y^{\varrho}_{\eta_\mu} + f_{q_\varkappa z} Z_{\eta_\mu} + \sum_{\varrho} f_{q_\varkappa q_\varrho} Q^{\varrho}_{\eta_\mu}\Big),$$

das ist nach der Zeile vor (17)

$$Z_{\eta_\mu x} = \sum_{\varkappa} f_{y_\varkappa} Y^{\varkappa}_{\eta_\mu} + f_z Z_{\eta_\mu} + \sum_{\varkappa} Q^{\varkappa} Y^{\varkappa}_{\eta_\mu x}. \tag{18}$$

Nach (3) und (17) ist also

$$|Z_{\eta_\mu x}| \leqq A \Big(\sum_{\varkappa} |Y^{\varkappa}_{\eta_\mu}| + |Z_{\eta_\mu}|\Big) + A\,U \sum_{\varkappa} |Q^{\varkappa}|. \tag{19}$$

Schließlich liefert die dritte Zeile von (8)

$$\begin{aligned} Q^{\nu}_{\eta_\mu x} = {} & \sum_{\varkappa} f_{y_\nu y_\varkappa} Y^{\varkappa}_{\eta_\mu} + f_{y_\nu z} Z_{\eta_\mu} + \sum_{\varkappa} f_{y_\nu q_\varkappa} Q^{\varkappa}_{\eta_\mu} + \\ & + Q^{\nu}_{\eta_\mu} f_z + Q^{\nu} \Big(\sum_{\varkappa} f_{z y_\varkappa} Y^{\varkappa}_{\eta_\mu} + f_{zz} Z_{\eta_\mu} + \sum_{\varkappa} f_{z q_\varkappa} Q^{\varkappa}_{\eta_\mu}\Big). \end{aligned} \tag{20}$$

Nach (3) und (16) ist also

$$|Q^{\nu}_{\eta_\mu x}| \leqq A\,U + A\,|Q^{\nu}_{\eta_\mu}| + A\,U\,|Q^{\nu}|. \tag{21}$$

Aus (17), (19) und (21) folgt

$$\begin{aligned} |U'_{+}(x)| &\leqq \sum_{\nu} |Y^{\nu}_{\eta_\mu x}| + |Z_{\eta_\mu x}| + \sum_{\nu} |Q^{\nu}_{\eta_\mu x}| \\ &\leqq (2n+1)\,A\,U + 2\,A\,U \sum_{\nu} |Q^{\nu}|. \end{aligned}$$

Da $q^*_\nu = \omega_{\eta_\nu}$ und $\xi^* = \xi$ gewählt war, folgt aus (12) und (4)

$$\sum_{\nu} |Q^{\nu}| \leqq \Big(\sum_{\nu} |\omega_{\eta_\nu}| + n\Big) e^{A|x-\xi|} - n \leqq n\,(B+1)\, e^{A|x-\xi|} - n.$$

Daher ist

$$|U'_{+}(x)| \leqq \big(2n\,(B+1)\, e^{A|x-\xi|} + 1\big)\, A\,U,$$

also

$$\log \frac{U(x)}{U(\xi)} \leqq 2n\,(B+1)\,(e^{A|x-\xi|} - 1) + A\,|x-\xi|.$$

Hierin ist nach (16), (15) und (4)

$$U(\xi) = 1 + |\omega_{\eta_\mu}| + \sum_\varkappa |\omega_{\eta_\mu \eta_\varkappa}| \leqq B + 1,$$

also schließlich

$$(22) \qquad U(x) \leqq (B+1)\, e^{A|x-\xi|} \exp\{2n(B+1)(e^{A|x-\xi|} - 1)\}.$$

(d) *Abschätzung der Ableitungen* $Y^\nu_{\eta_\mu}$. Aus (17) und (22) folgt für $|x - \xi| \leqq \alpha$

$$\begin{aligned} |Y^\nu_{\eta_\mu}(x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) - Y^\nu_{\eta_\mu}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda)| &\leqq A \left| \int_\xi^x U(x)\, dx \right| \\ &\leqq \frac{1}{2n} \left[\exp\{2n(B+1)(e^{A|x-\xi|} - 1)\} \right]_\xi^x \\ &\leqq \frac{1}{2n} \{\exp 2n(B+1)(e^{\beta A} - 1) - 1\}. \end{aligned}$$

Nach (5) ist die rechte Seite $< \frac{1-\varepsilon}{n}$ für eine gewisse Zahl ε, die der Ungleichung $0 < \varepsilon < 1$ genügt und von $x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda$ unabhängig ist. Nach der ersten Zeile von (15) besagt die gefundene Abschätzung, daß im Intervall $|x - \xi| \leqq \alpha$

$$(23) \qquad \begin{cases} Y^\mu_{\eta_\mu}(x, \eta_1 \ldots, \eta_n, \lambda) > 1 - \frac{1-\varepsilon}{n}, \\ |Y^\nu_{\eta_\mu}(x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda)| < \frac{1-\varepsilon}{n} \quad \text{für } \mu \neq \nu \text{ ist.} \end{cases}$$

Weiterhin wird stets $|x - \xi| \leqq \alpha$ vorausgesetzt.

(e) *Die Funktionaldeterminante* $\frac{\partial(Y^1, \ldots, Y^n)}{\partial(\eta_1, \ldots, \eta_n)}$ *ist* $\neq 0$. Denn wäre sie an einer Stelle $x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda$ gleich Null, d. h. wäre

$$\begin{vmatrix} Y^1_{\eta_1}, \ldots, Y^1_{\eta_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y^n_{\eta_1}, \ldots, Y^n_{\eta_n} \end{vmatrix} = 0,$$

so gäbe es für diese Stelle Zahlen c_ν mit $\sum_\nu |c_\nu| > 0$, so daß

$$(24) \qquad \sum_\nu c_\nu Y^\nu_{\eta_\varkappa} = 0 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, n)$$

ist. Es sei

$$|c_\mu| = \operatorname*{Max}_\varkappa |c_\varkappa|.$$

Dann ist $c_\mu \neq 0$, und aus (24) mit $\varkappa = \mu$ würde nach (23) folgen

$$0 \geqq |c_\mu|\,|Y^\mu_{\eta_\mu}| - \sum_{\nu \neq \mu} |c_\nu|\,|Y^\nu_{\eta_\mu}| > |c_\mu| \left(1 - \frac{1-\varepsilon}{n}\right) - |c_\mu|(n-1)\frac{1-\varepsilon}{n} = \varepsilon |c_\mu|,$$

womit der gewünschte Widerspruch erreicht ist.

(f) *Für jedes feste x und λ nehmen die Funktionen $Y^1, \ldots, Y^n$ von* (14) *jedes Wertesystem $y_1, \ldots, y_n$ höchstens einmal an.*

Denn sind

$$\eta_1, \ldots, \eta_n \quad \text{und} \quad \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n \tag{25}$$

zwei Wertesysteme mit $\sum |\eta_\varkappa - \bar{\eta}_\varkappa| > 0$, so gibt es eine Differenz $\eta_\nu - \bar{\eta}_\nu$, so daß

$$|\eta_\nu - \bar{\eta}_\nu| \geqq |\eta_\varkappa - \bar{\eta}_\varkappa| \quad \text{für } \varkappa = 1, \ldots, n$$

ist. Nach dem Mittelwertsatz ist für einen passend gewählten Punkt $\eta_1^*, \ldots, \eta_n^*$ auf der Verbindungsstrecke der beiden Punkte (25) bei Berücksichtigung von (23)

$$\begin{aligned} &|Y^\nu(x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) - Y^\nu(x, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n, \lambda)| \\ &= |\sum_\mu (\eta_\mu - \bar{\eta}_\mu)\, Y^\nu_{\eta_\mu}(x, \eta_1^*, \ldots, \eta_n^*, \lambda)| \\ &\geqq |\eta_\nu - \bar{\eta}_\nu|\,|Y^\nu_{\eta_\nu}| - \sum_{\mu \neq \nu} |\eta_\nu - \bar{\eta}_\nu|\,|Y^\nu_{\eta_\mu}| \\ &\geqq |\eta_\nu - \bar{\eta}_\nu| \left(1 - \frac{1-\varepsilon}{n} - (n-1)\frac{1-\varepsilon}{n}\right) \\ &= \varepsilon\,|\eta_\nu - \bar{\eta}_\nu| > 0, \end{aligned} \tag{26}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

(g) *Die Funktionen $Y^1, \ldots, Y^n$ nehmen für jedes x, λ auch alle Wertesysteme $y_1, \ldots, y_n$ an.*

Denn da die Funktionen für jedes System $\eta_1, \ldots, \eta_n$ im ganzen Intervall $|x - \xi| \leqq \alpha$ existieren, gibt es für jedes feste x, λ ein Wertesystem $y_1, \ldots, y_n$, das von ihnen angenommen wird. Gäbe es auch ein Wertesystem, das nicht angenommen wird, so gäbe es einen Grenzpunkt $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ derart, daß in jeder Umgebung dieses Punktes sowohl Wertesysteme $y_1, \ldots, y_n$ liegen, die von den Funktionen

$$Y^1(x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda), \ldots, Y^n(x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) \tag{27}$$

angenommen werden, als auch solche Wertesysteme, die von den Funktionen (27) nicht angenommen werden. Insbesondere gibt es also eine Folge von Wertesystemen

$$\eta_{1\varrho}, \ldots, \eta_{n\varrho} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots), \tag{28}$$

für welche die Funktionen (27) gegen $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ konvergieren. Ist $|\eta_{\nu\varrho} - \eta_{\nu\sigma}|$ bei festem ϱ, σ die größte der Differenzen $|\eta_{\varkappa\varrho} - \eta_{\varkappa\sigma}|$, so ist nach (26)

$$|\eta_{\nu\varrho} - \eta_{\nu\sigma}| \leqq \frac{1}{\varepsilon}\,|Y^\nu(x, \eta_{1\varrho}, \ldots, \eta_{n\varrho}, \lambda) - Y^\nu(x, \eta_{1\sigma}, \ldots, \eta_{n\sigma}, \lambda)|.$$

Nach dem Cauchyschen Konvergenzsatz konvergiert also auch die Folge (28), etwa gegen $\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n$. Daher ist wegen der Stetigkeit der Y^ν

$$\bar{y}_\nu = Y^\nu(x, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n, \lambda),$$

und somit gehört der Grenzpunkt $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ zu den von den Funktionen (27) angenommenen Punkten. Da aber nach (e) die Funktionaldeterminante der Y^ν nicht Null ist, gehört dann auch eine volle Umgebung des Grenzpunktes zu den von (27) angenommenen Punkten, was der Definition des Grenzpunktes widerspricht. Damit ist die Behauptung bewiesen.

(h) *Die Umkehrfunktionen zu a n* Y^ν.

Aus (f) und (g) folgt, daß die Gleichungen

$$y_\nu = Y^\nu(x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{29}$$

bei festem x und λ für jedes gegebene Wertesystem $y_1, \ldots, y_n$ eindeutig nach den $\eta_\varkappa$ auflösbar sind. Die Lösungen seien

$$\eta_\nu = \varphi^\nu(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda) \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{30}$$

Wegen (e) und (b) haben die φ^ν stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach $x, y_1, \ldots, y_n, \lambda$.

Die φ^ν sind aber sogar k-mal stetig differenzierbar nach allen ihren Argumenten.

Denn nach der Definition der φ^ν ist

$$y_\nu = Y^\nu(x, \varphi^1(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda), \ldots, \varphi^n(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda), \lambda) \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach y_μ, x, λ:

$$e_{\mu,\nu} = \sum_\varkappa Y^\nu_{\eta_\varkappa} \varphi^\varkappa_{y_\mu} \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, n), \tag{31}$$

$$0 = Y^\nu_x + \sum_\varkappa Y^\nu_{\eta_\varkappa} \varphi^\varkappa_x \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{32}$$

$$0 = \sum_\varkappa Y^\nu_{\eta_\varkappa} \varphi^\varkappa_{\lambda_\varrho} + Y^\nu_{\lambda_\varrho} \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Da nach (e) die Funktionaldeterminante der Y^ν nicht Null ist, lassen sich also die $\varphi^\varkappa_{y_\mu}$, $\varphi^\varkappa_x$, $\varphi^\varkappa_{\lambda_\varrho}$ als rationale Funktionen der $Y^\nu_{\eta_\varkappa}$, Y^ν_x, Y^ν_λ mit einem nicht verschwindenden Nenner darstellen. Da diese Ableitungen der Y^ν nach (b) noch $(k-1)$-mal stetig differenzierbar sind, gilt also dasselbe für die $\varphi^\varkappa_{y_\mu}$, $\varphi^\varkappa_x$, $\varphi^\varkappa_\lambda$, womit die Behauptung bewiesen ist.

(i) *Angabe des Integrals.* Mit den Funktionen (30) wird nun

$$\psi(x, \mathfrak{y}, \lambda) = Z(x, \varphi^1, \ldots, \varphi^n, \lambda), \tag{33}$$

$$\chi_\nu(x, \mathfrak{y}, \lambda) = Q^\nu(x, \varphi^1, \ldots, \varphi^n, \lambda) \tag{34}$$

gesetzt. Es soll bewiesen werden, daß ψ das gesuchte Integral ist.

Zunächst sei bemerkt, daß nach (b) und (h) ψ und die χ_ν nach allen ihren Argumenten k-mal stetig differenzierbar sind. Weiter ist

(j) $\psi_{y_\nu} = \chi_\nu$.

Denn aus (31) folgt durch Multiplikation mit ψ_{y_ν} und Summation über ν

$$\sum_\varkappa \varphi^\varkappa_{y_\mu} \sum_\nu Y^\nu_{\eta_\varkappa} \psi_{y_\nu} = \psi_{y_\mu}.$$

Ferner folgt aus (33)

$$\psi_{y_\mu} = \sum_\varkappa Z_{\eta_\varkappa} \varphi^\varkappa_{y_\mu},$$

also

$$\sum_\varkappa \varphi^\varkappa_{y_\mu} (Z_{\eta_\varkappa} - \sum_\nu Y^\nu_{\eta_\varkappa} \psi_{y_\nu}) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n).$$

Da nach (e) die Funktionaldeterminante der Y^ν nicht Null ist, ist auch für die inversen Funktionen $\varphi^\varkappa$ die Det $|\varphi^\varkappa_{y_\mu}| \neq 0$. Daher folgt aus den obigen linearen homogenen Gleichungen

$$Z_{\eta_\varkappa} = \sum_\nu Y^\nu_{\eta_\varkappa} \psi_{y_\nu}.$$

Ist auch noch

$$Z_{\eta_\varkappa} = \sum_\nu Y^\nu_{\eta_\varkappa} Q^\nu, \qquad (\varkappa = 1, \ldots, n), \tag{35}$$

so ist daher

$$\sum_\nu Y^\nu_{\eta_\varkappa} (\psi_{y_\nu} - Q^\nu) = 0 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, n),$$

also, da die Determinante $\neq 0$ ist,

$$\psi_{y_\nu} = Q^\nu;$$

das ist aber nach (34) gerade die Behauptung (j).

Es bleibt also noch (35) zu beweisen. Dafür wird der bekannte Kunstgriff von Cauchy benutzt. Es wird

$$V(x) = Z_{\eta_\mu} - \sum_\nu Y^\nu_{\eta_\mu} Q^\nu$$

gesetzt. Wie schon in (c) benutzt, existieren die Ableitungen $Z_{x\eta_\mu}$, $Y^\nu_{x\eta_\mu}$ und sind stetig. Daher ist

$$V'(x) = Z_{\eta_\mu x} - \sum_\nu Y^\nu_{\eta_\mu x} Q^\nu - \sum_\nu Y^\nu_{\eta_\mu} Q^\nu_x.$$

Nach (18) und der dritten Zeile von (8) vereinfacht sich dieses zu

$$V'(x) = f_z V(x).$$

Durch diese Differentialgleichung und den Anfangswert $V(\xi)$ ist $V(x)$ eindeutig bestimmt. Nach (15) ist

$$V(\xi) = \omega_{\eta_\mu} - \sum_\nu e_{\mu,\nu} \omega_{\eta_\nu} = \omega_{\eta_\mu} - \omega_{\eta_\mu} = 0.$$

Daher ist $V(x) \equiv 0$, womit (35) bewiesen ist.

(k) ψ *erfüllt die Differentialgleichung* (1).

Denn nach (33) und der zweiten Zeile von (8) ist

$$\begin{aligned}\psi_x &= Z_x + \sum_\varkappa Z_{\eta_\varkappa}\varphi_x^\varkappa \\ &= f - \sum_\varkappa Q^\varkappa f_{q_\varkappa} + \sum_\varkappa Z_{\eta_\varkappa}\varphi_x^\varkappa,\end{aligned}$$

also nach der ersten Zeile von (8) sowie nach (35) und (32)

$$\begin{aligned}&= f + \sum_\varkappa Q^\varkappa Y_x^\varkappa + \sum_\nu Q^\nu \sum_\varkappa Y_{\eta_\varkappa}^\nu \varphi_x^\varkappa \\ &= f + \sum_\nu Q^\nu (Y_x^\nu + \sum_\varkappa Y_{\eta_\varkappa}^\nu \varphi_x^\varkappa) = f.\end{aligned}$$

Dabei ist

$$f = f(x, y_1, \ldots, y_n, Z, Q^1, \ldots, Q^n, \lambda),$$

also nach (33), (34) und (j)

$$f = f(x, y_1, \ldots, y_n, \psi, \psi_{y_1}, \ldots, \psi_{y_n}, \lambda).$$

(l) ψ *erfüllt die vorgeschriebene Anfangsbedingung.*

Denn aus (14) und (33) folgt auf Grund der Bedeutung der charakteristischen Funktionen

$$Y^\nu(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) = \eta_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

$$Z(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) = \omega(\eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda).$$

Nach der ersten dieser beiden Zeilen ist daher für die in (h) eingeführten Funktionen

$$\varphi^\nu(\xi, y_1, \ldots, y_n, \lambda) = y_\nu.$$

Aus (33) erhält man somit in der Tat

$$\begin{aligned}\psi(\xi, y_1, \ldots, y_n, \lambda) &= Z(\xi, \varphi^1(\xi, y_1, \ldots, y_n, \lambda), \ldots, \varphi^n(\xi, y_1, \ldots, y_n, \lambda), \lambda) \\ &= Z(\xi, y_1, \ldots, y_n, \lambda) \\ &= \omega(y_1, \ldots, y_n, \lambda).\end{aligned}$$

(m) *Die Differenzierbarkeit von* ψ.

Nach (i) ist ψ k-mal stetig differenzierbar nach allen $n + m + 1$ Argumenten. Dasselbe gilt für die χ_ν, d. h. nach (j) für die ψ_{y_ν}. Da nach (k)

$$\psi_x = f(x, y_1, \ldots, y_n, \psi, \psi_{y_1}, \ldots, \psi_{y_n}, \lambda)$$

ist und ψ, ψ_{y_ν} sowie f k-mal stetig differenzierbar sind, folgt hieraus, daß auch ψ_x k-mal stetig differenzierbar ist.

(n) *Eindeutige Bestimmtheit des Integrals.*

Jede zweimal stetig differenzierbare Integralfläche der Gleichung (1) läßt sich aus Charakteristiken aufbauen, die in dem ganzen Intervall $|x - \xi| \leqq \alpha$

existieren. Bildet man nämlich für irgendeine zweimal stetig differenzierbare Integralfläche $z = \psi(x, \mathfrak{y}, \lambda)$ und eines ihrer Flächenelemente ξ^*, $\mathfrak{y}^*$, z^*, p^*, $\mathfrak{q}^*$ die Differentialgleichungen

$$y'_\nu = -f_{q_\nu}(x, \mathfrak{y}, \psi, \psi_{y_1}, \ldots, \psi_{y_n}, \lambda) \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{36}$$

so existiert die durch ξ^*, $\mathfrak{y}^*$ gehende Integralkurve dieses Systems wegen der Beschränktheit der f_{q_ν} in dem ganzen Intervall $|x - \xi| \leqq \alpha$. Mit diesen Funktionen $y_\nu(x)$ wird

$$z(x) = \psi(x, \mathfrak{y}(x), \lambda), \quad p(x) = \psi_x(x, \mathfrak{y}(x), \lambda), \tag{37}$$

$$q_\nu(x) = \psi_{y_\nu}(x, \mathfrak{y}(x), \lambda) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gesetzt. Dann ist

$$z'(x) = \psi_x + \sum_\varkappa \psi_{y_\varkappa} y'_\varkappa = f - \sum_\varkappa q_\varkappa f_{q_\varkappa}, \tag{38}$$

$$q'_\nu(x) = \psi_{x y_\nu} + \sum_\varkappa \psi_{y_\nu y_\varkappa} y'_\varkappa(x).$$

Aus $\psi_x = f$ folgt

$$\psi_{x y_\nu} = f_{y_\nu} + f_z \psi_{y_\nu} + \sum_\varkappa f_{q_\varkappa} \psi_{y_\varkappa y_\nu}.$$

Daher ist wegen (36)

$$q'_\nu(x) = f_{y_\nu} + f_z q_\nu. \tag{39}$$

Nach (36) bis (39) erfüllen also die $y_\nu(x)$, $z(x)$, $q_\nu(x)$ die charakteristischen Gleichungen (8), womit die Behauptung bewiesen ist.

Die charakteristischen Gleichungen sind unabhängig von der speziell betrachteten Integralfläche. Da die Integrale der charakteristischen Gleichungen durch die für die Integralfläche vorgeschriebenen Anfangswerte $z = \omega$, $q_\nu = \omega_{y_\nu}$ eindeutig bestimmt sind, gilt somit dasselbe für die Integralfläche von (1), für welche die Anfangswerte ω vorgeschrieben sind.

§ 2.

Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Involutionssysteme.

Es handelt sich um Systeme

$$p_\nu = f^\nu(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q}, \lambda) \qquad (\nu = 1, \ldots, r); \tag{1}$$

dabei ist

$$r > 1, \quad p_\nu = \frac{\partial z}{\partial x_\nu}, \quad q_\nu = \frac{\partial z}{\partial y_\nu},$$

und es ist $\mathfrak{y}$ für $y_1, \ldots, y_s$ geschrieben, $\mathfrak{q}$ für $q_1, \ldots, q_s$ und λ für $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Die Bedingung, daß (1) ein Involutionssystem ist, besagt, daß die sogenannten Integrabilitätsbedingungen

$$(2)\quad f^{\mu}_{x_\nu} + f^{\mu}_{z} f^{\nu} + \sum_{\varkappa=1}^{s} f^{\mu}_{q_\varkappa}(f^{\nu}_{y_\varkappa} + q_\varkappa f^{\nu}_{z}) = f^{\nu}_{x_\mu} + f^{\nu}_{z} f^{\mu} + \sum_{\varkappa=1}^{s} f^{\nu}_{q_\varkappa}(f^{\mu}_{y_\varkappa} + q_\varkappa f^{\mu}_{z})$$
$$(\mu, \nu = 1, \ldots, r)$$

identisch in allen $r + 2s + m + 1$ Argumenten erfüllt sind und die vorkommenden Ableitungen existieren und stetig sind[8] [9]).

Satz 2. Voraussetzung. *Für fest gegebene* ξ_ν $(\nu = 1, \ldots, r)$ *existieren in dem Bereich*

$$(3)\qquad |x_\nu - \xi_\nu| \leqq a;\quad \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q} \text{ beliebig};\quad \Lambda_\mu \leqq \lambda_\mu \leqq \Lambda^*_\mu \text{ [10])}$$

die partiellen Ableitungen $f^{\varrho}_{y_\mu}$, f^{ϱ}_{z}, $f^{\varrho}_{q_\mu}$ *und sind nebst den Funktionen* $f^{\varrho}(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q}, \lambda)$ *selber k-mal stetig differenzierbar* $(k \geqq 1)$ *nach allen*

---

[8]) Auf die Gleichungen (2) kommt man bekanntlich dadurch, daß für jede Lösung $z = \psi(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y})$ des Systems (1), die sogar zweimal stetig differenzierbar ist, $\dfrac{\partial p_\nu}{\partial x_\mu} = \dfrac{\partial p_\mu}{\partial x_\nu}$ ist. Trägt man hierin die rechten Seiten von (1) ein und vereinfacht man die entstehenden Gleichungen unter nochmaliger Benutzung von (1), so erhält man die Gleichungen (2), jedoch nur als Identitäten in $x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}$ für $z = \psi$ und $q_\varkappa = \psi_{y_\varkappa}$. In diesem Sinne sind die Gleichungen (2) notwendige Bedingungen für die Existenz einer gemeinsamen Lösung der Gleichungen (1). Die Integrabilitätsbedingungen (2) sind nach dem obigen Text als Identitäten in einem weitergehenden Sinne aufzufassen.

[9]) Ist allgemeiner ein implizites System von partiellen Differentialgleichungen

$$(*)\qquad F^{\nu}(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, r)$$

für eine gesuchte Funktion $z = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ gegeben, so ergibt sich in ähnlicher Weise wie bei [8]), daß $z = \psi$ und $p_\varkappa = \psi_{x_\varkappa}$ auch den Gleichungen

$$(**)\qquad [F^{\mu}, F^{\nu}] = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, r)$$

genügen, wo die eckige Klammer

$$[F^{\mu}, F^{\nu}] = \sum_{\varkappa=1}^{n} \{(F^{\mu}_{x_\varkappa} + p_\varkappa F^{\mu}_{z}) F^{\nu}_{p_\varkappa} - (F^{\nu}_{x_\varkappa} + p_\varkappa F^{\nu}_{z}) F^{\mu}_{p_\varkappa}\}$$

ist. Verlangt man nun wiederum, daß die Gleichungen (**) identisch in den $x_\varkappa, z, p_\varkappa$ bestehen, so liegt, wie leicht festzustellen ist, folgender Sachverhalt vor: Das System (1) ist ein Sonderfall von (*). Die für diesen Sonderfall (1) aufgestellten Integrabilitätsbedingungen (**) sind aber nur dann mit (2) identisch, wenn die f^{ν} von z selber nicht abhängen, d. h. wenn $f^{\nu}_{z} = 0$ ist. Liegt dieser Fall nicht vor, so erhält man die Bedingungen (2) aus (**), wenn man die Gültigkeit dieser letzteren nicht für alle Zahlensysteme $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$, sondern nur für solche fordert, welche die Gleichungen (*) erfüllen.

[10]) Diese abgeschlossenen Intervalle können auch durch halboffene oder offene Intervalle oder durch eine beliebige offene Punktmenge im λ-Raum ersetzt werden.

$r + 2s + m + 1$ Argumenten x_ν, y_ν, z, q_ν, λ. Ferner sind in dem Bereich (3) *die Integrabilitätsbedingungen* (2) *erfüllt, und es ist*

$$\left.\begin{array}{l} |f^\varrho_{x_\nu}|,\ |f^\varrho_{y_\nu}|,\ |f^\varrho_z|,\ |f^\varrho_{q_\nu}| \\ |f^\varrho_{y_\mu y_\nu}|,\ |f^\varrho_{y_\mu z}|,\ |f^\varrho_{y_\mu q_\nu}|,\ |f^\varrho_{z z}|,\ |f^\varrho_{z q_\nu}|,\ |f^\varrho_{q_\mu q_\nu}| \end{array}\right\} \leqq A. \tag{4}$$

In dem Bereich

$$\eta \text{ beliebig}, \qquad \Lambda_\mu \leqq \lambda_\mu \leqq \Lambda^*_\mu \text{ [10]}$$

existieren für die gegebene Funktion $\omega(\eta, \lambda)$ die partiellen Ableitungen ω_{y_μ} und sind nebst ω selber k-mal stetig differenzierbar nach den y_ν und λ_ν; ferner ist

$$|\omega_{y_\mu}| + \sum_\nu |\omega_{y_\mu y_\nu}| \leqq B \qquad (\mu = 1, \ldots, s). \tag{5}$$

Schließlich sei

$$0 < \beta < \frac{1}{rA} \log\left(1 + \frac{\log 3}{2s(B+1)}\right) \quad \text{und} \quad \alpha = \operatorname{Min}(a, \beta). \tag{6}$$

Behauptung. *Bei gegebenem λ hat das System* (1) *in dem Bereich*

$$|x_\nu - \xi_\nu| \leqq \alpha; \quad \eta \text{ beliebig}; \quad \Lambda_\mu \leqq \lambda_\mu \leqq \Lambda^*_\mu \text{ [10]} \tag{7}$$

genau ein zweimal stetig differenzierbares Integral

$$z = \psi(x_1, \ldots, x_r, \eta, \lambda),$$

das für $x_\nu = \xi_\nu$ die Werte

$$\psi(\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta, \lambda) = \omega(\eta, \lambda) \tag{8}$$

annimmt. Die Funktion $\psi(x_1, \ldots, x_r, \eta, \lambda)$ ist nebst den Ableitungen ψ_z, und ψ_{y_ν} in dem Bereich (7) *k-mal stetig differenzierbar nach allen ihren $r + s + m$ Argumenten $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, $\lambda_\varkappa$* [11].

---

[11]) An der obigen Formulierung sind neu die explizite Angabe eines Existenzbereiches und die Aussagen über mehrmalige Differenzierbarkeit und die Abhängigkeit des Integrals von Parametern.

Ohne diese weitergehenden Aussagen ist der Satz nach verschiedenen Methoden (jedoch nicht immer einwandfrei) bewiesen worden:

(a) Beweis mit Hilfe der MAYERschen Transformation. Ein solcher Beweis ist kurz skizziert bei É. GOURSAT, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, 2. Aufl., Paris 1921, S. 38f. Eine ausführlichere Darstellung findet sich bei L. BIEBERBACH, Theorie der Differentialgleichungen, 3. Aufl., Berlin 1930, S. 308ff. Herr BIEBERBACH setzt voraus, daß die f^ν nicht von z selber abhängen, und gibt unter Berufung auf ein Beispiel an, daß die MAYERsche Methode für den Existenzbeweis versage, wenn die f^ν von z selber abhängen. Demgegenüber wird in dem obigen Text der Beweis auch für diesen allgemeinen Fall gerade mit Hilfe der

Zusatz. Die Zusätze zu Satz 1 übertragen sich auch auf den vorliegenden Fall. Insbesondere kann

$$\beta = \frac{1}{3\,r\,s\,A\,(B+1)}$$

gewählt werden.

Dem Beweis des Satzes 2 werden zwei Hilfssätze vorausgeschickt. Der erste besagt, daß ein Involutionssystem bei Substituierung neuer Veränderlicher für die x_ν wieder in ein Involutionssystem übergeht. Wird unter den nötigen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen

$$x_\nu = \chi^\nu(u_1, \ldots, u_t) \qquad (\nu = 1, \ldots, r)$$

$$Z(u_1, \ldots, u_t, \mathfrak{y}) = z(\chi^1, \ldots, \chi^r, \mathfrak{y})$$

gesetzt, so ist

$$Z_{u_\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{r} z_{x_\varkappa} \chi^\varkappa_{u_\nu},$$

also, wenn z dem System (1) genügt,

$$Z_{u_\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{r} f^\varkappa \chi^\varkappa_{u_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, t).$$

MAYERschen Methode geführt werden. Der scheinbare Widerspruch klärt sich dadurch auf, daß Herr BIEBERBACH auf sein Beispiel (S. 314)

$$p_1 = z + q, \qquad p_2 = z + q$$

gar nicht die MAYERsche Transformation angewendet hat und seine Überlegungen daher auch nicht ihre Unbrauchbarkeit für dieses Beispiel ergeben. Im Gegenteil führt die MAYERsche Transformation bei ihm durchaus zum Ziel.

Beide Autoren benutzen übrigens die MAYERsche Transformation in einer unzulänglichen Form. Dazu siehe Fußnote [12]) auf S. 272.

(b) Beweis durch Schluß von $r-1$ auf r. Ist der Satz schon für $r-1$ statt r bewiesen, so sei $z = \bar{\psi}(x_1, \ldots, x_{r-1}, \mathfrak{y}, \lambda)$ ein Integral der $r-1$ ersten Gleichungen (1) mit $x_r = \xi_r$ und mit den Anfangswerten

$$\bar{\psi}(\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, \mathfrak{y}, \lambda) = \omega(\mathfrak{y}, \lambda).$$

Dann wird für die r-te Gleichung (1), in der jetzt $x_1, \ldots, x_{r-1}$ als Parameter angesehen werden, das Integral

$$z = \psi(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r, \mathfrak{y}, \lambda)$$

gebildet, das für $x_r = \xi_r$ die Anfangswerte

$$\psi(x_1, \ldots, x_{r-1}, \xi_r, \mathfrak{y}, \lambda) = \bar{\psi}(x_1, \ldots, x_{r-1}, \mathfrak{y}, \lambda)$$

hat, und gezeigt, daß dieses das gesuchte Integral des ganzen Systems (1) ist. Vgl. hierzu É. GOURSAT, a. a. O., S. 35ff. Der Beweis nach dieser Methode ist umständlicher als nach der MAYERschen Methode und liefert außerdem wesentlich ungünstigere Abschätzungen für den Existenzbereich.

(c) Beweis mit der Charakteristikentheorie für Systeme (1). Hierzu vgl. C. CARATHÉODORY, Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Leipzig und Berlin 1935, S. 64ff. Über den Existenzbereich, der sich hierbei ergibt, ist nichts gesagt.

Das ist das transformierte System, von dessen rechten Seiten der folgende Hilfssatz aussagt, daß sie wieder die Integrabilitätsbedingungen erfüllen.

Hilfssatz 1. In einem Bereich $\mathfrak{G}(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q})$ mögen die Funktionen $f^\nu(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q})$ $(\nu = 1, \ldots, r)$ stetig differenzierbar sein und die Integrabilitätsbedingungen (2) erfüllen. Die Funktionen

$$\chi^\nu(u_1, \ldots, u_t) \qquad (\nu = 1, \ldots, r)$$

mögen in $\mathfrak{g}(u_1, \ldots, u_t)$ zweimal stetig differenzierbar sein und nur Punkte $x_1, \ldots, x_r$ liefern, die zu dem entsprechenden Unterbereich von $\mathfrak{G}$ gehören. Wird für $\nu = 1, \ldots, t$

$$F^\nu(u_1, \ldots, u_t, \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q}) = \sum_{\varkappa=1}^{r} f^\varkappa(\chi^1, \ldots, \chi^r, \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q})\, \chi^\varkappa_{u_\nu} \tag{9}$$

gesetzt, so erfüllen auch die F^ν die Integrabilitätsbedingungen, d. h. es ist identisch in den $u_\varkappa$, $y_\varkappa$, z, $\mathfrak{q}_\varkappa$ für $\mu, \nu = 1, \ldots, t$

$$F^u_{u_\nu} + F^u_z F^\nu + \sum_{\varkappa=1}^{s} F^u_{q_\varkappa}(F^\nu_{y_\varkappa} + q_\varkappa F^\nu_z) = F^\nu_{u_\mu} + F^\nu_z F^u + \sum_{\varkappa=1}^{s} F^\nu_{q_\varkappa}(F^u_{y_\varkappa} + q_\varkappa F^u_z). \tag{10}$$

Beweis. Man drücke die auf der linken Seite von (10) vorkommenden Ableitungen auf Grund von (9) durch die Ableitungen der f^ν und χ^ν aus. Macht man dasselbe für die rechte Seite von (10), so ergibt (2) die Richtigkeit von (10).

Hilfssatz 2. Die Funktionen

$$f^\nu(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q}) \qquad (\nu = 1, \ldots, r)$$

mögen in einem Bereich $\mathfrak{G}(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q})$ stetig differenzierbar sein und die Integrabilitätsbedingungen (2) erfüllen. Die Funktion $z = z(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y})$ sei in einem Bereich $\mathfrak{g}(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y})$ stetig differenzierbar, ferner möge auch noch alle Ableitungen $z_{x_\mu y_\nu}$ und $z_{y_u y_\nu}$ existieren und stetig sein; schließlich genüge z der partiellen Differentialgleichung

$$z_{x_1} = f^1 \quad \text{mit} \quad q_\nu = z_{y_\nu}. \tag{11}$$

Dann genügt die Funktion

$$\zeta(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}) = z_{x_\nu} - f^\nu \tag{12}$$

der linearen Differentialgleichung

$$\zeta_{x_1} = \sum_{\sigma=1}^{s} f^1_{q_\sigma} \zeta_{y_\sigma} + f^1_z \zeta. \tag{13}$$

Beweis: Da die f^ν stetig differenzierbar sind und da auch die Ableitungen $z_{x_\mu y_\nu}$ existieren und stetig sind, folgt aus (11), daß $z_{x_\nu x_1}$ existiert

und stetig ist. Daher ist ζ nach x_1 stetig differenzierbar, und zwar erhält man aus (12)

$$\zeta_{x_1} = z_{x_\nu x_1} - f^\nu_{x_1} - f^\nu_z z_{x_1} - \sum_\sigma f^\nu_{q_\sigma} z_{y_\sigma x_1}. \tag{14}$$

Aus (11) folgt durch Differentiation nach x_ν und y_σ

$$z_{x_1 x_\nu} = f^1_{x_\nu} + f^1_z z_{x_\nu} + \sum_\sigma f^1_{q_\sigma} z_{y_\sigma x_\nu}$$

und

$$z_{x_1 y_\sigma} = f^1_{y_\sigma} + f^1_z q_\sigma + \sum_\tau f^1_{q_\tau} z_{y_\sigma y_\tau},$$

ferner aus (12)

$$z_{x_\nu y_\sigma} = \zeta_{y_\sigma} + f^\nu_{y_\sigma} + f^\nu_z q_\sigma + \sum_\tau f^\nu_{q_\tau} z_{y_\sigma y_\tau}.$$

Trägt man das in (14) ein, so erhält man

$$\zeta_{x_1} = f^1_z \zeta + \sum_\sigma f^1_{q_\sigma} \zeta_{y_\sigma} + \\ + f^1_{x_\nu} + f^1_z f^\nu + \sum_\sigma f^1_{q_\sigma} (f^\nu_{y_\sigma} + f^\nu_z q_\sigma) - f^\nu_{x_1} - f^\nu_z f^1 - \sum_\sigma f^\nu_{q_\sigma} (f^1_{y_\sigma} + f^1_z q_\sigma).$$

Damit ist (13) bewiesen, da die letzte Zeile nach (2) gleich 0 ist.

Beweis des Satzes 2. (A) *Der Eindeutigkeitsbeweis.* In dem Bereich (7) sei $z = \psi(x_1, \ldots, x_r, \eta, \lambda)$ bei festem λ ein zweimal stetig differenzierbares Integral des Systems (1) mit den Anfangswerten (8). Die r Variabeln $x_1, \ldots, x_r$ werden nun als Funktionen von $r+1$ neuen unabhängigen Variabeln betrachtet, indem

$$x_\nu - \xi_\nu = u\, u_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, r) \tag{15}$$

gesetzt wird; dabei soll

$$|u| \leqq 1, \quad |u_\nu| \leqq \alpha \tag{16}$$

sein. Dann nehmen die x_ν alle Werte des Bereiches $|x_\nu - \xi_\nu| \leqq \alpha$, und zwar sogar mehrfach an[12]). Für die durch (15) gegebenen x_ν wird

$$Z(u, u_1, \ldots, u_r, \eta, \lambda) = \psi(x_1, \ldots, x_r, \eta, \lambda),$$

$$Q_\nu(u, u_1, \ldots, u_r, \eta, \lambda) = Z_{y_\nu} = \psi_{y_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, s)$$

---

[12]) Das ist die sogenannte *Mayersche Transformation*. A. Mayer selbst setzt [Math. Annalen 5 (1872), S. 458–460]

$$x_\nu - \xi_\nu = u_1 g_\nu(u_1, \ldots, u_r)$$

und wählt insbesondere S. 460

$$x_1 - \xi_1 = u_1 \quad \text{und} \quad x_\nu - \xi_\nu = u_1 u_\nu \quad \text{für } \nu > 1.$$

Ebenso verfahren spätere Autoren, wie z. B. Goursat, a. a. O., S. 38; Bieberbach, a. a. O., S. 311. Dabei wird übersehen, daß man auf diese Weise keine volle Umgebung des Punktes $\xi_1, \ldots, \xi_r$ erhalten kann, da für $x_1 = \xi_1$ notwendig alle $x_\nu = \xi_\nu$ sind. Die obige allgemeinere Form der Mayerschen Transformation findet sich bei Carathéodory, a. a. O., S. 26 und für einfachere Fälle bei W. Wirtinger, Sitzungsberichte d. K. Akademie d. Wissensch. Wien, Math.-naturw. Kl., Abt. IIa 118 (1909), S. 1373 ff.

gesetzt. Dann ist

$$Z_u = \sum_{\varrho=1}^{r} u_\varrho \psi_{x_\varrho} = \sum_{\varrho} u_\varrho f^\varrho, \quad Z_{u_\nu} = u \psi_{x_\nu} = u f^\nu.$$

Wird

$$(17) \quad \begin{cases} F(u, u_1, \ldots, u_r, \mathfrak{y}, Z, Q_1, \ldots, Q_s, \lambda) \\ \qquad = \sum_{\varrho=1}^{r} u_\varrho f^\varrho (x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, Z, Q_1, \ldots, Q_s, \lambda), \\ F^\nu (u, u_1, \ldots, u_r, \mathfrak{y}, Z, Q_1, \ldots, Q_s) = u f^\nu \end{cases}$$

gesetzt, so ist daher

$$(18) \qquad F(u, 0, \ldots, 0, \mathfrak{y}, Z, Q_1, \ldots, Q_s) = 0,$$

und Z genügt den Differentialgleichungen

$$(19) \quad \begin{cases} Z_u = F, \\ Z_{u_\nu} = F^\nu \end{cases} \qquad (\nu = 1, \ldots, r).$$

Ferner folgt aus der Anfangsbedingung (8)

$$(20) \quad \left\{ \begin{matrix} Z(0, u_1, \ldots, u_r, \mathfrak{y}, \lambda) \\ Z(u, 0, \ldots, 0, \mathfrak{y}, \lambda) \end{matrix} \right\} = \omega(\mathfrak{y}, \lambda),$$

und offenbar ist

$$(21) \qquad \psi(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, \lambda) = Z(1, x_1 - \xi_1, \ldots, x_r - \xi_r, \mathfrak{y}, \lambda).$$

Die eindeutige Bestimmtheit von ψ besagt also dasselbe wie die eindeutige Bestimmtheit von $Z(1, u_1, \ldots, u_r, \mathfrak{y}, \lambda)$ für $|u_\nu| \leqq \alpha$. Für den Nachweis dieser benötigt man von den Gleichungen (19) und (20) jeweils nur die erste Zeile. Die erste Zeile von (19) ist, wenn neben den λ auch noch $u_1, \ldots, u_r$ als Parameter angesehen werden, eine Differentialgleichung von der in § 1 behandelten Art. Die dort auftretenden Größen a, A, α, β mögen jetzt mit a^*, A^*, α^*, β^* bezeichnet werden. Wegen (16) und (4) ist dann $A^* \leqq r \alpha A$, und das ist $\leqq r \beta A$ nach dem zweiten Teil von (6). Es kann also $A^* = r \beta A$ gewählt werden. Nach dem ersten Teil von (16) ist $a^* = 1$. Die Ungleichung (5) des § 1 für β^* lautet dann

$$0 < \beta^* < \frac{1}{r \beta A} \log \left(1 + \frac{\log 3}{2n(B+1)}\right).$$

Hierin ist nach (6) die rechte Seite > 1, so daß $\beta^* = 1$ gewählt werden kann. Damit ergibt sich aus dem zweiten Teil von § 1 (5), daß $\alpha^* = 1$ ist. Der Satz 1 ergibt somit, daß Z durch die ersten Zeilen von (19) und (20) für $|u| \leqq 1$ eindeutig bestimmt ist; insbesondere gilt das also auch für (21) im Bereich (7).

(B) *Der Existenzbeweis.* Es werden wieder die Funktionen (17) und mit diesen die Gleichungen (19) gebildet. Dieses Gleichungssystem ist nach dem Hilfssatz 1 wieder ein Involutionssystem.

Zunächst wird die Gleichung der ersten Zeile von (19) für sich behandelt, wobei neben den λ auch noch $u_1, \ldots, u_r$ als Parameter angesehen werden. Auf diese Gleichung ist wieder der Satz 1 anwendbar und ergibt die Existenz eines Integrals

$$Z = \Psi(u, \eta; u_1, \ldots, u_r, \lambda),$$

das die erste Zeile von (20) erfüllt. Wie oben ergibt sich weiter, daß dieses Integral für

$$|u| \leqq 1, \quad |u_r| \leqq \alpha$$

existiert. Weiter ergibt der Satz 1, daß Ψ, Ψ_u, Ψ_{y_ν} nach u, $y_\varkappa$, $u_\varkappa$, λ k-mal stetig differenzierbar ist.

Es wird nun behauptet, daß

$$\psi(x_1, \ldots, x_r, \eta, \lambda) = \Psi(1, \eta; x_1 - \xi_1, \ldots, x_r - \xi_r, \lambda)$$

das gesuchte Integral des Systems (1) ist.

Wegen (18) folgt aus der ersten Zeile von (19), daß $Z_u = 0$ für $u_1 = \cdots = u_r = 0$ ist, also ist $Z = \Psi$ bei festem η, λ und $u_\varkappa = 0$ von u unabhängig. Wegen der ersten Zeile von (20) erfüllt daher $Z = \Psi$ auch die zweite Zeile von (20), d. h. ψ erfüllt die Anfangsbedingung (8). Erfüllt Ψ auch noch die Gleichungen der zweiten Zeile von (19), so ergibt sich aus diesen für $u = 1$, daß ψ das System (1) erfüllt. Aus der k-maligen Differenzierbarkeit von Ψ und den Ψ_{y_ν} folgt, daß auch ψ und die ψ_{y_ν} k-mal nach den $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, λ stetig differenzierbar sind. Da die f^ν nach allen ihren Argumenten k-mal stetig differenzierbar sind, folgt somit aus den Gleichungen (1) nach Eintragung von ψ, daß auch die ψ_{x_ν} k-mal stetig differenzierbar nach allen ihren Argumenten sind.

Es ist also in der Tat nur noch zu beweisen, daß $Z = \Psi$ die Gleichungen der zweiten Zeile von (19) erfüllt. Das ergibt sich aber so: Da, wie am Anfang von (B) bemerkt, auch für das System (19) die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind und da Z der ersten Zeile von (19) genügt, ist nach Hilfssatz 2 für

$$\zeta(u, u_1, \ldots, u_r, \eta, \lambda) = Z_{u_\nu} - F^\nu$$

die Gleichung

$$\zeta_u = \sum_{\varrho=1}^{s} F_{Q_\varrho} \zeta_{y_\varrho} + F_z \zeta \tag{22}$$

erfüllt. Das ist nach Eintragung von Ψ, $\Psi_{u_\varkappa}$, $\Psi_{y_\varkappa}$ eine lineare Differentialgleichung für ζ. Nach (17) ist $F^\nu = 0$ für $u = 0$. Ferner ist für $u = 0$

$$Z_{u_\nu} = \frac{\partial}{\partial u_\nu} \omega(\eta, \lambda) = 0,$$

also

$$\zeta(0, u_1, \ldots, u_r, \eta, \lambda) = 0.$$

Eine Lösung von (22) mit diesem Anfangswert ist offenbar $\zeta = 0$. Da die Lösungen von (22) nach Satz 3 durch die Anfangswerte eindeutig bestimmt sind, ist also $\zeta \equiv 0$, d. h. $Z = \psi$ erfüllt auch die Gleichungen der zweiten Zeile von (19).

§ 3.

Existenz- und Eindeutigkeitssatz für eine lineare Differentialgleichung.

Es handelt sich um eine Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^{n} f^{\nu}(x, \mathfrak{y}, \lambda) \frac{\partial z}{\partial y_{\nu}} = f^{0}(x, \mathfrak{y}, \lambda)\, z + g(x, \mathfrak{y}, \lambda), \tag{1}$$

wobei wieder $\mathfrak{y}$ für $y_1, \ldots, y_n$ und λ für $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ geschrieben ist; die $\lambda_\varkappa$ sind Parameter.

Satz 3. Voraussetzung. *In dem Bereich*

$$a \leqq x \leqq b; \quad \mathfrak{y} \text{ beliebig}; \quad \Lambda_\mu \leqq \lambda_\mu \leqq \Lambda_\mu^* \text{ [13]}$$

sind die f^ν für $\nu \geqq 1$ bei festem λ beschränkt [14]*, alle f^ν und g sind stetig und die partiellen Ableitungen*

$$f^{\nu}_{y_\varkappa},\ g_{y_\varkappa},\ f^{\nu}_{\lambda_\varkappa},\ g_{\lambda_\varkappa}$$

existieren und sind stetig; schließlich sind diese Ableitungen noch $(k-1)$-mal $(k \geqq 1)$ stetig differenzierbar nach allen $m + n + 1$ Argumenten x, y_ϱ, λ_ϱ.

Die Funktion $\omega(\mathfrak{y}, \lambda)$ ist im Bereich

$$\mathfrak{y} \text{ beliebig}, \quad \Lambda_\mu \leqq \lambda_\mu \leqq \Lambda_\mu^* \text{ [13]}$$

nach allen $m + n$ Argumenten k-mal stetig differenzierbar.

Behauptung. *Für beliebige ξ, λ aus den Intervallen*

$$a \leqq \xi \leqq b, \quad \Lambda_\mu \leqq \lambda_\mu \leqq \Lambda_\mu^* \text{ [13]}$$

hat die Differentialgleichung (1) *in dem Bereich*

$$a \leqq x \leqq b, \quad \mathfrak{y} \text{ beliebig}$$

genau ein Integral

$$z = \psi(x, \mathfrak{y}; \xi, \lambda)$$

mit dem Anfangswert

$$\psi(\xi, \mathfrak{y}; \xi, \lambda) = \omega(\mathfrak{y}, \lambda). \tag{2}$$

---

[13]) Hier gilt wieder die Fußnote [3]) von S. 257.

[14]) Diese Voraussetzung kann auch durch folgende ersetzt werden: Bei festem λ sind die partiellen Ableitungen $f^{\nu}_{y_\varkappa}$ für $\nu \geqq 1$ beschränkt.

Dieses Integral ist in dem Bereich

$$a \leqq x,\ \xi \leqq b,\quad \mathfrak{y}\ \text{beliebig},\quad \Lambda_\mu \leqq \lambda_\mu \leqq \Lambda_\mu^* \tag{3}$$

k-mal stetig differenzierbar nach allen $m + n + 2$ *Argumenten* $x,\ \xi,\ y_\varkappa,\ \lambda_\varkappa$.

Sind

$$y_\nu = \varphi_\nu(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

die charakteristischen Funktionen[15]) *des Differentialgleichungssystems*

$$y'(x) = f^\nu(x, \mathfrak{y}, \lambda) \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

so ist das Integral durch die Parameterdarstellung

$$\begin{cases} y_\nu = \varphi_\nu(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) & (\nu = 1, \ldots, n), \\ z \ = e^F \{\omega(\eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) + \int\limits_\xi^x g(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \lambda)\, e^{-F}\, dx\} \end{cases} \tag{6}$$

mit

$$F = F(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) = \int\limits_\xi^x f^0(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \lambda)\, dx$$

und den Parametern $\eta_1, \ldots, \eta_n$ *gegeben*[16]).

Beweis. Das Integral wird nach der klassischen Methode konstruiert, indem durch jeden Punkt

$$\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \zeta = \omega(\eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) \tag{7}$$

eine Charakteristik der partiellen Differentialgleichung (1) gelegt und gezeigt wird, daß sich diese Charakteristiken bei festem ξ zu einer Integralfläche zusammenschließen.

Für die partielle Differentialgleichung (1) bestehen die charakteristischen Gleichungen aus dem System (5) und der Gleichung

$$z'(x) = f^0(x, \mathfrak{y}, \lambda)\, z + g(x, \mathfrak{y}, \lambda). \tag{8}$$

---

[15]) D. h. die Integralkurven von (5), die durch den Punkt $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ gehen.

[16]) Gewöhnlich beschränkt man sich auf eine homogene Differentialgleichung (1), d. h. auf den Fall, daß $f^0 \equiv g \equiv 0$ ist. Dann ist der Satz vollständig in dem Fundamentalsatz über charakteristische Funktionen enthalten. Weiter geht man nun sofort zu quasilinearen Differentialgleichungen über. Die größere Allgemeinheit der Differentialgleichung bedingt dann eine stärkere Einschränkung des Existenzbereiches; vgl. dazu etwa Ka, DGlen 1930, S. 335ff. und WAŻEWSKI, Annales des la Société Polonaise Mathématique 12 (1934), S. 6—15. Bei allgemeinen linearen Differentialgleichungen, die gewöhnlich gar nicht behandelt werden, sind solche Einschränkungen nicht nötig. Gerade das wird aber bisweilen gebraucht; vgl. z. B. den Schluß von § 2.

Das System (5) läßt sich gesondert behandeln; seine Lösungen sind die Funktionen (4). Diese existieren in dem Bereich (3). Denn bei festem λ sind die Funktionen f^ν für $\nu \geqq 1$ beschränkt, etwa $|f^\nu| \leqq A$. Daher folgt aus (5) $|y_\nu'| \leqq A$, und hieraus, daß jede einzelne Integralkurve des Systems (5) beschränkte Ordinaten y hat[17]). Da die Integralkurve nach beiden Seiten an den Rand des Bereiches

$$a \leqq x \leqq b, \quad \eta \text{ beliebig}$$

herankommen muß, in dem die f^ν stetig sind, kann das daher nur so geschehen, daß sie an den linken und rechten Rand gelangt. Sie existiert also bei beliebigem $a \leqq \xi \leqq b$ und beliebigen $\eta_1, \ldots, \eta_n$, λ in dem ganzen Intervall $a \leqq x \leqq b$, d. h. die Funktionen (4) existieren in dem ganzen Bereich (3). Ferner sind sie dort nach allen $m + n + 2$ Argumenten k-mal stetig differenzierbar[18]).

Werden die Funktionen (4) in die Gleichung (8) eingetragen, so erhält man aus dieser Gleichung für die durch den Punkt (7) gehende Charakteristik auch noch die letzte der Gleichungen (6).

Die rechten Seiten der Gleichungen (6) sind nach dem Vorangehenden und den Voraussetzungen über die f^ν und g k-mal stetig differenzierbar nach $x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda$. Die n Gleichungen der ersten Zeile von (6) sind für beliebige $y_1, \ldots, y_1$ eindeutig nach $\eta_1, \ldots, \eta_n$ auflösbar, und zwar ergibt sich aus der Bedeutung der Funktionen φ_ν

$$\eta_\nu = \varphi_\nu(\xi, x, y_1, \ldots, y_n, \lambda) \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

---

[17]) Gilt statt der Beschränktheit der f^ν die auf S. 275, Fußnote [14]) angegebene Voraussetzung, so ergibt sich das folgendermaßen: Es sei etwa $|f^\nu_{y_\varkappa}| \leqq A$ für $\nu \geqq 1$. Nach dem Mittelwertsatz ist dann

$$|f^\nu(x, \eta, \lambda) - f^\nu(x, 0, \lambda)| \leqq A \sum_{\varkappa=1}^{n} |y_\varkappa|.$$

Da die $f^\nu(x, 0, \lambda)$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetig sind, sind sie dort bei festem λ beschränkt, etwa dem absoluten Betrage nach $\leqq B$, so daß

$$|f^\nu(x, \eta, \lambda)| \leqq A \sum_{\varkappa} |y_\varkappa| + B$$

ist. Aus (5) folgt dann

$$\sum_{\nu=1}^{n} |y_\varkappa'(x)| \leqq nA \sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu| + nB,$$

und hieraus nach Ka, DGlen 1930, S. 155

$$\Sigma |y_\nu| \leqq \left(\Sigma |\eta_\nu| + \frac{B}{A}\right) e^{nA(b-a)}.$$

[18]) Vgl. Fußnote [5]) auf S. 259.

Trägt man dieses in die zweite Zeile von (6) ein, so wird daraus eine Funktion

$$z = \psi(x, \mathfrak{y}; \xi, \lambda),$$

die in dem Bereich (3) nach allen ihren Argumenten k-mal stetig differenzierbar ist und für $x = \xi$ den Wert (2) hat. Sie ist also die gesuchte Integralfläche, wenn durch jeden ihrer Punkte eine Charakteristik von (1) geht, die der Fläche angehört; so ist diese aber gerade konstruiert.

Es bleibt noch zu zeigen, daß es bei festem ξ, λ nur *eine* Integralfläche mit dem Anfangswert (2) gibt. Es sei $z = \psi$ eine derartige Integralfläche und $x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, z_0$ ein beliebiger Punkt dieser Fläche. Die durch den Punkt $x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}$ gehende Integralkurve

$$y_\nu = \varphi_\nu(x, x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, \lambda) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{9}$$

des Systems (5) ist unabhängig von z_0 eindeutig bestimmt und existiert, wie oben gezeigt, im ganzen Intervall $a \leqq x \leqq b$. Für die Funktionen (9) wird

$$\chi(x) = \psi(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \xi, \lambda) \tag{10}$$

gesetzt, so daß also

$$\chi(x_0) = \psi(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}; \xi, \lambda) = z_0$$

ist. Aus (10) folgt, da die φ_ν dem System (5) genügen,

$$\chi'(x) = \psi_x + \sum_\nu \psi_{y_\nu} \varphi_\nu'(x) = \psi_x + \sum_\nu \psi_{y_\nu} f^\nu,$$

also, da ψ ein Integral von (1) ist,

$$\chi'(x) = f^0 \chi + g, \tag{11}$$

wobei für die y_ν die Größen (9) einzutragen sind. Die Funktionen (9) und (10) bilden also eine Charakteristik der Differentialgleichung (1), und zwar eine solche, die der Integralfläche angehört. Wird

$$\eta_\nu = \varphi_\nu(\xi, x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, \lambda) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gesetzt, so muß daher

$$\chi(\xi) = \omega(\eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda)$$

sein. Durch diesen Anfangswert und die Gleichung (11) ist $\chi(x)$ unabhängig von dem Integral $z = \psi$ ebenfalls eindeutig bestimmt, insbesondere ist also $z_0 = \chi(x_0)$ eindeutig bestimmt.

§ 4.

Existenz- und Eindeutigkeitssatz für explizite lineare Involutionssysteme.

Es handelt sich um Systeme

$$(1)\quad \frac{\partial z}{\partial x_\mu} = \sum_{\sigma=1}^{s} f^{\mu\sigma}(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, \lambda)\frac{\partial z}{\partial y_\sigma} + f^{\mu 0}(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, \lambda)\, z + g^\mu(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, \lambda) \quad (\mu = 1, \ldots, r);$$

dabei ist $r > 1$, und es ist wieder $\mathfrak{y}$ für $y_1, \ldots, y_s$ und λ für $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ geschrieben.

Haben die Koeffizienten $f^{\mu\sigma}$, g^μ in einem Gebiet $\mathfrak{G}(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y})$ bei festem λ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, so erfüllt jede stetig differenzierbare Lösung des Systems (1) auch die Gleichungen [19])

$$\sum_{\varrho=1}^{s}\Big\{\sum_{\sigma=1}^{s}(f^{\mu\varrho}_{y_\sigma} f^{\nu\sigma} - f^{\nu\varrho}_{y_\sigma} f^{\mu\sigma}) - f^{\mu\varrho}_{x_\nu} + f^{\nu\varrho}_{x_\mu}\Big\}\frac{\partial z}{\partial y_\varrho} + \Big\{\sum_{\sigma=1}^{s}(f^{\mu 0}_{y_\sigma} f^{\nu\sigma} - f^{\nu 0}_{y_\sigma} f^{\mu\sigma}) - f^{\mu 0}_{x_\nu} + f^{\nu 0}_{x_\mu}\Big\} z +$$
$$+ \sum_{\sigma=1}^{s}(g^\mu_{y_\sigma} f^{\nu\sigma} - g^\nu_{y_\sigma} f^{\mu\sigma}) - g^\mu_{x_\nu} + g^\nu_{x_\mu} - f^{\mu 0} g^\nu + f^{\nu 0} g^\mu = 0$$
$$(\mu, \nu = 1, \ldots, r).$$

Sind diese Gleichungen für beliebige Funktionen z erfüllt, d. h. sind die sogenannten Integrabilitätsbedingungen

$$(2)\quad \begin{cases} \sum_{\sigma=1}^{s}(f^{\mu\varrho}_{y_\sigma} f^{\nu\sigma} - f^{\nu\varrho}_{y_\sigma} f^{\mu\sigma}) = f^{\mu\varrho}_{x_\nu} - f^{\nu\varrho}_{x_\mu} \\ \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, r;\ \varrho = 0, 1, \ldots, s) \\ \sum_{\sigma=1}^{s}(g^\mu_{y_\sigma} f^{\nu\sigma} - g^\nu_{y_\sigma} f^{\mu\sigma}) = g^\mu_{x_\nu} - g^\nu_{x_\mu} + f^{\mu 0} g^\nu - f^{\nu 0} g^\mu \\ \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, r) \end{cases}$$

erfüllt, so heißt das System (1) ein Involutionssystem. Involutionssysteme in diesem Sinne sind auch Involutionssysteme im Sinne von § 2.

---

[19]) Für zweimal stetig differenzierbare Lösungen z ergibt sich das daraus, daß $\frac{\partial^2 z}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_\nu \partial x_\mu}$ ist. Trägt man hierin für $\frac{\partial z}{\partial x_\nu}$ und $\frac{\partial z}{\partial x_\mu}$ die rechten Seiten von (1) ein, so erhält man die obigen Gleichungen, wenn man die Gleichungen (1) nochmals berücksichtigt. Für Lösungen z, die nur einmal stetig differenzierbar sind, ist das obige Ergebnis im Falle $f^{\mu 0} \equiv g^\mu \equiv 0$ zuerst von E. SCHMIDT [Monatshefte für Mathematik und Physik **48** (1939), S. 426–432] bewiesen. Einen einfacheren Beweis hat O. PERRON [Math. Annalen **117** (1941), S. 687–693] gegeben. Dieser Beweis läßt sich nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn PERRON auch auf den allgemeineren Fall der Gleichung (1) ausdehnen.

Satz 4. Voraussetzung. *In dem Bereich*

(3) $a_\mu \leqq x_\mu \leqq b_\mu\ (\mu = 1, \ldots, r)$; $\mathfrak{y}$ *beliebig*; $\Lambda_\varkappa \leqq \lambda_\varkappa \leqq \Lambda_\varkappa^*$ [20])

sind die $f^{\mu\sigma}$ *für* $\sigma > 1$ *bei festem* λ *beschränkt* [21]), *alle* $f^{\mu\sigma}$ *und* g^μ *sind* k*-mal stetig differenzierbar* ($k \geqq 1$) *nach allen* $r + s + m$ *Argumenten* $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, $\lambda_\varkappa$. *Schließlich sind die Integrabilitätsbedingungen* (2) *erfüllt.*

Die Funktion $\omega(\mathfrak{y}, \lambda)$ *ist im Bereich*

$$\mathfrak{y} \text{ beliebig}, \quad \Lambda_\varkappa \leqq \lambda_\varkappa \leqq \Lambda_\varkappa^* \text{ [20])}$$

nach allen $m + s$ *Argumenten* k*-mal stetig differenzierbar.*

Behauptung. *Für beliebige* ξ_μ, λ *aus den Intervallen*

$$a_\mu \leqq \xi_\mu \leqq b_\mu, \quad \Lambda_\varkappa \leqq \lambda_\varkappa \leqq \Lambda_\varkappa^* \text{ [20])}$$

hat das Differentialgleichungssystem (1) *in dem Bereich*

$$a_\mu \leqq x_\mu \leqq b_\mu\ (\mu = 1, \ldots, r), \quad \mathfrak{y} \text{ beliebig}$$

genau ein Integral

(4) $$z = \psi(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, \lambda)$$

mit den Anfangswerten

(5) $$\psi(\xi_1, \ldots, \xi_r, \mathfrak{y}, \lambda) = \omega(\mathfrak{y}, \lambda).$$

Dieses Integral ist in dem Bereich (3) *nach allen* $r + s + m$ *Argumenten* $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, λ k*-mal stetig differenzierbar.*

Beweis. Man kann genau nach dem Muster des Beweises zu Satz 2 verfahren.

(A) *Eindeutigkeitsbeweis.* Es sei (4) ein Integral des Systems (1) mit den Anfangswerten (5). Für $r + 1$ unabhängige Veränderliche $u, u_1, \ldots, u_r$ innerhalb der Intervalle

$$0 \leqq u \leqq 1, \ a_\mu - \xi_\mu \leqq u_\mu \leqq b_\mu - \xi_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, r)$$

wird

$$x_\mu = \xi_\mu + u\, u_\mu$$

gesetzt. Dann nehmen die x_μ alle Werte innerhalb des durch die ersten Ungleichungen von (3) gegebenen Bereiches an. Weiter wird für diese x_μ

$$Z(u, u_1, \ldots, u_r, \mathfrak{y}, \lambda) = \psi(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, \lambda),$$

$$Q_\nu(u, u_1, \ldots, u_r, \mathfrak{y}, \lambda) = Z_{y_\nu} = \psi_{y_\nu}$$

---

[20]) Hier gilt wieder die Fußnote [3]) von S. 257.

[21]) Diese Voraussetzung kann durch die folgende ersetzt werden: Bei festem λ sind die Ableitungen $f^{\mu\sigma}_{y_\varrho}$ für $\sigma > 1$ beschränkt.

gesetzt. Dann ist

$$Z_u = \sum_{\varrho=1}^{r} u_\varrho \psi_{z_\varrho} = \sum_{\varrho=1}^{r} u_\varrho \Big(\sum_{\sigma=1}^{s} f^{\varrho\sigma} Z_{y_\sigma} + f^{\varrho 0} Z + g^\varrho \Big),$$

$$Z_{u_\mu} = u\, \psi_{z_\mu} = u \Big(\sum_{\sigma=1}^{s} f^{\mu\sigma} Z_{y_\sigma} + f^{\mu 0} Z + g^\mu \Big).$$

Wird

$$(6) \qquad \begin{cases} F^\sigma = \sum_{\varrho=1}^{r} u_\varrho f^{\varrho\sigma} \ (\sigma = 0, \ldots, s), & G = \sum_{\varrho=1}^{r} u_\varrho g^\varrho, \\ F^{\mu\sigma} = u\, f^{\mu\sigma} \qquad (\sigma = 0, \ldots, s), & G^\mu = u g^\mu \end{cases}$$

gesetzt, so ist daher

$$(7) \qquad F^\sigma(u, v, \ldots, 0, \eta, \lambda) = 0, \quad G(u, 0, \ldots, 0, \eta, \lambda) = 0$$

und Z genügt den linearen Differentialgleichungen

$$(8) \qquad \begin{cases} Z_u = \sum_{\sigma=1}^{s} F^\sigma Z_{y_\sigma} + F^0 Z + G, \\ Z_{u_\mu} = \sum_{\sigma=1}^{s} F^{\mu\sigma} Z_{y_\sigma} + F^{\mu\sigma} Z + G^\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, r). \end{cases}$$

Ferner ergeben die Anfangsbedingungen

$$(9) \qquad \left\{ \begin{matrix} Z(0, u_1, \ldots, u_r, \eta, \lambda) \\ Z(u, 0, \ldots, 0, \eta, \lambda) \end{matrix} \right\} = \omega(\eta, \lambda),$$

und offenbar ist

$$(10) \qquad \psi(x_1, \ldots, x_r, \eta, \lambda) = Z(1, x_1 - \xi_1, \ldots, x_r - \xi_r, \eta, \lambda).$$

Die eindeutige Bestimmtheit von ψ besagt daher dasselbe wie die eindeutige Bestimmtheit von $Z(1, u_1, \ldots, u_r, \eta, \lambda)$ für $a_\mu - \xi_\mu \leqq u_\mu \leqq b_\mu - \xi_\mu$.

Für den Beweis dieser letzten Tatsache werden von den Gleichungen (8) und (9) jeweils nur die ersten Zeilen gebraucht. Die erste Zeile von (8) kann als eine partielle lineare Differentialgleichung für eine Funktion Z angesehen werden, die von den unabhängigen Veränderlichen u und $y_\varkappa$ und von den Parametern $u_\varkappa$ und λ abhängt. Aus dem Satz 3 folgt dann, daß die Funktion Z durch die in der ersten Zeile von (9) stehende Anfangsbedingung eindeutig bestimmt ist; insbesondere gilt das also für die Funktion (10).

(B) *Existenzbeweis.* Es werden wieder die Funktionen (6) und mit diesen das Gleichungssystem (8) gebildet. Dieses ist nach dem Hilfssatz 1 von § 2 ebenfalls ein Involutionssystem.

Zunächst wird die Differentialgleichung der ersten Zeile von (8) für sich betrachtet. In ihr werden $u, y_1, \ldots, y_s$ als unabhängige Veränderliche und

$u_1, \ldots, u_r, \lambda$ als Parameter behandelt. Auf die Differentialgleichung ist der Satz 3 anwendbar und ergibt die Existenz eines Integrals

$$Z = \Psi(u, \mathfrak{y}; u_1, \ldots, u_r, \lambda),$$

das die erste Zeile von (9) erfüllt, und zwar in dem Bereich

$$0 \leqq u \leqq 1,\ a_\mu - \xi_\mu \leqq u_\mu \leqq b_\mu - \xi_\mu,\ \mathfrak{y} \text{ beliebig},\ \Lambda_\varkappa \leqq \lambda_\varkappa \leqq \Lambda_\varkappa^*,$$

und weiter, daß dieses Integral k-mal stetig differenzierbar nach allen $r + s + m + 1$ Argumenten ist. Wegen (7) folgt aus der ersten Zeile von (8) $Z_u = 0$ für $u_1 = \cdots = u_r = 0$, also ist $\Psi(u, \mathfrak{y}; 0, \ldots, 0, \lambda)$ bei festen $y_\varkappa, \lambda$ von u unabhängig. Wegen der ersten Zeile von (9) erfüllt daher Ψ auch die zweite Zeile von (9).

Wie am Ende von § 2 ergibt sich nun auch hier, daß

$$\psi(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, \lambda) = \Psi(1, \mathfrak{y}; x_1 - \xi_1, \ldots, x_r - \xi_r, \lambda)$$

das gesuchte Integral ist.

§ 5.

Zu der Bildung vollständiger Systeme von homogenen linearen Differentialgleichungen.

Es sei das System von homogenen linearen Differentialgleichungen in nicht aufgelöster Form

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} f^{\mu k}(\mathfrak{x}) \frac{\partial z}{\partial x_k} = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

gegeben, wobei $\mathfrak{x}$ für $x_1, \ldots, x_n$ geschrieben und $z = z(\mathfrak{x})$ die gesuchte Funktion ist.

Haben die Koeffizienten $f^{\mu k}$ in einem Gebiet $\mathfrak{G}(\mathfrak{x})$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, so erfüllt jede stetig differenzierbare Lösung des Systems die Gleichungen[22])

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{n} \left(f^{\mu k}_{x_\varrho} f^{\nu \varrho} - f^{\nu k}_{x_\varrho} f^{\mu \varrho}\right) \frac{\partial z}{\partial x_k} = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots m).$$

Auf Grund dieser Tatsache finden sich in der Literatur — und zwar, soweit mir bekannt ausnahmslos[23]) — Ausführungen etwa folgender Art:

---

[22]) Für den Beweis s. Fußnote [19]) auf S. 279.

[23]) Es seien etwa genannt: SERRET-SCHEFFERS, Differential- und Integralrechnung, Bd. 3, 6. Aufl., Leipzig und Berlin 1924, S. 566ff. É. GOURSAT, a. a. O., S. 65ff. CARATHÉODORY, a. a. O., S. 33.

Man streiche diejenigen Gleichungen des Systems (1), die sich aus den übrigen linear komponieren lassen. D. h. es ist die ν-te Gleichung zu streichen, wenn für gewisse Funktionen $\lambda_\mu(x)$

$$f^{\nu k}(x) = \sum_{\mu \neq \nu} \lambda_\mu(x) f^{\mu k}(x) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

ist. In der Tat liefert dann die ν-te Zeile keinen Beitrag zur Bestimmung der Lösung des Systems und kann daher gestrichen werden.

In dieser Weise sei das System (1) bereits auf die geringste Anzahl von Gleichungen reduziert. Ist nun weiter auch jede der Gleichungen (2) eine lineare Komposition der Gleichungen (1), so heißt das System (1) vollständig. Sind dagegen einzelne der Gleichungen (2) von den Gleichungen (1) linear unabhängig, so füge man sie zu dem System (1) hinzu. Es entsteht dann ein System von m_1 Gleichungen, bei dem, wenn die $f^{\mu k}$ hinreichend oft stetig differenzierbar sind, das eben geschilderte Verfahren wiederholt wird. D. h. es werden zu diesem neuen System wieder alle Gleichungen (2) gebildet. Entweder zeigt sich dann, daß das System der m_1 Gleichungen vollständig ist, oder einzelne der neuen Gleichungen (2) sind von den m_1 Gleichungen linear unabhängig. Diese werden dann zu den m_1 Gleichungen hinzugefügt. In dieser Weise fährt man fort. Es wird geschlossen, daß nach endlich vielen Schritten ein vollständiges System gewonnen ist und daß dieses aus höchstens n Gleichungen besteht. Zur Begründung wird angegeben, daß in jeder Matrix

$$\begin{pmatrix} f^{11}, \ldots, f^{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f^{m1}, \ldots, f^{mn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

die Zeilen voneinander linear abhängig sind, wenn der Rang der Matrix $< m$ ist, und dieser Fall liegt offenbar immer vor, wenn $m > n$ ist.

Es ist richtig, daß in der Matrix (3), wenn ihr Rang an jeder Stelle des betrachteten Gebietes $\mathfrak{G}$ kleiner als m ist, die Zeilen voneinander linear abhängig sind, d. h. daß es dann Funktionen $\lambda_\mu(x)$ gibt, so daß im ganzen Gebiet $\sum |\lambda_\mu| > 0$ und

$$\sum_\mu \lambda_\mu f^{\mu k} = 0 \quad \text{für } k = 1, \ldots, n$$

ist. Aber daraus kann man nicht schließen, daß nun eine Zeile von (3) und damit von (1) sich in dem ganzen Gebiet $\mathfrak{G}$ oder auch nur in einer hinreichend kleinen Umgebung eines beliebigen Punktes von $\mathfrak{G}$ aus den übrigen Zeilen linear komponieren läßt.

Z. B. hat für $m = n = 2$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$$

überall einen Rang < 2, wenn — es ist $x_1 = x$, $x_2 = y$ gesetzt —

$$f^{11} = |x|^3 + x^3, \quad f^{12} = |y|^3 + y^3,$$
$$f^{21} = |y|^3 - y^3, \quad f^{22} = |x|^3 - x^3$$

ist. Für $x > 0$, $y > 0$ lautet die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2x^3 & 2y^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d. h. die zweite Zeile und nur diese Zeile des Differentialgleichungssystems kann gestrichen werden. Für $x < 0$, $y < 0$ lautet die Matrix dagegen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2y^3 & 2x^3 \end{pmatrix},$$

d. h. jetzt darf die erste Zeile und nur diese gestrichen werden. Betrachtet man die Matrix und das zugehörige Differentialgleichungssystem in der ganzen x, y-Ebene oder, um singuläre Stellen zu vermeiden, in der längs der negativen y-Achse aufgeschnittenen Ebene, so kann also, obwohl der Rang überall < 2 ist, das System nicht durch Streichen einer Zeile reduziert werden.

Dem Verfahren zur Bildung reduzierter vollständiger Systeme und den begleitenden Behauptungen kommt hiernach keine Allgemeingültigkeit zu, wenn das Verfahren auch bei speziellen Beispielen von großem Nutzen sein kann.

(Eingegangen am 14. Dezember 1942.)

Zur Geometrie der Zahlen.

Von

Edmund Hlawka in Wien.

§ 1.

Einleitung.

Die folgenden Ausführungen beziehen sich stets auf den n-dimensionalen euklidischen Raum R_n. Zugrunde gelegt wird ein orthogonales Koordinatensystem. Der Punkt mit den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ wird mit $\mathfrak{x}$ bezeichnet. Sind die Koordinaten alle ganzzahlig, so bezeichnen wir sie mit $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{l}$ oder $\mathfrak{r}$. Es sei $n \geqq 2$.

Wir betrachten nun im R_n einen konvexen Körper K mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung $\mathfrak{o}$. Seine Distanzfunktion sei $f(\mathfrak{x})$. Diese ist bekanntlich homogen vom ersten Grad, symmetrisch in bezug auf $\mathfrak{o}$ und sie erfüllt die Ungleichung

$$f(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) \leqq f(\mathfrak{x}) + f(\mathfrak{y}). \tag{a}$$

Dann lautet der Fundamentalsatz von Minkowski*) [1]: Besitzt K ein Volumen $V \geqq 2^n$, so liegt in K mindestens ein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes Gitterpunktpaar $\pm \mathfrak{g}$ oder anders ausgesprochen: Es gibt zu jeder Zahl $M_h \geqq \left(\frac{V}{J}\right)^{\frac{1}{n}}$ ein $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}$, so daß

$$f(\mathfrak{g}) \leqq M_h. \tag{b}$$

Dabei ist J das Volumen des Eichkörpers $f(\mathfrak{x}) = 1$. Man sieht sofort, daß es konvexe Körper gibt mit einem Volumen $V < 2^n$, ja bei denen sogar $V \leqq \varepsilon$ ist ($\varepsilon > 0$, sonst aber beliebig) und trotzdem (b) gilt. Betrachten wir z. B. das Parallelepiped $P: |x_1| \leqq \frac{\varepsilon}{2 \cdot 4^{n-1}}$, $|x_i| \leqq 2$ $(i = 2, \ldots, n)$, dessen Volumen $V = \varepsilon$ ist und welches den Gitterpunkt mit den Koordinaten $g_1 = 0$, $g_2 = \cdots = g_n = 1$ enthält. Die Sache wird aber anders, wenn wir mit Minkowski die Klasse $\Gamma(K)$ aller konvexen Körper betrachten, die aus K durch volumentreue affine Transformationen, bei denen $\mathfrak{o}$ festbleibt, hervorgehen. Von dieser Klasse $\Gamma(K)$ hat Minkowski folgendes behauptet: Ist

*) Die eckigen Klammern verweisen auf das Schriftenverzeichnis am Ende der Arbeit.

das Volumen $V < 2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^n}$, so gibt es in $\Gamma(K)$ stets einen konvexen Körper K', der außer $\mathfrak{o}$ keine weiteren Gitterpunkte mehr enthält oder anders ausgesprochen: Es gibt stets eine unimodulare Matrix $\mathfrak{A}$, so daß für alle $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}$

$$f(\mathfrak{A}\mathfrak{g}) > \left(\frac{V}{J}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Dabei ist es nicht notwendig vorauszusetzen, daß die Distanzfunktion von K die Eigenschaft (a) besitzt. Man nennt solche Körper Strahlkörper. Minkowski hat für diesen Satz keinen Beweis veröffentlicht und es ist auch seither, soviel ich weiß, keiner veröffentlicht worden. Es ist mir nun gelungen, einen Beweis dafür zu erbringen, indem ich zunächst in § 2 folgenden Satz (Deformationssatz) beweise: Ist M eine beschränkte, im Jordanschen Sinne meßbare Menge und $\varphi(\mathfrak{x})$ eine auf M definierte beschränkte, im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine unimodulare Matrix $\mathfrak{A}$, so daß

$$\sum_{\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}} \varphi(\mathfrak{A}\mathfrak{g}) \leqq \int_M \varphi(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} + \varepsilon$$

ist. Dabei erstreckt sich die Summe links über alle Gitterpunkte $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}$. Aus diesem Satz wird dann in § 3 die Behauptung von Minkowski hergeleitet.

Wir haben bis jetzt das homogene Problem (b) betrachtet. Das inhomogene Problem besteht darin, eine Zahl M_J so zu bestimmen, so daß es zu jedem $\mathfrak{x}_0$ des R_n wenigstens ein $\mathfrak{g}$ gibt, wobei jetzt auch $\mathfrak{o}$ zugelassen wird, so daß

$$f(\mathfrak{g} + \mathfrak{x}_0) \leqq M_J$$

wird. M_J hängt im Gegensatz zu M_n nicht vom Volumen V von K ab; z. B. gibt es keinen Gitterpunkt $\mathfrak{g}$, so daß das Parallelepiped

$$|x_1 + g_1| \leqq \frac{1}{4},\quad |x_2 + g_2| \leqq V,\quad |x_i + g_i| \leqq \tfrac{1}{2}\quad (i = 3, \ldots, n)$$

mit dem Volumen V den Punkt $\mathfrak{x}_0$ mit den Koordinaten $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \cdots = x_n = 0$ enthält, wie groß auch V sein mag. Das inhomogene Problem ist in der letzten Zeit mehrfach behandelt worden. Mahler hat folgendes gezeigt: Ist $\overline{M}$ das erste Minimum des polaren Körpers $\overline{K}$ von K, so ist $M_J \cdot \overline{M} \geqq [(n+1)!]^2$. Mit dem Fall $n = 2$ hat sich besonders Heinhold [6] beschäftigt.

Ich beweise in § 6 folgenden Alternativsatz, der dem Alternativsatz bei linearen Gleichungssystemen analog ist: Besitzt der konvexe Körper K ein

Volumen $V \geqq 2^{n-1} \cdot k_0$ (k_0 natürliche Zahl) und gibt es höchstens $k_0 - r - 1$ Gitterpunktpaare $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}$ $\left(0 \leqq r \leqq k_0 - \left[\frac{k_0}{2}\right] - 1\right)$, so daß

$$f(\mathfrak{g}) < M_k \qquad M_k \geqq \left(\frac{V}{J}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{c}$$

so gibt es zu jedem $\mathfrak{x}_0$ mindestens $r+1$ Gitterpunkte $\bar{\mathfrak{g}}$, so daß

$$f(\bar{\mathfrak{g}} + \mathfrak{x}_0) \leqq M_k \tag{d}$$

ist. Der Satz gilt nicht mehr, wenn $V < 2^{n-1} k_0$. Betrachten wir das Parallelepiped $|x_1| \leqq \frac{1}{2}(1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}}$, $|x_2| \leqq k_0 (1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}}$, $|x_i| \leqq (1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}}$ $(i = 3, \ldots, n)$, dessen Volumen $V = 2^{n-1} k_0 (1-\varepsilon)$ ist. Es enthält die $k_0 - 1$ von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Gitterpunktpaare $\pm \mathfrak{g}_j$ $(j = 1, \ldots, k_0 - 1)$, deren Koordinaten $g_{j1} = 0$, $g_{j2} = \pm j$, $g_{ji} = 0$ $(i = 3, \ldots, n)$ sind. Trotzdem gibt es keinen Gitterpunkt $\mathfrak{g}$ mit den Koordinaten $g_1, \ldots, g_n$, so daß

$$|g_1 + \tfrac{1}{2}| \leqq \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}}, \quad |g_2| \leqq k_0 (1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}}, \quad |g_i| \leqq (1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}} \quad (i = 3, \ldots, n)$$

ist. Ist das Volumen $V \geqq 2^{n-1} k_0$, so gibt es im allgemeinen auch nicht mehr als $r+1$ Gitterpunkte, die (d) erfüllen, wie man am Parallelepiped $|x_1| \leqq \frac{6}{7}$, $|x_2| \leqq \frac{2}{3}$, $|x_i| \leqq \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{1}{n-2}}$ $(i = 3, \ldots, n)$ sieht. Sein Volumen ist 2^{n-1} und es enthält keinen von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Gitterpunkt. Es gibt aber nur einen Gitterpunkt $\mathfrak{g}$, nämlich $\mathfrak{o}$, so daß

$$|g_1 + \tfrac{1}{8}| \leqq \tfrac{6}{7}, \quad |g_2 + \tfrac{1}{8}| \leqq \tfrac{2}{3}, \quad |g_i| \leqq \left(\tfrac{7}{8}\right)^{\frac{1}{n-2}} \qquad (i = 3, \ldots, n)$$

ist. Der Alternativsatz ist in einem allgemeineren Satz enthalten. Um ihn einfach aussprechen zu können, führe ich folgende Bezeichnungen ein: $T_{\mathfrak{g}}$ sei die Translation, die $\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{g}$ überführt, $\mathfrak{t}_{\mathfrak{g}} M$ sei die Menge, die aus einer Menge M bei dieser Translation hervorgeht. Dann lautet der Satz: Sind K_1 und K_2 zwei konvexe Körper mit dem Mittelpunkt in $\mathfrak{o}$ und ist die Summe ihrer Volumina $V_1 + V_2 \geqq 2^n \cdot k_0$ und enthalten die Körper K_i $(i = 1, 2)$ höchstens $k_0 - r_i - 1$ Gitterpunktpaare $\neq \mathfrak{o}$, so erfüllen die konvexen Körper $\mathfrak{t}_{\mathfrak{g}} K_3$, wo $K_3 = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$ den R_n lückenlos, und zwar ist die Überdeckung mindestens $r+1$-fach, wo $r = \left[\frac{r_1 V_1 + r_2 V_2}{2\sqrt{V_1 V_2}}\right]$ ist. Setzt man $K_1 = K_2 = K$, so ist $V_1 = V_2$, $r_1 = r_2 = r$ $K_3 = K$, und man erhält den Alternativsatz. Der obige Satz enthält auch noch den folgenden Satz von Mordell [7]: Es seien $L_i(\mathfrak{x})$ n Linearformen in $\mathfrak{x}$ mit der Determinante 1. Weiter seien

$\mu_1 \ldots, \mu_n, \nu_1, \ldots, \nu_n$ positive Zahlen mit $\mu_1 \ldots \mu_n + \nu_1 \ldots \nu_n \geqq 1$. Dann gibt es wenigstens zu einem der drei Systeme einen Gitterpunkt $\mathfrak{g}$, so daß

$$|L_i(\mathfrak{g})| \leqq \mu_i \,(\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}), \quad |L_i(\mathfrak{g})| \leqq \nu_i \,(\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}), \quad |L_i(\mathfrak{g} + \mathfrak{x}_0)| \leqq \tfrac{1}{2}(\mu_i + \nu_i).$$

Die soeben ausgesprochenen Sätze sind nicht auf konvexe Körper beschränkt. Ich betrachte gleich allgemeiner folgende Mengen: Es sei M eine beschränkte abgeschlossene, im Jordanschen Sinne meßbare Menge und $\mathfrak{R}$ irgendeine Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{pmatrix},$$

wo die $k_i > 0$ sind. Dann lassen sich alle Sätze auf die Menge $M(\mathfrak{R})$ aller Punkte der Form $\mathfrak{R}^{-1}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})$ ($\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in M) übertragen. Die Sätze lassen sich für engere Klassen von Mengen verschärfen. In § 7 betrachte ich Mengen, ich nenne sie ω-konvex, die eine Distanzfunktion besitzen, bei denen statt (a) folgendes gilt: Sind k und k_0 irgendwelche natürliche Zahlen, aber $k > k_0$, so kann man aus k Punkten $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ stets $k_0 + 1$ Punkte $\mathfrak{x}'_0, \ldots, \mathfrak{x}'_{k_0}$ so herausgreifen, daß

$$f^\sigma(\mathfrak{x}'_0 - \mathfrak{x}'_i) \leqq \frac{c}{k - k_0} \sum_{j=1}^{k} f^\sigma(\mathfrak{x}_j) \qquad (i = 1, \ldots, k_0)$$

gilt. Dabei sind σ und c feste, positive Zahlen. Diese Eigenschaft ist stets dann vorhanden, wenn für jedes System von k Punkten $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k$

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} f^\sigma(\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_j) \leqq c\, k \sum_{j=1}^{k} f^\sigma(\mathfrak{x}_j)$$

gilt. Dies ist der Fall für $f^\sigma(\mathfrak{x}) = \sum_{i=1}^{n} |L_i(\mathfrak{x})|^\sigma$ ($\sigma \geqq 2$), wo die $L_i(\mathfrak{x})$ Linearformen in $\mathfrak{x}$ sind mit einer von Null verschiedenen Determinante, und zwar ist $c = 2^{\sigma-1}$ (v. d. Corput-Schaake [5]). Es wird in § 8 gezeigt, daß für ω-konvexe Mengen (c) und (d) mit $V \geqq \frac{k_0}{2} \frac{n+\sigma}{\sigma} c^{\frac{n}{\sigma}}$ gilt. Für die Ellipsoide ($\sigma = 2$, $c = 2$) ist wirklich $2^{-2+\frac{n}{2}}(n+2)\,k_0 < 2^{n-1} k_0$ ($n > 2$).

§ 2.

Deformationssatz.

Hilfssatz 1. *Es sei $F(x_1, x_2)$ eine reelle, im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion, welche außerhalb des Quadrates Q:*

$$|x_1| \leqq K, \quad |x_2| \leqq K$$

verschwindet und in Q beschränkt ist: $|F(x_1, x_2)| \leqq C$. *Dann gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *und zu jedem* $\beta > 0$, *welches nur kleiner als*

$$c(\varepsilon) = \operatorname{Min}\left(K, \frac{\varepsilon}{42\,KC}, \frac{1}{4K}\left(\frac{\varepsilon}{21\,KC}\right)^2\right)$$

ist, ein α *im offenen Intervall* $\left(0, \frac{1}{\beta}\right)$, *so daß*

$$(1)\qquad \sum_g{}' \int_{-\infty}^{+\infty} F\left(\beta g + \left(\alpha - \frac{1}{\beta}\right) x_2, \beta g + \alpha x_2\right) dx_2 \leqq \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty}\int F\left(x_1 - \frac{x_2}{\beta}, x_1\right) dx_1\, dx_2 + \varepsilon \ldots$$

Dabei durchläuft g alle ganzen Zahlen mit Ausschluß der Null.

Wir verwenden folgenden Satz: Ist $f(x, y)$ über ein Rechteck im Riemannschen Sinne integrierbar, so sind die Funktionen

$$F_1(x) = \bar{\int} f(x, y)\, dy \quad \text{und}$$

$$F_2(y) = \bar{\int} f(x, y)\, dx$$

im Riemannschen Sinne integrierbar und es ist

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \int F_1(x)\, dx = \int F_2(y)\, dy$$

(s. A. Schoenfliess, Mengenlehre, S. 196; Haupt-Aumann, Differential- und Integralrechnung III). Wir schreiben stets

$$F_1(x) = \int f(x, y)\, dy, \quad F_2(y) = \int f(x, y)\, dx.$$

In demselben Sinne sind auch die mehrfachen Integrale in Hilfssatz 2 und Satz 1 aufzufassen.

Bemerkung. Die Reihe ist endlich und die Integrale sind eigentlich, weil F außerhalb Q verschwindet. Für den Beweis von (1) ist es notwendig, Schranken für die x_1, x_2, y zu bestimmen. Wenn F nicht verschwinden soll, so müssen die Argumente von F stets im Quadrat Q liegen; auf der linken Seite von (1) ist also

$$(2)\qquad -K \leqq -\beta g + \left(\frac{1}{\beta} - \alpha\right) x_2 \leqq K, \quad -K \leqq \alpha x_2 + \beta g \leqq K.$$

Daraus folgt durch Addition $|x_2| \leqq 2K\beta$. Multiplizieren wir nun die erste Ungleichung mit α, die zweite mit $\frac{1}{\beta} - \alpha$ und addieren dann die erste (zweite) Hälfte der ersten Ungleichung zur zweiten (ersten) Hälfte der zweiten, so erhalten wir $|\beta g| \leqq K$, also zusammen:

$$(3\,a)\qquad |x_2| \leqq 2K\beta, \quad |g| \leqq K_1 = \frac{K}{\beta}.$$

Für die Integrationsgrenzen auf der rechten Seite von (1) erhalten wir analog

$$|x_2| \leqq 2K\beta, \quad |x_1| \leqq K. \tag{3b}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$F\left(\beta g + \left(\alpha - \frac{1}{\beta}\right)x_2, \beta g + \alpha x_2\right) = F_1(\alpha, \beta, g, x_2), \; F\left(x_1 - \frac{x_2}{\beta}, x_1\right) = F(x_1, x_2, \beta)$$

und beachten noch, daß für alle $\beta > 0$, welche kleiner als $c(\varepsilon)$ sind,

$$3KC\beta \ln \frac{2K}{\beta} < \frac{\varepsilon}{7}$$

ist, da $e^{\frac{\varepsilon}{21KC\beta}} > \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{21KC\beta}\right)^2 > \frac{4K\beta}{2\beta^3} = \frac{2K}{\beta}$ ist.

Wir führen den Beweis des Hilfssatzes indirekt. Wir nehmen an, das Gegenteil von (1) sei richtig. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein positives $\beta < c(\varepsilon)$, so daß für alle α in $\left(0, \frac{1}{\beta}\right)$

$$\sum_g{}' \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\alpha, \beta, g, x_2)\, dx_2 > \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(x_1, x_2, \beta)\, dx_2 + \varepsilon$$

ist. Dann ist aber auch *)

$$\beta \int_0^{\frac{1}{\beta}} d\alpha \sum_g{}' \int_{-2K\beta}^{2K\beta} F_1(\alpha, \beta, g, x_2)\, dx_2 > \frac{1}{\beta} \int\int_{-\infty}^{+\infty} F_2(x_1, x_2, \beta)\, dx_1\, dx_2 + \varepsilon.$$

Nun ist

$$\left|\beta \int_0^{\frac{1}{\beta}} d\alpha \int_{-2K\beta}^{2K\beta} F_1(\alpha, \beta, 0, x_2)\, dx_2\right| \leqq 4KC\beta \leqq < \frac{4KC\varepsilon}{42KC} < \frac{\varepsilon}{7},$$

also

$$\beta \int_0^{\frac{1}{\beta}} d\alpha \sum_g \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\alpha, \beta, g, x_2)\, dx_2 > \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(x_1, x_2, \beta)\, dx_2 + \frac{6}{7}\varepsilon.$$

Dann ist aber entweder (1. Fall):

$$\beta \int_0^{\frac{1}{\beta}} d\alpha \sum_g \int_0^{\infty} F_1\, dx_2 > \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_0^{\infty} F_2\, dx_2 + \frac{3}{7}\varepsilon$$

*) Denn ist auf einem Intervall die Funktion $\varphi(x)$ stets > 0 so, so ist auch $\int \varphi\, dx > 0$.

oder (2. Fall):

$$\beta \int_0^{\frac{1}{\beta}} d\alpha \sum_g \int_{-\infty}^{0} F_1\, dx_2 > \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{0} F_2\, dx_2 + \frac{3}{7}\varepsilon.$$

Wir nehmen an, der erste Fall liege vor. Der zweite Fall wird analog behandelt. Es ist nun

$$\left|\beta \int_0^{\frac{1}{\beta}} d\alpha \sum_{-K \leqq g \leqq K_1} \int_0^{\beta^2} F_1\, dx_2\right| \leqq (2K_1 + 1) C\beta^2$$
$$= (2K + \beta) C\beta \leqq 3KC\beta < \frac{\varepsilon}{14}$$

und ebenso

$$\left|\frac{1}{\beta} \int_{-K}^{K} dx_1 \int_0^{\beta^2} F_2\, dx_2\right| \leqq 2KC\beta < \frac{\varepsilon}{14},$$

also

$$\beta \sum_g \int_{\beta^2}^{\infty} dx_2 \int_0^{\frac{1}{\beta}} F_1\, d\alpha > \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{\beta^2}^{\infty} F_2\, dx_2 + \frac{2}{7}\varepsilon.$$

Es ist nun

$$\left|\beta \sum_{-K_1 \leqq g \leqq K_1} \int_{\beta^2}^{2K\beta} dx_2 \int_{\left[\frac{x_2}{\beta^2}\right]\frac{\beta}{x_2}}^{\frac{1}{\beta}} F_1\, d\alpha\right| \leqq \beta\left(\frac{2K}{\beta} + 1\right) C \int_{\beta^2}^{2K\beta} dx_2 \left(\frac{1}{\beta} - \left[\frac{x_2}{\beta^2}\right]\frac{\beta}{x_2}\right)$$

$$= 3KC\beta \int_{\beta^2}^{2K\beta} \frac{dx_2}{x_2}\left(\frac{x_2}{\beta^2} - \left[\frac{x_2}{\beta^2}\right]\right) \leqq 3KC\beta \int_{\beta^2}^{2K\beta} \frac{dx_2}{x_2} = 3KC\beta \ln\frac{2K\beta}{\beta^2} < \frac{\varepsilon}{7},$$

also ist

$$\beta \sum_g \int_{\beta^2}^{\infty} dx_2 \int_0^{\left[\frac{x_2}{\beta^2}\right]\frac{\beta}{x_2}} F_1(\alpha, \beta, g, x_2)\, d\alpha > \frac{1}{\beta} \int_{-K}^{K} dx_1 \int_{\beta^2}^{\infty} F_2(x_1, x_2, \beta)\, dx_2 + \frac{\varepsilon}{7}.$$

Es ist nun

$$\frac{1}{\beta} \int_{-K}^{K} dx_1 \int_{\beta^2}^{\infty} F_2(x_1, x_2, \beta)\, dx_2 = \int_{-K}^{K} dx_1 \int_{\beta^2}^{\infty} dx_2 \int_0^{\frac{1}{\beta}} F_2(x_1, x_2, \beta)\, d\alpha$$

und

$$\left|\int_{-K}^{K} dx_1 \int_{\beta^2}^{2K\beta} dx_2 \int_{\left[\frac{x_2}{\beta^2}\right]\frac{\beta}{x_2}}^{\frac{1}{\beta}} F_2(x_1, x_2, \beta)\, d\alpha\right| \leqq 2KC \int_{\beta^2}^{2K\beta} dx_2 \left(\frac{1}{\beta} - \left[\frac{x_2}{\beta^2}\right]\frac{\beta}{x_2}\right) < \frac{\varepsilon}{7},$$

also

$$\beta \int_{\beta^2}^{\infty} dx_2 \sum_g \int_0^{\left[\frac{x_2}{\beta^2}\right]\frac{\beta}{x_2}} F_1\, d\alpha > \int_{\beta^2}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_0^{\left[\frac{x_2}{\beta^2}\right]\frac{\beta}{x_2}} F_2\, d\alpha.$$

Dann muß es aber ein ξ geben, so daß

$$\beta \sum_g \int_0^{\left[\frac{\xi}{\beta^2}\right]\frac{\beta}{\xi}} F_1\, d\alpha > \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_0^{\left[\frac{\xi}{\beta^2}\right]\frac{\beta}{\xi}} F_2\, d\alpha$$

oder anders geschrieben

$$\sum_{l=0}^{\left[\frac{\xi}{\beta^2}\right]-1} \int_{\frac{\beta l}{\xi}}^{\frac{\beta(l+1)}{\xi}} d\alpha \sum_g F_1 > \frac{1}{\beta} \sum_{l=0}^{\left[\frac{\xi}{\beta^2}\right]-1} \int_{\beta l}^{\beta(\lambda+1)} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} F_2\, dx_1.$$

Dann muß es aber ein l geben, so daß

$$\sum_g \int_{\frac{\beta l}{\xi}}^{\frac{\beta(l+1)}{\xi}} F\left(\alpha\xi + \beta g - \frac{1}{\beta}\,\xi, \beta g + \alpha\xi\right) d\alpha > \frac{1}{\beta} \int_{\beta l}^{\frac{\beta(l+1)}{\xi}} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} F_2\, dx_1.$$

Wir machen nun im linksstehenden Integral die Substitution $\alpha\xi + \beta g = x_1$, dann kommt

$$\frac{1}{\xi} \sum_g \int_{(l+g)\beta}^{(l+g+1)\beta} F\left(x_1 - \frac{\xi}{\beta}, x_1\right) dx_1 = \frac{1}{\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} F\left(x_1 - \frac{\xi}{\beta}, x_1\right) dx_1$$

$$> \frac{1}{\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} F\left(x_1 - \frac{\xi}{\beta}, x_1\right) dx_1.$$

Widerspruch.

Ich führe nun einige Abkürzungen ein. Ist

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

so setze ich

$$\mathfrak{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{x}_1' = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{x}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{x}_{n-1} = \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{x}_{n-2} = \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2,$$

$$\mathfrak{x}_{n-1}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad d\mathfrak{x} = dx_1 \dots dx_n, \quad d\mathfrak{x}_1 = d\mathfrak{x}_1' = dx_1,$$

$$d\mathfrak{x}_2 = d\mathfrak{x}_2' = dx_2, \quad d\mathfrak{x}_{n-1} = dx_2 \dots dx_n$$

und $d\mathfrak{x}_{n-2} = dx_3 \dots dx_n$, wenn $n \geqq 3$.

Dann kann ich den Hilfssatz 1 so aussprechen:

Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem $\beta > 0$, welches kleiner als $c(\varepsilon)$ ist, eine Matrix

$$\mathfrak{A}' = \begin{pmatrix} \beta\alpha - \frac{1}{\beta} \\ \beta \quad \alpha \end{pmatrix}, \qquad 0 < \alpha < \frac{1}{\beta},$$

so daß

$$(1') \qquad \sum_{g_1}{}' \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mathfrak{A}'(\mathfrak{g}_1' + \mathfrak{x}_2'))\, d\mathfrak{x}_2' \leqq \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\mathfrak{x}_1' + \mathfrak{x}_2')\, d\mathfrak{x}_1'\, d\mathfrak{x}_2' + \varepsilon$$

ist.

Es ist ja $\frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty}\int F\left(x_1 - \frac{x_2}{\beta}, x_1\right) dx_1\, dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int F(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2.$

Hilfssatz 2. *Es sei $\varphi(\mathfrak{x})$ eine reelle, beschränkte, im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion, die außerhalb des Würfels $|x_i| \leqq K$ $(i = 1, \dots, n)$ verschwindet. Dann gibt es einen Vektor $\mathfrak{b}_{n-1}$*

$$\mathfrak{b}_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathfrak{b}_{n-1}' \end{pmatrix},$$

so daß

$$(4) \qquad \sum_{g_1}{}' \sum_{\mathfrak{g}_{n-1}} \varphi(\mathfrak{g}_{n-1} + \mathfrak{b}_{n-1} g_1 + \mathfrak{g}_1) \leqq \sum_{g_1}{}' \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathfrak{x}_{n-1} + \mathfrak{g}_1)\, d\mathfrak{x}_{n-1}.$$

Dabei durchläuft $\mathfrak{g}_{n-1}$ alle Gitterpunkte, deren erste Koordinate Null ist, und g_1 durchläuft alle ganzen Zahlen mit Ausschluß der Null. Den Beweis von (4) führen wir indirekt. Nehmen wir an, (4) sei für alle $\mathfrak{b}_{n-1}$ falsch, insbesondere für alle $\mathfrak{b}_{n-1}$, für die

$$W: \quad 0 \leqq b_i \leqq 1 \qquad (i = 2, \dots n)$$

ist! Dann muß auch

$$\sum_{g_1}' \int_W d\mathfrak{b}_{n-1} \sum_{\mathfrak{g}_{n-1}} \varphi(\mathfrak{g}_{n-1} + \mathfrak{b}_{n-1} g_1 + \mathfrak{g}_1) > \sum_{g_1}' \int_W d\mathfrak{b}_{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathfrak{x}_{n-1} + \mathfrak{g}_1)\, d\mathfrak{x}_{n-1}$$

sein. Dann gibt es ein $g_1 \neq 0$, so daß

$$\int_W d\mathfrak{b}_{n-1} \sum_{\mathfrak{g}_{n-1}} \varphi(\mathfrak{g}_{n-1} + \mathfrak{b}_{n-1} g_1 + \mathfrak{g}_1) > \int_W d\mathfrak{b}_{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathfrak{x}_{n-1} + \mathfrak{g}_1)\, d\mathfrak{x}_{n-1}.$$

Wir teilen nun jede Seite des Würfels W in g_1 gleiche Teile und damit W in g_1^{n-1} Würfel W_j mit den Kantenlängen $\frac{1}{g_1}$. Dann ist also

$$\sum_{j=1}^{g_1^{n-1}} \int_{W_j} d\mathfrak{b}_{n-1} \sum_{\mathfrak{g}_{n-1}} \varphi(\mathfrak{g}_{n-1} + \mathfrak{b}_{n-1} g_1 + \mathfrak{g}_1) > \sum_{j=1}^{g_1^{n-1}} \int_{W_j} d\mathfrak{b}_{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathfrak{x}_{n-1} + \mathfrak{g}_1)\, d\mathfrak{x}_{n-1}.$$

Dann muß es aber einen Würfel W_j geben, so daß

$$\int_{W_j} d\mathfrak{b}_{n-1} \sum_{\mathfrak{g}_{n-1}} \varphi(\mathfrak{g}_{n-1} + \mathfrak{b}_{n-1} g_1 + \mathfrak{g}_1) > \int_{W_j} d\mathfrak{b}_{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathfrak{x}_{n-1} + \mathfrak{g}_1)\, d\mathfrak{x}_{n-1}$$

ist. Wir machen nun links die Substitution $\mathfrak{x}_{n-1}^* = g_1 \mathfrak{b}_{n-1}$, dann geht W_j in einen Würfel W^* mit der Kantenlänge 1 über:

$$\int_{W^*} d\mathfrak{x}_{n-1}^* \sum_{\mathfrak{g}_{n-1}} \varphi(\mathfrak{g}_{n-1} + \mathfrak{x}_{n-1}^* + \mathfrak{g}_1) > \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathfrak{x}_{n-1} + \mathfrak{g}_1)\, d\mathfrak{x}_{n-1}.$$

Wir setzen schließlich links $\mathfrak{x}_{n-1} = \mathfrak{g}_{n-1} + \mathfrak{x}_{n-1}^*$ und erhalten

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\mathfrak{x}_{n-1}\, \varphi(\mathfrak{x}_{n-1} + \mathfrak{g}_1) > \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathfrak{x}_{n-1} + \mathfrak{g}_1)\, d\mathfrak{x}_{n-1}.$$

Widerspruch.

Hilfssatz 2 läßt sich noch so aussprechen: *Es gibt eine Matrix* $\mathfrak{A}_3$:

$$\mathfrak{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{O}_3 \\ \mathfrak{b}_{n-1}' & \mathfrak{E}_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{4'}$$

wo $\mathfrak{O}_3$ *Nullmatrix und* $\mathfrak{E}_{n-1}$ *die* $n-1$*-zeilige Einheitsmatrix ist, so daß*

$$\sum_{g}' \varphi(\mathfrak{A}_3 \mathfrak{g}) \leqq \sum_{g_1=-\infty}^{+\infty}{}' \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathfrak{x}_{n-1} + \mathfrak{g}_1)\, d\mathfrak{x}_{n-1} \tag{4''}$$

ist. Dabei sind links alle Gitterpunkte auszuschließen, deren erste Koordinate Null ist.

Es ist ja

$$\mathfrak{A}_3 \mathfrak{g} = \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{O}_3 \\ \mathfrak{b}'_{n-1} & \mathfrak{E}_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ \mathfrak{g}'_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \mathfrak{g}'_{n-1} + \mathfrak{b}'_{n-1} g_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} g_1 \\ \mathfrak{o}'_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathfrak{g}'_{n-1} + \mathfrak{b}'_{n-1} g_1 \end{pmatrix} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_{n-1} + \mathfrak{b}_{n-1} g_1 .$$

Wir bemerken noch, daß $\mathfrak{A}_3 \mathfrak{g}_{n-1} = \mathfrak{g}_{n-1}$ ist.

Satz 1 (Deformationssatz).

Es sei $\varphi(\mathfrak{x})$ reell, beschränkt, im Riemannschen Sinne integrierbar und außerhalb des Würfels W: $|x_i| \leqq \frac{K}{2}$ $(i = 1, \ldots n)$ identisch Null. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine unimodulare Matrix $\mathfrak{A}$, so daß

$$\sum_{\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}} \varphi(\mathfrak{A}\mathfrak{g}) \leqq \int_{R_n} \varphi(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} + \varepsilon. \tag{5}$$

Dabei erstreckt sich die Integration rechts über den ganzen Raum R_n.

Beweis*). Ist $n \geqq 3$, so betrachte ich die Matrizen

$$\mathfrak{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & \frac{1}{K^{n-2}} & & \\ & & \mathfrak{O}_1 & \\ & & \mathfrak{O}_2 & K\mathfrak{E}_{n-2} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}_2 = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}' & \mathfrak{O}_1 \\ \mathfrak{O}_2 & \mathfrak{E}_{n-2} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}_3.$$

Dabei sind $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{O}_2$ Nullmatrizen und $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}_3$ genau wie in (1″) bzw. (4″) definiert. Die $b_2, \ldots b_n$ in $\mathfrak{A}_3$ sind beliebig, und von den α, β in $\mathfrak{A}'$ setzen wir nur voraus: $0 < \alpha < \frac{1}{\beta}$, $0 < \beta < \frac{1}{K(1+K^{n-2})}$. Dann ist $\frac{1}{K^{n-2}}\left(\frac{1}{\beta} - \alpha\right) + \frac{\alpha}{K^{n-2}} = \frac{1}{\beta K^{n-2}} > \left(\frac{1}{K^{n-2}} + 1\right) K$. Also muß entweder $\frac{1}{\beta} - \alpha$ oder $\frac{\alpha}{K^{n-2}}$ größer als K sein. Dann liegt aber der Punkt mit den Koordinaten $\left(\alpha - \frac{1}{\beta}\right) g_2$, $\frac{\alpha g_2}{K^{n-2}}$, $K g_3, \ldots, K g_n$, bei denen die $g_2, \ldots, g_n$ ganzzahlig sind und nicht alle zugleich verschwinden, stets außerhalb des Würfels W; d. h. es ist für alle $\mathfrak{g}_{n-1} \neq \mathfrak{o}_{n-1}$

$$\varphi(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{g}_{n-1}) = \varphi\left(\left(\alpha - \frac{1}{\beta}\right) g_2, \frac{\alpha g_2}{K^{n-2}}, K g_3, \ldots, K g_n\right) = 0.$$

Ist $n = 2$, so betrachte ich die Matrizen

$$\mathfrak{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K^{n-2}} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}', \quad \mathfrak{A}_3,$$

wo wieder $0 < \alpha < \frac{1}{\beta}$, $0 < \beta < \frac{1}{K(1+K^{n-2})}$ und $\varphi(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{g}_{n-1}) = 0$ ist für alle $\mathfrak{g}_{n-1} \neq \mathfrak{o}_{n-1}$, d. h. für alle $g_2 \neq 0$.

*) Es würde genügen Satz 1 für stetiges φ zu zeigen, da es zu integrablen φ stets Polynome P_1, P_2 gibt, so daß auf W $P_1 < \varphi < P_2$, $\int (P_2 - P_1)\, d\mathfrak{x} < \varepsilon$ ist.

Um nun im folgenden die Fälle $n \geqq 3$ und $n = 2$ nicht immer unterscheiden zu müssen, so setze ich noch fest, daß unter dem Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} dx_{n-2}$ im Falle $n = 2$ die Zahl 1 zu verstehen ist. Wir führen nun die Funktion $F(x_1' + x_2') = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathfrak{A}_1 x)\, dx_{n-2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathfrak{A}_1(x_{n-2} + x_1 + x_2))\, dx_{n-2}$ ein. Es ist

$$F(\mathfrak{A}'(x_1' + x_2')) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 x)\, dx_{n-2}.$$

Wir wählen bei gegebenen ε nun $\beta < \text{Min}\left(c(\varepsilon), \frac{1}{K(1+K^{n-2})}\right)$ und α entsprechend dem Hilfssatz 1. Es erfüllt ja $F(x_1' + x_2')$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 mit $C = K^{n-2} C_1$, wenn $|\varphi(x)| \leqq C_1$ ist. Nachdem wir α und β gewählt haben, wählen wir b_{n-1} entsprechend dem Hilfssatz 2 für die Funktion $\overline{\varphi}(x) = \varphi(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 x)$. Setzen wir nun $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3$, so haben wir nach (1″) und (4″)

$$\varepsilon + \int_{K_n} \varphi(x)\, dx = \varepsilon + \int_{K_n} \varphi(\mathfrak{A}_1 x)\, dx = \varepsilon + \int_{-\infty}^{+\infty} F(x_1' + x_2')\, dx_1' dx_2'$$

$$\geqq \sum_{g_1}' \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mathfrak{A}'(g_1' + x_2'))\, dx_2' = \sum_{g_1}' \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2' \int_{-\infty}^{+\infty} dx_{n-2}\, \varphi(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 (g_1 + x_2 + x_{n-2}))$$

$$= \sum_{g_1}' \int_{-\infty}^{+\infty} dx_{n-1}\, \varphi(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 (g_1 + x_{n-1})) \geqq \sum_{g}' \varphi(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3 g).$$

Nun ist $\varphi(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3 g_{n-1}) = \varphi(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 g_{n-1}) = 0$ für $g_{n-1} \neq 0$, also

$$\varepsilon + \int_{K_n} \varphi(x)\, dx \geqq \sum_{g \neq 0} \varphi(\mathfrak{A} g).$$

§ 3.

Die Minkowskische Behauptung

Wir nennen zwei Mengen M' und M *äquivalent*, wenn es eine unimodulare Matrix $\mathfrak{A}$ gibt, so daß folgendes gilt: Zu jedem Punkt x' aus M' gibt es einen Punkt x aus M mit $x' = \mathfrak{A} x$, und umgekehrt zu jedem x aus M ein x' aus M', so daß $x = \mathfrak{A}^{-1} x'$. Wir schreiben kurz $M' = \mathfrak{A} M$. Dann lautet Satz 2:

Satz 2. *Ist M im Jordanschen Sinne meßbar und ist sein Volumen $V < k$ (k natürliche Zahl), so gibt es stets eine zu M äquivalente Menge, die höchstens $k - 1$ Gitterpunkte $\neq 0$ enthält.*

Beweis. Ich betrachte die charakteristische Funktion $\varphi(\mathfrak{x})$ von M ($\varphi(\mathfrak{x}) = 1$, wenn $\mathfrak{x}$ in M, $\varphi(\mathfrak{x}) = 0$, wenn $\mathfrak{x}$ außerhalb M). Es gibt nun sicher ein $\varepsilon > 0$, so daß auch $V + \varepsilon < k$ ist. Nun wenden wir (5) an und erhalten

$$\sum_{\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}} \varphi(\mathfrak{A}\mathfrak{g}) \leqq \int_{R_n} \varphi(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} + \varepsilon = V + \varepsilon < k.$$

Links steht die Anzahl der von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Gitterpunkte, die in der Menge $\mathfrak{A}^{-1}M$ liegen, und damit ist der Satz schon bewiesen.

Der Satz läßt sich für Strahlkörper S verschärfen.

Es sei $f(\mathfrak{x})$ eine reelle Funktion mit den Eigenschaften

a) $f(\mathfrak{x}) > 0$ für $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$, $f(\mathfrak{o}) = 0$.

b) $f(t\mathfrak{x}) = t f(\mathfrak{x})$ für $t \geqq 0$.

c) $\int_{f(\mathfrak{x}) \leqq 1} d\mathfrak{x} = J$ vorhanden und endlich.

Dann heißt der Bereich $f(\mathfrak{x}) \leqq t$ *Strahlkörper.*

Satz 3. *Ist das Volumen V eines Strahlkörpers S kleiner als $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$, so gibt es stets einen äquivalenten Strahlkörper, der außer dem Nullpunkt keine weiteren Gitterpunkte mehr enthält.*

Beweis. Es ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^n} = 1$. Dabei ist $\mu(k)$ die Möbiussche Funktion: $\mu(1) = 1$, $\mu(k) = 0$, wenn k durch ein Quadrat (außer 1) teilbar ist und $\mu(k) = (-1)^r$, wenn dies nicht der Fall ist und r die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von k ist. Unsere Voraussetzung lautet also

$$V \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^n} < 1.$$

Nun kann ich sicher ein $\varepsilon > 0$ so wählen, daß auch

$$V \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^n} + 2\varepsilon < 1$$

ist. Ist p_j die j-te Primzahl ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ...), so ist

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_j^n}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^n}.$$

Wegen der Konvergenz des linksstehenden Produktes kann ich ein $m \geqq 1$ so wählen, daß

$$V \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_j^n}\right) + \varepsilon < V \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^n} + 2\varepsilon < 1$$

wird. Setzen wir $N = p_1 \dots p_m$, so ist das linksstehende Produkt nichts anderes als $\sum_{k=1}^{N}{}' \frac{\mu(k)}{k^n}$, wo k im Intervall $[1, N]$ alle ganzen Zahlen der Form $p_1^{e_1} \dots p_m^{e_m}$ $(e_j \geqq 0)$ durchläuft. Es ist also $V \sum_{k=1}^{N}{}' \frac{\mu(k)}{k^n} + \varepsilon < 1$. Ich betrachte nun auf S die Funktion

$$\psi_N(\mathfrak{x}) = \sum_{k=1}^{N}{}' \mu(k)\, \varphi(k\mathfrak{x}),$$

wo $\varphi(\mathfrak{x})$ die charakteristische Funktion von S ist und wende (5) an. Es ist

$$\int_S \psi_n(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} = \sum_{k=1}^{N}{}' \mu(k) \int_{f(\mathfrak{x}) \leqq t} \varphi(k\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} = \sum_{k=1}^{N}{}' \mu(k) \int_{f(\mathfrak{x}) \leqq \frac{t}{k}} \varphi(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x}$$

$$= \sum_{k=1}^{N}{}' \frac{\mu(k)}{k^n} \cdot V.$$

Also ist

$$\sum_{\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}} \psi_N(\mathfrak{A}\mathfrak{g}) = \sum_{k=1}^{N}{}' \mu(k) \sum_{\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}} \varphi(\mathfrak{A} k \mathfrak{g}) \leqq V \sum_{k=1}^{N}{}' \frac{\mu(k)}{k^n} + \varepsilon < 1.$$

Verstehen wir unter dem größten gemeinschaftlichen Teiler eines Gitterpunktes den größten gemeinschaftlichen Teiler seiner Koordinaten, so ist

$$\sum_{k=1}^{N}{}' \mu(k) \sum_{\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}} \varphi(\mathfrak{A} k \mathfrak{g})$$

nichts anderes als die Anzahl der von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Gitterpunkte in $\mathfrak{A}^{-1}S$, deren größte gemeinschaftliche Teiler durch keine der Primzahlen $p_1, \dots, p_m$ teilbar sind. Diese Anzahl ist nach obigem kleiner als 1, also Null. Im besonderen können daher in $\mathfrak{A}^{-1}S$ auch keine Gitterpunkte $\neq \mathfrak{o}$ liegen, deren größter gemeinschaftlicher Teiler 1 ist. Dann können im Strahlkörper $\mathfrak{A}^{-1}S$ überhaupt keine Gitterpunkte liegen; denn nehmen wir an, in $\mathfrak{A}^{-1}S$ liege ein Gitterpunkt $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}$, so muß sein größter gemeinschaftlicher Teiler $d > 1$ sein und $\frac{\mathfrak{g}}{d}$ ist ebenfalls ein Gitterpunkt. Da $f(\mathfrak{A}\mathfrak{g}) \leqq t$ ist, so ist $f\left(\mathfrak{A}\frac{\mathfrak{g}}{d}\right) \leqq \frac{t}{d} < t$, also liegt $\frac{\mathfrak{g}}{d}$ im Strahlkörper $\mathfrak{A}^{-1}S$ und sein größter gemeinschaftlicher Teiler ist 1. Dies ist aber nicht möglich. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Satz 4. *Ist der Strahlkörper S in bezug auf $\mathfrak{o}$ symmetrisch, d. h. ist $f(\mathfrak{x}) = f(-\mathfrak{x})$ und ist das Volumen V von S kleiner als $2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$, so gibt es stets einen zu S äquivalenten Strahlkörper, welcher ebenfalls in bezug auf $\mathfrak{o}$ symmetrisch ist, und der außer $\mathfrak{o}$ keine weiteren Gitterpunkte enthält.*

Der Beweis verläuft genau so wie bei Satz 3; man hat nur zu beachten, daß die Anzahl der Gitterpunkte, die in einem in bezug auf o symmetrischen Strahlkörper liegen, stets gerade ist.

Satz 3 und Satz 4 stellen die Minkowskische Behauptung dar.

§ 4.

Die $M(\mathfrak{R})$-Mengen.

Wir stellen nun eine Verallgemeinerung des Minkowskischen Fundamentalsatzes auf.

Es sei M eine beschränkte, abgeschlossene, im Jordanschen Sinne meßbare Menge vom Volumen V. Sie liege im Würfel $|x_i| \leqq K$ $(i = 1, \ldots, n)$. Auf M sei eine beschränkte, im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion $\varphi(\mathfrak{x})$ definiert; außerhalb M setzen wir $\varphi(\mathfrak{x}) = 0$. Weiter sei $\mathfrak{R}$ die Diagonalmatrix

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{pmatrix}, \quad k_i > 0, \tag{6}$$

$|\mathfrak{R}| = k_1 \ldots k_n$. Dann betrachten wir die Funktion

$$f(\mathfrak{x}) = \sum_{\mathfrak{g}} \varphi(\mathfrak{R}(\mathfrak{x} - \mathfrak{g})). \tag{7}$$

Dabei durchläuft $\mathfrak{g}$ alle Gitterpunkte des R_n. Die Anzahl der nicht verschwindenden Summanden in der rechtsstehenden Summe ist endlich. $f(\mathfrak{x})$ ist in den x_i periodisch mit der Periode 1 und ebenfalls integrierbar. Wir bestimmen nun die Fourierkoeffizienten $a_\mathfrak{l}$ von $f(\mathfrak{x})$ oder gleich allgemeiner von

$$F(\mathfrak{x}) = \sum_{\mathfrak{g}}{}' [\varphi(\mathfrak{R}(\mathfrak{x} - \mathfrak{g})) + \varphi_1(\mathfrak{R}(\mathfrak{x} - \mathfrak{g}) - \mathfrak{x}_0)].$$

Dabei ist $\varphi_1(\mathfrak{x})$ auf einer Menge M_1 definiert und $\mathfrak{x}_0$ ein Punkt des R_n. Es sei W der Würfel $0 \leqq x_i \leqq 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $\mathfrak{l}\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{n} l_i x_i$. Dann berechnen sich die Fourierkoeffizienten $c_\mathfrak{l}$ von $F(\mathfrak{x})$ so:

$$c_\mathfrak{l} = \int_W F(\mathfrak{x})\, e^{-2\pi i \mathfrak{l}\mathfrak{x}}\, d\mathfrak{x} = \sum_{\mathfrak{g}} \int_W [\varphi(\mathfrak{R}(\mathfrak{x} - \mathfrak{g})) + \varphi_1(\mathfrak{R}(\mathfrak{x} - \mathfrak{g}) - \mathfrak{x}_0)]\, e^{-2\pi i \mathfrak{l}\mathfrak{x}}\, d\mathfrak{x}$$
$$= \int_{R_n} [\varphi(\mathfrak{R}\mathfrak{x}) + \varphi_1(\mathfrak{R}\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)]\, e^{-2\pi i \mathfrak{l}\mathfrak{x}}\, d\mathfrak{x}.$$

Führen wir noch die Substitution $\mathfrak{x}' = \mathfrak{R}\mathfrak{x}$ aus, so lautet $c_\mathfrak{l}$:

$$c_\mathfrak{l} = |\mathfrak{R}|^{-1} \int_{R_n} [\varphi(\mathfrak{x}) + \varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)]\, e^{-2\pi i \mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{x}}\, d\mathfrak{x} \tag{8}$$

und insbesondere für $\varphi_1(\mathfrak{x}) \equiv 0$

$$a_\mathfrak{l} = |\mathfrak{R}|^{-1} \int_{R_n} \varphi(\mathfrak{x})\, e^{-2\pi i \mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{x}}\, d\mathfrak{x}. \tag{8a}$$

Ist $\varphi(\mathfrak{x})$ die charakteristische Funktion von M, so ist

$$a_0 = |\mathfrak{R}|^{-1} V$$

und wenn $\varphi_1(\mathfrak{x})$ die charakteristische Funktion von M_1 ist:

$$c_0 = |\mathfrak{R}|^{-1}(V + V_1),$$

wo V_1 das Volumen von M_1 ist.

Ist $\psi(\mathfrak{x})$ eine Funktion mit denselben Eigenschaften wie $\varphi(\mathfrak{x})$, so bilden wir wieder

$$g(\mathfrak{x}) = \sum_\mathfrak{g} \psi(\mathfrak{R}(\mathfrak{x}-\mathfrak{g}))$$

und die Fourierkoeffizienten von $g(\mathfrak{x})$ seien $b_\mathfrak{l}$.

Dann ist $\sum_\mathfrak{l} a_\mathfrak{l} \bar{b}_\mathfrak{l}$ konvergent und es gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\int_W f(\mathfrak{x})\, \bar{g}(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} = \sum_\mathfrak{l} a_\mathfrak{l} \bar{b}_\mathfrak{l}.$$

Die linke Seite ist gleich

$$\int_W \sum_\mathfrak{g} \varphi(\mathfrak{R}(\mathfrak{x}-\mathfrak{g})) \sum_\mathfrak{r} \overline{\psi}(\mathfrak{R}(\mathfrak{x}-\mathfrak{r}))\, d\mathfrak{x} = \sum_\mathfrak{g} \int_W \varphi(\mathfrak{R}(\mathfrak{x}-\mathfrak{g})) \sum_\mathfrak{r} \overline{\psi}(\mathfrak{R}(\mathfrak{x}-\mathfrak{r}))\, d\mathfrak{x}$$

$$= \int_{R_n} \varphi(\mathfrak{R}\mathfrak{x}) \sum_\mathfrak{r} \overline{\psi}(\mathfrak{R}(\mathfrak{x}-\mathfrak{r}))\, d\mathfrak{x},$$

also

$$|\mathfrak{R}|^{-1} \sum_\mathfrak{r} \int_{R_n} \varphi(\mathfrak{x})\, \overline{\psi}(\mathfrak{x} - \mathfrak{R}\mathfrak{r})\, d\mathfrak{x} = \sum_\mathfrak{l} a_\mathfrak{l} \bar{b}_\mathfrak{l}. \tag{9}$$

Ebenso ist für $F(\mathfrak{x})$:

$$\int_W |F(\mathfrak{x})|^2\, d\mathfrak{x} = \int_W d\mathfrak{x} \sum_\mathfrak{g} [\varphi(\mathfrak{R}(\mathfrak{x}-\mathfrak{g})) + \varphi_1(\mathfrak{R}(\mathfrak{x}-\mathfrak{g}) - \mathfrak{x}_0)] \sum_\mathfrak{r} [\overline{\varphi}(\mathfrak{R}(\mathfrak{x}-\mathfrak{r})) +$$

$$+ \overline{\varphi}_1(\mathfrak{R}(\mathfrak{x}-\mathfrak{r}) - \mathfrak{x}_0)$$

$$= \sum_\mathfrak{r} \int_{R_n} [\varphi(\mathfrak{R}\mathfrak{x}) + \varphi_1(\mathfrak{R}\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)]\, [\overline{\varphi}(\mathfrak{R}(\mathfrak{x}-\mathfrak{r})) + \overline{\varphi}_1(\mathfrak{R}(\mathfrak{x}-\mathfrak{r}) - \mathfrak{x}_0)]\, d\mathfrak{x},$$

also

$$|\mathfrak{R}|^{-1} \sum_\mathfrak{r} \int_{R_n} [\varphi(\mathfrak{x}) + \varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)]\, [\overline{\varphi}(\mathfrak{x} - \mathfrak{R}\mathfrak{r}) + \overline{\varphi}_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 - \mathfrak{R}\mathfrak{r})]\, d\mathfrak{x} = \sum_\mathfrak{l} |c_\mathfrak{l}|^2. \tag{9'}$$

Ich bilde nun die Menge $M(\mathfrak{R}) = \overline{M}$ aller Punkte der Form $\mathfrak{R}^{-1}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})$, wo $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ der Menge angehören. Daraus folgt, daß $\overline{M}$ o enthält und in bezug auf o symmetrisch ist. Ist $\overline{M} = M$ und $k_i = 2$ $(i = 1, \ldots, n)$, so ist M konvex. Ich beweise nun den

Hilfssatz 3. Sind $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ Punkte von M und ist $\mathfrak{x}$ innerer Punkt von M, so ist $\mathfrak{R}^{-1}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) = \mathfrak{z}$ innerer Punkt von $M(\mathfrak{R}) = \overline{M}$.

Beweis. Wir bezeichnen mit $d(\mathfrak{x})$ den Abstand des Punktes $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{o}$. Wir führen den Beweis indirekt. Wir nehmen an, $\mathfrak{z}$ ist kein innerer Punkt von $\overline{M}$. Dann enthält jede Kugel $d(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}') \leqq \varrho \operatorname{Min}\left(\frac{1}{k_1}, \cdots, \frac{1}{k_n}\right)$ ($\varrho > 0$, sonst beliebig) einen Punkt $\mathfrak{z}'$, der nicht zu $\overline{M}$ gehört. Nun ist $d(\mathfrak{R}^{-1}(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})-\mathfrak{z}') = d(\mathfrak{R}^{-1}(\mathfrak{x}-\mathfrak{y}-\mathfrak{R}\mathfrak{z}')) \geqq \operatorname{Min}\left(\frac{1}{k_1}, \cdots, \frac{1}{k_n}\right) d(\mathfrak{x}-\mathfrak{y}-\mathfrak{R}\mathfrak{z}')$, also $d(\mathfrak{x}-\mathfrak{y}-\mathfrak{R}\mathfrak{z}') \leqq \varrho$. Der Punkt $\mathfrak{y}+\mathfrak{R}\mathfrak{z}'$ liegt nicht in M, denn sonst liegt $z' = \mathfrak{R}^{-1}(\mathfrak{R}\mathfrak{z}'+\mathfrak{y}-\mathfrak{y})$ in $\overline{M}$. Also enthält jede Kugel von $\mathfrak{x}$ einen Punkt, der nicht in M liegt. Widerspruch.

Wir wollen nun die Voraussetzung machen, daß in $\overline{M}$ *höchstens* $k_0 - 1$ verschiedene Gitterpunktpaare $\neq \mathfrak{o}$ *innere* Punkte von M sind. Dabei sei k_0 eine natürliche Zahl. Setzen wir in (9) $\psi(\mathfrak{x}) \equiv \varphi(\mathfrak{x})$ auf M, so hat die Summe links in (9) höchstens k_0 nichtverschwindende Summanden. Wenn wir nämlich annehmen, die Anzahl dieser Summanden ist größer als k_0, so gibt es mindestens k_0 voneinander verschiedene Punkte $\mathfrak{r}_m \neq \mathfrak{o}$ ($m = 1, \ldots, k_0$), für die

$$\int_M \varphi(\mathfrak{x})\,\overline{\varphi}(\mathfrak{x}-\mathfrak{R}\mathfrak{r}_m)\,d\mathfrak{x} \neq 0$$

ist. Dann gibt es ein $\mathfrak{x}$, so daß $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}-\mathfrak{R}\mathfrak{r}_m$ innere Punkte von M sind; dann liegt aber $\pm\mathfrak{r}_m$ in $\overline{M}$ und zwar ist $\mathfrak{r}_m$ nach Hilfssatz 3 innerer Punkt von $\overline{M}$. Das heißt aber, $\overline{M}$ enthält k_0 voneinander verschiedene, von $\mathfrak{o}$ verschiedene, Gitterpunktpaare, welche innere Punkte von $\overline{M}$ sind, was nicht sein soll. Es gilt also wegen (9) und (8)

$$(10)\qquad \sum_{m=0}^{G} \int_M \varphi(\mathfrak{x})\,\overline{\varphi}(\mathfrak{x}-\mathfrak{R}\mathfrak{r}_m)\,d\mathfrak{x} = |\mathfrak{R}|^{-1} \sum_{\mathfrak{l}} \Big|\int_M \varphi(\mathfrak{x})\, e^{-2\pi i \mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{x}}\,d\mathfrak{x}\Big|^2,$$

wo $0 \leqq G \leqq k_0 - 1$ und $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{o}$ ist. Nun ist

$$\Big|\int_M \varphi(\mathfrak{x})\,\overline{\varphi}(\mathfrak{x}-\mathfrak{R}\mathfrak{r}_m)\,d\mathfrak{x}\Big|^2 \leqq \int_M |\varphi(\mathfrak{x})|^2\,d\mathfrak{x} \int_M |\overline{\varphi}(\mathfrak{x}-\mathfrak{R}\mathfrak{r}_m)|^2\,d\mathfrak{x},$$

also ist die Summe links dem Betrage nach kleiner als

$$(G+1)\int_M |\varphi(\mathfrak{x})|^2\,d\mathfrak{x} \leqq k_0 \int_M |\varphi(\mathfrak{x})|^2\,d\mathfrak{x}.$$

Also folgt aus (10)

$$(11)\qquad k_0 \int_M |\varphi(\mathfrak{x})|^2\,d\mathfrak{x} \geqq |\mathfrak{R}|^{-1} \sum_{\mathfrak{l}} \Big|\int_M \varphi(\mathfrak{x})\, e^{-2\pi i \mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{x}}\,d\mathfrak{x}\Big|^2.$$

Es sei nun wieder $\varphi(\mathfrak{x})$ die charakteristische Funktion von M. Dann folgt aus (11)

$$(12)\qquad k_0\,|\mathfrak{R}|\,V \geqq V^2 + \sum_{\mathfrak{l}\neq\mathfrak{o}} \Big|\int_M e^{-2\pi i \mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{x}}\,d\mathfrak{x}\Big|^2.$$

Es gilt also

Satz 5. *Erfüllt das Volumen V von M die Ungleichung*

$$V > k_0 |\mathfrak{R}| - \frac{1}{V} \sum_{l \neq 0} \left| \int_M e^{-2\pi i \mathfrak{R}^{-1} l \cdot x} \, dx \right|^2, \tag{13}$$

so besitzt $M(\mathfrak{R})$ mindestens k_0 von 0 verschiedene Gitterpunktpaare.

Für konvexe Körper und $k_0 = 1$ stammt der Satz und sein Beweis von C. Siegel [3]. Insbesondere gilt Satz 5, wenn $V > k_0 k_1 \ldots k_n$. Dies wurde auf andere Weise zuerst von v. d. Corput [4] gezeigt. Durch einen einfachen Grenzübergang zeigt man in üblicher Weise (v. d. Corput [4]) den

Satz 5'. *Ist das Volumen V von M größer oder gleich $k_0|\mathfrak{R}|$, so besitzt $M(\mathfrak{R})$ mindestens k_0 von 0 verschiedene Gitterpunktpaare.*

§ 5.

Ein Grenzfall.

Wir wollen nun in diesem Paragraphen die Voraussetzung machen, daß M das Volumen $V = k_0|\mathfrak{R}| = k_0 k_1 \ldots k_n$ besitzt. Nach Satz 5' besitzt also sicher $M(\mathfrak{R})$ mindestens k_0 von 0 verschiedene Gitterpunktpaare.

Wir wollen nun voraussetzen, daß in $\overline{M} = M(\mathfrak{R})$ höchstens $k_0 - 1$ innere Punktepaare Gitterpunktpaare $\neq 0$ sind. Wir betrachten nun neben M die um $\mathfrak{R}g$ verschobenen Mengen M ($M_0 = M$). Dann behaupten wir: *Ein Punkt des R_n kann von höchstens k_0 solchen Mengen M_g innerer Punkt sein.* Nehmen wir an, es gibt einen Punkt x_0, der mindestens $k_0 + 1$ solchen M_g als innerer Punkt angehört, d. h. es gibt $k_0 + 1$ Gitterpunkte g_j ($j = 1, \ldots, k_0 + 1$), so daß $x_0 - \mathfrak{R}g_j$ innere Punkte von M sind! Dann liegen die Gitterpunktpaare $\pm (g_j - g_1)$ in $\overline{M}$ und sind innere Punkte von $\overline{M}$, nach dem obigen Hilfssatz 3. Diese k_0 Gitterpunktpaare sind alle voneinander und von 0 verschieden und dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Wir behaupten nun

Satz 6: *Ist M eine beschränkte, abgeschlossene Menge vom Volumen $V = k_0|\mathfrak{R}|$ und besitzt $M(\mathfrak{R})$ höchstens $k_0 - 1$ Gitterpunktpaare als innere Punktepaare, so liegt jeder Punkt des R_n in mindestens einer der Mengen M_g.*

Für konvexe Mengen und $k_0 = 1$ wurde dies von Minkowski bewiesen (Geometrie der Zahlen, § 32).

Beweis. Wir nehmen an, es gibt ein x_0, welches keinem der M_g angehört. Dieser Punkt x_0 kann auch kein Häufungspunkt der Vereinigungsmenge $S = \sum_g M_g$ sein. Um dies zu zeigen, denke ich mir alle Gitterpunkte in irgendeiner Weise so als Folge geschrieben $g_1, g_2, \ldots$, so daß $\lim_{i \to \infty} d(\mathfrak{R}g_i) = \infty$.

Ist nun $\mathfrak{x}_0$ Häufungspunkt von S, so kann ich aus S eine unendliche Folge $(\mathfrak{x}_k)$ herausgreifen mit $\lim_{k\to\infty} \mathfrak{x}_k = \mathfrak{x}_0$ und daher $d(\mathfrak{x}_k - \mathfrak{x}_0) < C_1$ für alle k. Nun gibt es sicher einen Index j, so daß die Folge $(\mathfrak{x}_k)$ bereits in $\sum_{i=1}^{j} M_{\mathfrak{g}_i}$ liegt. Denn sonst gibt es eine unendliche Folge von Gitterpunkten $\mathfrak{g}'_k$ mit $d(\mathfrak{R}\mathfrak{g}'_k) \to \infty$ für $k \to \infty$ und eine Teilfolge (φ'_k) von $(\mathfrak{x}_k)$, so daß $\mathfrak{x}'_k$ in $M_{\mathfrak{g}_k}$ liegt. Nun liegt die Folge $(\varphi^*_k) = (\varphi'_k - \mathfrak{R}\mathfrak{g}'_k)$ in der beschränkten Menge $M = M\,\mathfrak{o}$, also $d(\mathfrak{x}'_k - \mathfrak{R}\mathfrak{g}'_k) < C_2$ für alle k. Dann ist aber $d(\mathfrak{R}\mathfrak{g}'_k) = d(\mathfrak{R}\mathfrak{g}'_k - \varphi'_k + \mathfrak{x}'_k - \mathfrak{x}_0) \leqq d(\mathfrak{R}\mathfrak{g}'_k - \mathfrak{x}'_k) + d(\mathfrak{x}'_k - \mathfrak{x}_0) \leqq C_1 + C_2 = C_3$ für alle k, was unmöglich ist. Es gibt also einen Index j, so daß die Folge $(\mathfrak{x}_k)$ in $\sum_{i=1}^{j} M_{\mathfrak{g}_i}$ liegt. Dann gibt es aber eine unendliche Teilfolge $(\mathfrak{x}'_k)$ von $(\mathfrak{x}_k)$, die in einem der $M_{\mathfrak{g}_i}$ $(1 \leqq i \leqq j)$ liegt, z. B. $M_{\mathfrak{g}_1}$. Nun ist $M_{\mathfrak{g}_1}$ abgeschlossen und $\mathfrak{x}_0$ Häufungspunkt der Folge $(\mathfrak{x}'_k)$, die ganz auf $M_{\mathfrak{g}_1}$ liegt, also muß $\mathfrak{x}_0$ auch in $M_{\mathfrak{g}_1}$ liegen, in Widerspruch zur Voraussetzung. Es gibt daher eine Kugel K um den Punkt $\mathfrak{x}_0$ mit einem Radius $\varrho > 0$, welche zu allen $M_{\mathfrak{g}}$ punktfremd ist.

Dann sind auch die Kugeln $K_{\mathfrak{g}}$ mit den Mittelpunkten $\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{R}\mathfrak{r}$ ($\mathfrak{r}$ Gitterpunkt) zu allen $M_{\mathfrak{g}}$ punktfremd. Ist $\varphi_1(\mathfrak{x})$ die charakteristische Funktion der Kugel $\overline{K}$ mit dem Radius ϱ und dem Mittelpunkt im Ursprung, so ist also

$$\varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 - \mathfrak{R}\mathfrak{r})\ \varphi(\mathfrak{x} - \mathfrak{R}\mathfrak{g}) = 0,$$

wo $\varphi(\mathfrak{x})$ die charakteristische Funktion von M ist. Wir wählen noch ϱ so klein, daß die Kugeln $K_{\mathfrak{r}}$ zueinander punktfremd sind, d. h.

$$\varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)\ \varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 - \mathfrak{R}\mathfrak{r}) = 0$$

für alle $\mathfrak{r}$. Dann ist nach (9′)

$$(14)\quad |\mathfrak{R}|^{-1} \sum_{\mathfrak{r}} \int_{R_n} [\varphi(\mathfrak{x}) + \varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)]\,[\varphi(\mathfrak{x} - \mathfrak{R}\mathfrak{r}) + \varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 - \mathfrak{R}\mathfrak{r})]\,d\mathfrak{x} = \sum_{\mathfrak{l}} |c_{\mathfrak{l}}|^2.$$

Der linksstehende Ausdruck lautet ausmultipliziert

$$\sum_{\mathfrak{r}} \int_{R_n} \varphi(\mathfrak{x})\ \varphi(\mathfrak{x} - \mathfrak{R}\mathfrak{r})\,d\mathfrak{x} + \sum_{\mathfrak{r}} \int_{R_n} [\varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)\ \varphi(\mathfrak{x} - \mathfrak{R}\mathfrak{r}) + \varphi(\mathfrak{x})\ \varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 - \mathfrak{R}\mathfrak{r})]\,d\mathfrak{x} + \sum_{\mathfrak{r}} \int_{R_n} \varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)\ \varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 - \mathfrak{R}\mathfrak{r})\,d\mathfrak{x}.$$

Nach Voraussetzung verschwindet die zweite Summe. Auf die erste Summe können wir die Überlegungen von (10) bis (12) anwenden; bei der dritten Summe verschwinden alle Glieder außer dem Glied mit $\mathfrak{r} = \mathfrak{o}$. Bezeichnen wir das Volumen von $\overline{K}$ mit V_1, so erhalten wir

$$|\mathfrak{R}|^{-1}(k_0 V + V_1) \geqq |c_{\mathfrak{o}}|^2 + \sum_{\mathfrak{l} \neq \mathfrak{o}} |c_{\mathfrak{l}}|^2.$$

Da nun $c_{\mathfrak{o}} = |\mathfrak{R}|^{-1}(V + V_1)$, so ist

$$(15)\qquad |\mathfrak{R}|\,(k_0 V + V_1) \geqq (V + V_1)^2.$$

Nun ist nach Voraussetzung $V = k_0 k_1 \dots k_n = k_0 = k_0 |\mathfrak{R}|$, also

$$|\mathfrak{R}| V_1 = \frac{V V_1}{k_0} \geqq 2 V V_1 + V_1^2,$$

dann muß aber $V_1 = 0$ sein, also auch $\varrho = 0$. Widerspruch.

§ 6.

Die Alternativsätze.

Satz 7. *Besitzt M ein Volumen $V \geqq \frac{k_0 |\mathfrak{R}|}{2}$ und sind höchstens $k_0 - r - 1$ Gitterpunktpaare, welche von $\mathfrak{o}$ verschieden sind, innere Punkte von $M(\mathfrak{R})$ $\left(0 \leqq r \leqq k_0 - \left[\frac{k_0}{2}\right] - 1\right)$, so erfüllen die Mengen $\mathfrak{t}_\mathfrak{g} M(\mathfrak{R})$ den R_n lückenlos, und die Überdeckung ist mindestens $r + 1$-fach, d. h. es gibt zu jedem $\mathfrak{x}_0$ mindestens $r + 1$ Gitterpunkte $\mathfrak{g}$, so daß $\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{g}$ in $M(\mathfrak{R})$ liegt.*

Satz 7 ist ein Spezialfall des folgenden allgemeineren Satzes:

Satz 7a. *Es seien M_1 und M_2 zwei beschränkte, abgeschlossene, im Jordanschen Sinne meßbare Mengen und die Summe ihrer Volumina $V_1 + V_2 \geqq k_0 |\mathfrak{R}| = k_0 k_1 \dots k_n$ $(V_1 > 0,\ V_2 > 0)$. Weiter seien höchstens $k_0 - r_i - 1$ $\left(i = 1, 2,\ 0 \leqq r_i \leqq k_0 - \left[\frac{V_i}{\mathfrak{R}}\right] - 1\right)$ von $\mathfrak{o}$ verschiedene Gitterpunktpaare innere Punkte von M_i. Ist dann $M_3(\mathfrak{R})$ die Menge aller Punkte der Form $\pm \mathfrak{R}^{-1}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})$, wo $\mathfrak{x}$ in M_1 und $\mathfrak{y}$ in M_2 liegt, so erfüllen die $\mathfrak{t}_\mathfrak{g} M_3(\mathfrak{R})$ den R_n lückenlos, und zwar ist die Überdeckung mindestens $r + 1$-fach mit*

$$r = \left[\frac{r_1 V_1 + r_2 V_2}{2\sqrt{V_1 V_2}}\right].$$

Es muß $r_i \leqq k_0 - \left[\frac{V_i}{\mathfrak{R}}\right] - 1$ vorausgesetzt werden, da nach Satz 5′ $M_i(\mathfrak{R})$ mindestens $\left[\frac{V_i}{|\mathfrak{R}|}\right]$ von $\mathfrak{o}$ verschiedene Gitterpunktpaare enthält.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein: Die charakteristische Funktion von M_i sei $\varphi_i(\mathfrak{x})$. Ist $\mathfrak{x}_0$ ein Punkt des R_n, so setzen wir $\psi_i(\mathfrak{x}) = \varphi_i(\mathfrak{x} - \mathfrak{R}\mathfrak{x}_0)$. Mit M_i^0 bezeichnen wir die Menge aller inneren Punkte von M_i.

Ist $\mathfrak{x}_0$ Gitterpunkt und $M_1 = M_2 = M$, so läßt sich Satz 7a sofort beweisen. Es ist dann $V_1 = V_2 = V$, $r_1 = r_2 = r$, $M_1(\mathfrak{R}) = M_2(\mathfrak{R}) = M_3(\mathfrak{R})$. In $M^0(\mathfrak{R})$ liegen nach Voraussetzung höchstens $k_0 - r - 1$ von $\mathfrak{o}$ verschiedene Gitterpunktpaare. Dabei ist $r \leqq k_0 - \left[\frac{k_0}{2}\right] - 1$, d. h. $M(\mathfrak{R})$ enthält nach Satz 5′ mindestens $s = \left[\frac{k_0}{2}\right]$ Gitterpunktpaare $\pm \mathfrak{g}_1, \dots, \pm \mathfrak{g}_s \neq \mathfrak{o}$. Dann liegt der Gitterpunkt $\mathfrak{x}_0$ in den $2s + 1$ Mengen $\mathfrak{t}_{\mathfrak{x}_0} M(\mathfrak{R})$, $\mathfrak{t}_{\mathfrak{x}_0 \pm \mathfrak{g}_j} M(\mathfrak{R})$. Nun ist $2s + 1 = 2\left[\frac{k_0}{2}\right] + 1 \geqq k_0 - \left[\frac{k_0}{2}\right] \geqq r + 1$, was zu zeigen war.

Wir können also im folgenden den Fall ausschließen, daß $M_1 = M_2$ und $\mathfrak{x}_0$ Gitterpunkt ist.

Hilfssatz 4: Für jedes $\mathfrak{y}$ ist stets

$$\int_{R_n} \varphi_1(\mathfrak{x})\,\varphi_2(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})\,d\mathfrak{x} + \int_{R_n} \varphi_2(\mathfrak{x})\,\varphi_1(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})\,d\mathfrak{x} \leqq 2\sqrt{V_1 V_2},$$

und das Gleichheitszeichen tritt nur dann ein, wenn $M_1 = M_2$, $\mathfrak{y} = 0$ ist.

Beweis. Es ist $\varphi_1(\mathfrak{x})\,\varphi_2(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})$ dann und nur $\neq 0$, wenn $\mathfrak{x}$ in M_1 und $\mathfrak{x}-\mathfrak{y}$ in M_2 liegt. Es ist also das erste Integral das Volumen des Durchschnittes D_1 von M_1 und $M_2 + \mathfrak{y}$ und daher $\leqq \mathrm{Min}\,(V_1, V_2) \leqq \sqrt{V_1 V_2}$, ebenso das zweite Integral das Volumen des Durchschnittes D_2 von M_2 und $M_1 + \mathfrak{y}$. Soll nun bei beiden Integralen das Gleichheitszeichen gelten, so muß $V_1 = V_2 =$ Volumen von $D_1 =$ Volumen von D_2 sein. Also muß, da D_1 Durchschnitt von M_1 und $M_2 + \mathfrak{y}$ ist*), $D_1^0 = M_1^0 = M_2^0 + \mathfrak{y}$ sein und ebenso $D_2^0 = M_2^0 = M_1^0 + \mathfrak{y}$, also $M_1^0 = M_1^0 + 2\,\mathfrak{y}$. Dies ist, da M_1^0 beschränkt ist, nur so möglich, daß $\mathfrak{y} = 0$, $M_1^0 = M_2^0$ und daher $M_1 = M_2$ ist, w. z. b. w.

Beweis von Satz 7a. Die Fourierkoeffizienten von $\varphi_i(\mathfrak{x})$ seien $a_{i\mathfrak{l}}$, dann ist

$$(16)\quad |\mathfrak{R}|^{-1} \sum_{\mathfrak{r}} \int_{R_n} [\varphi_1(\mathfrak{x})\,\varphi_2(\mathfrak{x} - \mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r})) + \varphi_2(\mathfrak{x})\,\varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r}))]\,d\mathfrak{x}$$
$$= \sum_{\mathfrak{l}} (a_{1\mathfrak{l}}\overline{a_{2\mathfrak{l}}} + \overline{a_{1\mathfrak{l}}} a_{2\mathfrak{l}})\, e^{-2\pi i \mathfrak{l}\mathfrak{x}_0} = 2\,|\mathfrak{R}|^{-2} V_1 V_2 + 2 \sum_{\mathfrak{l} \neq 0} R\,(a_{1\mathfrak{l}}\overline{a_{2\mathfrak{l}}})\, e^{-2\pi i \mathfrak{l}\mathfrak{x}_0}.$$

Nun folgt aus (12) wegen der gemachten Voraussetzungen

$$(k_0 - r_i)\, V_i\, |\mathfrak{R}|^{-1} \geqq |\mathfrak{R}|^{-2} V_i^2 + \sum_{\mathfrak{l} \neq 0} |a_{i\mathfrak{l}}|^2 \qquad (i = 1, 2).$$

Dann ist

$$\left|2 \sum_{\mathfrak{l} \neq 0} R\,(a_{1\mathfrak{l}}\overline{a_{2\mathfrak{l}}})\, e^{-2\pi i \mathfrak{l}\mathfrak{x}_0}\right| \leqq \sum_{\mathfrak{l} \neq 0} (|a_{1\mathfrak{l}}|^2 + |a_{2\mathfrak{l}}|^2$$
$$\leqq |\mathfrak{R}|^{-1} \sum_{i=1}^{2} (k_0 V_i - |\mathfrak{R}|^{-1} V_i^2 - r_i V_i),$$

also ist

$$(16')\quad \left|2\,|\mathfrak{R}|^{-2} V_1 V_2 + 2 \sum_{\mathfrak{l} \neq 0} R\,(a_{1\mathfrak{l}}\overline{a_{2\mathfrak{l}}})\, e^{-2\pi i \mathfrak{l}\mathfrak{x}_0}\right|$$
$$\geqq 2\,|\mathfrak{R}|^{-2} V_1 V_2 - 2\left|\sum_{\mathfrak{l} \neq 0} R\,(a_{1\mathfrak{l}}\overline{a_{2\mathfrak{l}}})\, e^{-2\pi i \mathfrak{l}\mathfrak{x}_0}\right|$$
$$\geqq \Big(\sum_{i=1}^{2} V_i\Big)^2 |\mathfrak{R}|^{-2} - k_0 \sum_{i=1}^{2} V_i\, |\mathfrak{R}|^{-1} + \sum_{i=1}^{2} r_i V_i\, |\mathfrak{R}|^{-1} \geqq \sum_{i=1}^{2} r_i V_i\, |\mathfrak{R}|^{-2}.$$

*) Ist nämlich z. B. $D_1^0 \neq M_1^0$, so gibt es eine ganz in M_1 liegende Kugel K, welche mit D_1 keinen inneren Punkt gemeinsam hat und es ist dann $V_1 \geqq$ Vol. D_1 + Vol. $K >$ Vol. D_1.

Daraus folgt, daß die Summe auf der linken Seite von (16) mindestens $r+1$ nicht verschwindende Summanden haben muß. Sind nämlich nur höchstens r solche Summanden vorhanden, so ist der Betrag dieser Summe *kleiner* als $\sum_{i=1}^{2} r_i V_i |\mathfrak{R}|^{-2}$ in Widerspruch zu (16'). Es ist nämlich nach Hilfssatz 4

$$\int_{R_n} [\varphi_1(\mathfrak{x})\, \varphi_2(\mathfrak{x} - \mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r})) + \varphi_2(\mathfrak{x})\, \varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r}))]\, d\mathfrak{x} < 2\sqrt{V_1 V_2},$$

da wir ja den Fall $M_1 = M_2$, $\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r} = 0$ als bereits erledigt, ausgeschlossen hatten. Also ist, wenn die fragliche Summe höchstens r nichtverschwindende Summanden hat, die Summe $< 2r\sqrt{V_1 V_2}\,|\mathfrak{R}|^{-1}$ $= 2|\mathfrak{R}|^{-1}\sqrt{V_1 V_2}\left[\frac{r_1 V_1 + r_2 V_2}{2\sqrt{V_1 V_2}}\right] \leqq |\mathfrak{R}|^{-1} \sum_{i=1}^{2} r_i V_i$. Es gibt also $r+1$ Punkte $\mathfrak{r}_m$, so daß

$$\int_{R_n} [\varphi_1(\mathfrak{x})\, \varphi_2(\mathfrak{x} - \mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r}_m)) + \varphi_2(\mathfrak{x})\, \varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r}_m))]\, d\mathfrak{x} > 0$$

ist. Dann gibt es aber $r+1$ Punkte $\mathfrak{x}_m$, so daß

$$\varphi_1(\mathfrak{x}_m)\, \varphi_2(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r}_m)) + \varphi_2(\mathfrak{x}_m)\, \varphi_1(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r}_m)) > 0$$

ist. Dann muß aber entweder $\mathfrak{x}_m$ in M_1 und $\mathfrak{x}_m - \mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r}_m)$ in M_2 liegen oder umgekehrt. Also liegen auf jeden Fall die Punkte $\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r}_m$ ($m = 1, \ldots, r+1$) in $M_3(\mathfrak{R})$, w. z. b. w.

§ 7.

Die ω-konvexen Mengen.

Es sei $f(\mathfrak{x})$ eine reelle Funktion mit folgenden Eigenschaften:

a) $f(\mathfrak{x}) > 0$ für alle $\mathfrak{x} \neq 0$, $f(0) = 0$,

b) $f(t\mathfrak{x}) = t f(\mathfrak{x})$ für alle $t \geqq 0$.

c) Es gibt zwei positive Zahlen c und σ, so daß folgendes gilt: Sind k und k_0 beliebige natürliche Zahlen ($k_0 < k$), so kann man stets aus k Punkten $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k$ $k_0 + 1$ Punkte $\overline{\mathfrak{x}_0}, \overline{\mathfrak{x}_1}, \ldots, \overline{\mathfrak{x}_{k_0}}$ herausgreifen, so daß

$$f^{\sigma}(\overline{\mathfrak{x}_i} - \overline{\mathfrak{x}_0}) \leqq \frac{c}{k - k_0} \sum_{j=1}^{k} f^{\sigma}(\mathfrak{x}_j) \qquad (i = 1, \ldots, k_0)$$

ist.

d) $f(\mathfrak{x})$ besitzt auf der Kugel $\mathfrak{x}^2 = 1$ eine positive untere Schranke.

Dann nenne ich die durch $f(\mathfrak{x}) \leqq c^{\frac{1}{\sigma}} t$ definierte Menge K ω-konvex. Im weiteren setze ich noch, nur der Einfachheit halber, voraus

e) $f(-\mathfrak{x}) = f(\mathfrak{x})$.

Wir zeigen zunächst

Satz 8. *Erfüllt $f(\mathfrak{x})$ außer den Eigenschaften* a) b), d) *noch* c_1): *Sind $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k$ irgendwelche Punkte des R_n, und ist*

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} f^{\sigma}(\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_j) \leqq c\,k \sum_{j=1}^{k} f^{\sigma}(\mathfrak{x}_j), \tag{17}$$

so hat $f(\mathfrak{x})$ auch die Eigenschaft c).

Wir müssen also zeigen: Es gibt unter den $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k$ stets $k_0 + 1$ Punkte $\bar{\mathfrak{x}}_0, \bar{\mathfrak{x}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{x}}_{k_0}$ (k_0 beliebig $< k$), so daß

$$f^{\sigma}(\bar{\mathfrak{x}}_i - \bar{\mathfrak{x}}_0) \leqq \frac{K}{k - k_0} = \frac{c}{k - k_0} \sum_{j=1}^{k} f^{\sigma}(\mathfrak{x}_j).$$

Wir schreiben für die Summe links in (17) kurz $\sum_{i \neq j} (ij)$*). Sie enthält $k(k-1)$ nichtverschwindende Summanden; zu jeder Zahl i ($1 \leqq i \leqq k$) gibt es $k - 1$ Paare (ij). Aus diesen können wir auf $\binom{k-1}{k_0}$ Arten Systeme von k_0 Paaren $(i, i_1), \ldots (i, i_{k_0})$ herausgreifen. Wir nennen sie die Systeme der i-ten Zeile. Führen wir dies für $i = 1, \ldots, k$ durch, so erhalten wir $k\binom{k-1}{k_0}$ solche Systeme. Jedes System enthält k_0 Paare, also die Gesamtheit aller Systeme $k k_0 \binom{k-1}{k_0}$ Paare; nun haben wir aber nur $k(k-1)$ Paare, also kommt jedes Paar

$$\frac{k k_0 \binom{k-1}{k_0}}{k(k-1)} = \binom{k-2}{k_0 - 1}\text{-mal}$$

vor. Also ist die Summe über alle Paare aller Systeme gleich

$$\binom{k-2}{k_0 - 1} \sum_{i \neq j} (ij)$$

und daher

$$\leqq K k \binom{k-2}{k_0 - 1}.$$

Nehmen wir nun an der Satz sei nicht richtig, dann gibt es in jedem System mindestens ein Paar (ij), welches $> \frac{K}{k - k_0}$ ist; ich nenne sie kurz b-Paare. Wir zeigen nun: In jeder Zeile gibt es mindestens $k - k_0$ voneinander verschiedene b-Paare. Ich zeige es für die erste Zeile. Ich greife ein System aus der ersten Zeile heraus und aus ihm ein b-Paar $(1, i^1)$. Dieses b-Paar kommt gleichzeitig in $\binom{k-2}{k_0 - 1}$ Systemen vor. Diese Systeme denke ich mir gestrichen. Ich nehme eines der übriggebliebenen Systeme und greife wieder ein b-Paar

*) O. B. d. A. $(ij) \neq (i'j')$, wenn $(i - i')^2 + (j - j')^2 \neq 0$.

heraus $(1, i^2)$, welches natürlich $\neq (1, i^1)$ ist. Dieses kommt in $\binom{k-3}{k_0-1}$ Systemen vor. Auch diese denke ich mir gestrichen, und so gehe ich weiter. Nach $k - k_0$ Schritten ist dieser Prozeß zu Ende, alle Systeme sind gestrichen, und ich habe $k - k_0$ voneinander verschiedene b-Paare in der 1-ten Zeile gefunden. Jedes Paar kommt $\binom{k-2}{k_0-1}$-mal vor, also ist die Summe der b-Paare der 1-Zeile

$$> \binom{k-2}{k_0-1}(k-k_0)\frac{K}{k-k_0} = \binom{k-2}{k_0-1}K.$$

Dies geht natürlich für jede Zeile, und da wir k Zeilen haben, so ist die Summe der b-Paare sicher größer als $Kk\binom{k-2}{k_0-1}$; dies ist aber ein Widerspruch.

Ich setze nun in (9) $\mathfrak{R} = \mathfrak{x}$, $\varphi(\mathfrak{x}) = \psi(\mathfrak{x}) = t^\sigma - f^\sigma(\mathfrak{x})$, wenn $t^\sigma > f^\sigma(\mathfrak{x})$ und $\varphi(\mathfrak{x}) = \psi(\mathfrak{x}) = 0$ sonst. Es gilt noch nach Corput-Schaake [5]

$$\int_{R_n} \varphi(\mathfrak{x})\,d\mathfrak{x} = \frac{n}{n+\sigma}t^{n+\sigma}J,$$

wo $J = \int\limits_{f(\mathfrak{x})\leqq 1} d\mathfrak{x}$ ist. Dann folgt aus (9)

$$\int_K \sum_{\mathfrak{r}} \overline{\varphi}(\mathfrak{x})\left(t^\sigma - f^\sigma(\mathfrak{x}+\mathfrak{r})\right)d\mathfrak{x} = \sum_{\mathfrak{l}} |a_{\mathfrak{l}}|^2.$$

Bezeichnen wir die Anzahl der Summanden der linken Summe mit l, so ist

$$\int_K \sum_{\mathfrak{r}} \overline{\varphi}(\mathfrak{x})\,f^\sigma(\mathfrak{x}+\mathfrak{r})\,d\mathfrak{x} = l\,t^\sigma \int_K \overline{\varphi}(\mathfrak{x})\,d\mathfrak{x} - \sum_{\mathfrak{l}} |a_{\mathfrak{l}}|^2.$$

Wir beweisen nun

Satz 9. *Ist $f(\mathfrak{x})$ ω-konvex und*

$$\sum_{\mathfrak{l}} |a_{\mathfrak{l}}|^2 > k_0\,t^\sigma \int_K \overline{\varphi}(\mathfrak{x})\,d\mathfrak{x} \tag{18}$$

oder schärfer

$$|a_0|^2 > k_0\,t^\sigma \int \overline{\varphi}(\mathfrak{x})\,d\mathfrak{x}, \tag{18 a}$$

so gibt es mindestens k_0 von $\mathfrak{o}$ verschiedene Gitterpunktpaare $\pm\mathfrak{g}_1, \ldots, \pm\mathfrak{g}_{k_0}$, so daß

$$f^\sigma(\mathfrak{g}_j) \leqq c\,t^\sigma$$

ist.

Bemerkung. Es ist $a_0 = \int\limits_K \varphi(\mathfrak{x})\,d\mathfrak{x}$, also lautet (18 a)

$$\int_K \varphi(\mathfrak{x})\,d\mathfrak{x} = \frac{n}{n+\sigma}t^{n+\sigma}J > k_0\,t^\sigma$$

oder

$$t > t_0 = \left(k_0 \frac{u+\sigma}{\sigma J}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Beweis. Benutzen wir (18), so folgt

$$\int_K \sum_{\mathfrak{r}} \overline{\varphi}(\mathfrak{x})\, f^\sigma(\mathfrak{x}+\mathfrak{r})\, d\mathfrak{x} < (l-k_0)\, t^\sigma \int_K \overline{\varphi}(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x}.$$

Es gibt daher ein $\mathfrak{x}'$, so daß

$$\sum_{\mathfrak{r}} f^\sigma(\mathfrak{x}'+\mathfrak{r}) < (l-k_0)\, t^\sigma$$

ist, also muß $l > k_0$, d. h. $l \geqq k_0 + 1$ sein. Dann kann ich aus den l Punkten $\mathfrak{x}' + \mathfrak{r}_s$ $k_0 + 1$ Punkte $\mathfrak{x}' + \mathfrak{r}'_j$ $(j = 0, 1, \ldots k_0)$ so herausgreifen, daß

$$f^\sigma(\mathfrak{r}'_j - \mathfrak{r}'_0) \leqq \frac{c}{l-k_0} \sum_{s=1}^{l} f^\sigma(\mathfrak{x}'+\mathfrak{r}_s) < c\, t^\sigma \qquad (j = 1, \ldots, k_0)$$

ist. Die Punkte $\mathfrak{r}'_j - \mathfrak{r}'_0$ sind alle voneinander verschieden, denn aus $\mathfrak{r}'_j - \mathfrak{r}'_0 = \mathfrak{r}'_i - \mathfrak{r}'_0$ $(i \neq j)$ folgt $\mathfrak{r}'_j = \mathfrak{r}'$.

Satz 9a. *Satz* 9 *bleibt richtig, wenn in* (18a) *das Gleichheitszeichen gilt.* Den Beweis führt man in bekannter Weise so:

Ist q die positive untere Schranke von $f(\mathfrak{x})$ auf der Kugel $\mathfrak{x}^2 = 1$, so ist stets

$$f^\sigma(\mathfrak{x}) \geqq q(\mathfrak{x}^2)^{\frac{\sigma}{2}}.$$

Liegt ein Gitterpunkt $\mathfrak{g}$ in $f^\sigma(\mathfrak{x}) < c\, t^\sigma$, dann liegt er auch in der Kugel $\mathfrak{x}^2 < \left(\frac{c\,t}{q}\right)^{\frac{2}{\sigma}}$. Nun gilt Satz 9 für alle $t_\varepsilon = (t_0^\sigma + \varepsilon)^{\frac{1}{\sigma}}$ $(\varepsilon > 0)$, d. h. zu diesen t_ε gibt es k_0 Gitterpunktpaare, die in $f^\sigma(\mathfrak{x}) < c\, t^\sigma$ und zugleich in der Kugel $\mathfrak{x}^2 < \left(\frac{c\,t}{q}\right)^{\frac{2}{\sigma}}$ liegen. Ich betrachte nun eine Nullfolge (ε_m). Zu jedem t_{ε_m} gehören nun k_0 Gitterpunktpaare $\neq \mathfrak{o}$. Nun liegen in einer Kugel nur endlich viele Gitterpunkte, also gibt es sicher eine Teilfolge (ε'_m), zu der dieselben k_0 Gitterpunktpaare $\pm \mathfrak{r}_i$ gehören. Es ist also

$$f^\sigma(\mathfrak{r}_i) < c\, t_0^\sigma + \varepsilon'_m\, c \qquad (i = 1, \ldots, k_0).$$

Nun ist die linke Seite von den ε'_m unabhängig, also ist

$$f^\sigma(\mathfrak{r}_i) \leqq c\, t_0^\sigma \qquad (i = 1, \ldots, k_0).$$

Satz 9 kann also so ausgesprochen werden: Ist $f(\mathfrak{x})$ ω-konvex, so gibt es wenigstens k_0 Gitterpunktpaare $\pm \mathfrak{g}_j$, so daß

$$f^v(\mathfrak{g}_j) \leqq c\, k_0^{\frac{\sigma}{n}} \left(\frac{n+\sigma}{\sigma J}\right)^{\frac{v}{n}} \qquad (j = 1, \ldots, k_0).$$

Für $k_0 = 1$ wurde der Satz von v. d. Corput-Schaake [5] bewiesen.

§ 8.

Alternativsatz für ω-konvexe Mengen.

Wir beweisen nun eine Verschärfung von Satz 7.

Satz 10. *Ist $f(\mathfrak{x})$ ω-konvex und gibt es höchstens $k_0 - r - 1$ von v verschiedene Gitterpunktpaare $\pm \mathfrak{r}_j$ $\left(0 \leqq r \leqq k_0 - \left[\frac{k_0}{2}\right] - 1\right)$, so daß*

$$f^v(\mathfrak{r}_j) < c \left(\frac{k_0}{2}\right)^{\frac{v}{n}} \left(\frac{n+\sigma}{\sigma J}\right)^{\frac{v}{n}} \quad j = 1, \ldots, k_0 - r - 1,$$

so gibt es zu jedem $\mathfrak{x}_0$ mindestens $r+1$ Gitterpunkte $\mathfrak{r}_{j'}$, so daß

$$f^v(\mathfrak{r}_{j'} - \mathfrak{x}_0) \leqq c \left(\frac{k_0}{2}\right)^{\frac{v}{n}} \left(\frac{n+\sigma}{\sigma J}\right)^{\frac{v}{n}} \qquad j' = 1, \ldots, r+1.$$

Es ist also die Bedingung $|a_0|^2 \geqq t^v k_0 \int_K \varphi(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x}$ durch $|a_0|^2 \geqq \frac{k_0 t^v}{2} \int \varphi(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x}$ ersetzt.

Beweis. Wir wenden wieder (9) an, und zwar einmal auf

$$\varphi(\mathfrak{x}) = \psi(\mathfrak{x}) = \begin{cases} t^v - f^v(\mathfrak{x}) & \text{wenn } t^v > f^v(\mathfrak{x}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und einmal auf

$$\psi(\mathfrak{x}) = \begin{cases} t^v - f^v(\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_0) & \text{wenn } f^v(\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_0) < t^v \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und das obige $\varphi(\mathfrak{x})$.

Dann erhalten wir

$$\text{(19 a)} \qquad \sum_{\mathfrak{r}} \int_K \varphi(\mathfrak{x}) \left(t^v - f^v(\mathfrak{x} + \mathfrak{r})\right) d\mathfrak{x} = \sum_{\mathfrak{l}} |a_{\mathfrak{l}}|^2$$

und

$$\text{(19 b)} \qquad \sum_{\mathfrak{r}'} \int_K \varphi(\mathfrak{x}) \left(t^v - f^v(\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r}')\right) d\mathfrak{x} = \sum_{\mathfrak{l}} |a_{\mathfrak{l}}|^2 e^{2\pi i \mathfrak{l}\mathfrak{x}_0}.$$

Die Anzahl der Summanden in (19a) sei l, die in (19b) l', also ist

$$(20\,a)\qquad \sum_{\mathfrak{r}} \int_K \varphi(\mathfrak{x})\, f^n(\mathfrak{x}+\mathfrak{r})\, d\mathfrak{x} = l\, t^n \int_K \varphi(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} - \sum_{\mathfrak{l}} |a_{\mathfrak{l}}|^2,$$

$$(20\,b)\qquad \sum_{\mathfrak{r}'} \int_K \varphi(\mathfrak{x})\, f^n(\mathfrak{x}+\mathfrak{x}_0+\mathfrak{r}')\, d\mathfrak{x} = l'\, t^n \int_K \varphi(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} - \sum_{\mathfrak{l}} |a_{\mathfrak{l}}|^2\, e^{2\pi i \mathfrak{l}\mathfrak{x}_0}.$$

Es ist daher

$$\int_K \varphi(\mathfrak{x})\,[\sum_{\mathfrak{r}} f^n(\mathfrak{x}+\mathfrak{r}) + \sum_{\mathfrak{r}'} f^n(\mathfrak{x}+\mathfrak{r}+\mathfrak{x}_0)]\, d\mathfrak{x} = (l+l')\, t^n \int_K \varphi(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} - \\ - \sum_{\mathfrak{l}} |a_{\mathfrak{l}}|^2\,(1+e^{2\pi i \mathfrak{l}\mathfrak{x}_0}).$$

Nun ist

$$|\sum_{\mathfrak{l}} |a_{\mathfrak{l}}|^2\,(1+e^{2\eta i \mathfrak{l}\mathfrak{x}_0})| = |\,2\,|a_0|^2 + \sum_{\mathfrak{l}\neq 0} |a_{\mathfrak{l}}|^2 + \sum_{\mathfrak{l}\neq 0} |a_{\mathfrak{l}}|^2\, e^{2\mu i \mathfrak{l}\mathfrak{x}_0}| \\ \geqq 2\,|a_0|^2 + \sum_{\mathfrak{l}\neq 0} |a_{\mathfrak{l}}|^2 - \sum_{\mathfrak{l}\neq 0} |a_{\mathfrak{l}}|^2 = 2\,|a_0|^2 \geqq k_0\, t^n \int_K \varphi(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x},$$

also

$$\int_K \varphi(\mathfrak{x})\,(\sum_{\mathfrak{r}} f^n(\mathfrak{x}+\mathfrak{r}) + \sum_{\mathfrak{r}'} f^n(\mathfrak{x}+\mathfrak{x}_0+\mathfrak{r}')) \leqq (l+l'-k_0)\, t^n \int_K \varphi(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x}.$$

Nun gibt es wieder ein $\mathfrak{x}'$, so daß

$$\sum_{\mathfrak{r}} f^n(\mathfrak{x}'+\mathfrak{r}) + \sum_{\mathfrak{r}'} f^n(\mathfrak{x}'+\mathfrak{x}_0+\mathfrak{r}') \leqq (l+l'-k_0)\, t^n.$$

Ist $\mathfrak{x}_0$ kein Gitterpunkt, so ist die linksstehende Summe größer als Null. Ist sie nämlich Null, so ist $\mathfrak{x}'+\mathfrak{r} = \mathfrak{x}'+\mathfrak{x}_0+\mathfrak{r}' = 0$, also $\mathfrak{x}_0$ Gitterpunkt. Für einen Gitterpunkt $\mathfrak{g}$ können wir aber sofort den Satz 10 beweisen. Es gibt ja nach Satz 9a $\left[\frac{k_0}{2}\right]$ Gitterpunktpaare $\pm \mathfrak{g}_j \left(j = 1, \ldots \left[\frac{k_0}{2}\right]\right)$, wenn $k_0 > 1$, so daß

$$f^n(\mathfrak{g}_j) \leqq c \left(\frac{k_0}{2}\right)^{\frac{n}{n}} \left(\frac{n+\sigma}{\sigma J}\right)^{\frac{n}{n}}.$$

Es gibt daher $2\left[\frac{k_0}{2}\right]+1$ Gitterpunkte $\mathfrak{g}'$, nämlich $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} \pm \mathfrak{g}_j$, so daß

$$f^n(\mathfrak{g}-\mathfrak{g}') \leqq c \left(\frac{k_0}{2}\right)^{\frac{\sigma}{n}} \left(\frac{n+\sigma}{\sigma J}\right)^{\frac{n}{n}}$$

ist. Nun ist $2\left[\frac{k_0}{2}\right]+1 \geqq k_0 - \left[\frac{k_0}{2}\right] \geqq r+1$ und damit Satz 10 für alle Gitterpunkte bewiesen. Ist $\mathfrak{x}_0$ kein Gitterpunkt, so ist also $l+l'-k_0 > 0$, also $l+l' \geqq k_0+1$. Aus den $l+\bar{l}$ Punkten $\mathfrak{x}'+\mathfrak{r}_j$ $(j = 1, \ldots, l)$ und $\mathfrak{x}'+\mathfrak{x}_0+\mathfrak{r}_j'$ $(j' = 1, \ldots, l')$, die wir kurz mit $\mathfrak{y}_i$ $(i = 1, \ldots, l+l')$ bezeichnen, lassen sich k_0+1 Punkte $\mathfrak{y}_0', \mathfrak{y}_1', \ldots, \mathfrak{y}_{k_0}'$ herausgreifen, so daß

$$f^n(\mathfrak{y}_i - \mathfrak{y}_0') \leqq \frac{c}{l+l'-k_0}\Big(\sum_{\mathfrak{r}} f^n(\mathfrak{x}'+\mathfrak{r}) + \sum_{\mathfrak{r}'} f^n(\mathfrak{x}'+\mathfrak{x}_0+\mathfrak{r}')\Big) < c\, t^n$$

ist. Nehmen wir an, $\mathfrak{y}_0'$ sei von der Form $\mathfrak{x}' + \mathfrak{r}$. Dann können höchstens $k_0 - r - 1$ Punkte $\mathfrak{y}_j' (j \geqq 1)$ von der Form $\mathfrak{x}' + \mathfrak{r}_j$ sein. Denn sonst liegen mindestens $k_0 - r$ Gitterpunktpaare $\pm(\mathfrak{r}_j - \mathfrak{r}_0)$ in $f^\sigma(\mathfrak{x}) < c\,t^\sigma$. Also müssen $+1$ Punkte $\mathfrak{y}_j' (j \geqq 1)$ von der Form $\mathfrak{x}' + \mathfrak{r}' + \mathfrak{x}_0$ sein. Dann gibt es also $r + 1$ Gitterpunkte $\mathfrak{g}_j = \mathfrak{r}_j' - \mathfrak{r}$, so daß $f^\sigma(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{g}_j) < c\,t^\sigma$ ist. Analog schließt man, wenn $\mathfrak{y}_0'$ von der Form $\mathfrak{x}' + \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r}'$ ist.

Literatur.

[1] H. Minkowski, Über Geometrie der Zahlen. Ges. Abhandlungen 1, S. 264.

[2] K. Mahler, Ein Übertragungsprinzip für konvexe Körper. Časopis 68.

[3] C. Siegel, Über Gitterpunkte in konvexen Körpern. Acta Mathem. 65.

[4] J. G. v. d. Corput, Verallgemeinerung einer Mordellschen Beweismethode in der Geometrie der Zahlen I, II. Acta Arithm. 1, S. 2.

[5] J. G. v. d. Corput und G. Schaake, Anwendung einer Blichfeldtschen Beweismethode in der Geometrie der Zahlen. Acta Arithm. 2.

[6] J. Heinhold, Zur Geometrie der Zahlen. Math. Zeitschr. 47 (1941), S. 198.

[7] L. J. Mordell, An arithmetical theorem of linear forms. Acta Arithm. 2.

(Eingegangen am 2. Dezember 1942.)

Ein Beitrag zur Gruppenaxiomatik.

Von

Paul Lorenzen, zur Zeit in Wesermünde.

Einleitung 313
§ 1. Permutationsgruppen 314
§ 2. Die Gruppenaxiome 315
§ 3. Unvollständige Systeme 319
§ 4. Die vollständigen viergliedrigen Svsteme 320
§ 5. Assoziativaxiome 321
§ 6. Die vollständigen dreigliedrigen Systeme 323

Einleitung.

Diese Arbeit gibt eine Aufstellung *aller* kürzesten Axiomensysteme für Gruppen, die aus den Axiomen des § 2 bestehen. § 2 enthält alle Axiome, die in der Gruppenaxiomatik gebräuchlich sind, mit Ausnahme der verschiedenen Formen des Assoziativaxioms. Als Assoziativaxiom wird das Axiom A (vgl. § 2) von Baer-Levi [1]) benutzt, das bei eindeutiger Multiplikation dem üblichen $a\,(bc) = (ab)c$ äquivalent ist, sonst aber schwächer ist. Es zeigt sich, daß auch mit A ein Axiomensystem für Gruppen aufgestellt werden kann, das — genau wie das System des Verf.[2]) — nur noch ein allgemeines Unitäts-, ein allgemeines Existenzaxiom und das Axiom rEi (vgl. § 2) enthält. Man ist berechtigt, das neue System „schwächer" als das bekannte Garversche System[3]) (vgl. § 4) zu nennen.

In den letzten Paragraphen werden Assoziativaxiome benutzt, die stärker als A sind, wodurch es möglich wird, alle viergliedrigen Systeme des § 4 noch zu kürzen. Man erhält sieben verschiedene dreigliedrige Systeme.

Die ganze Arbeit ist ohne Vorkenntnisse lesbar, da in § 1 der Gruppenbegriff aus der Theorie der Permutationen abgeleitet wird.

Herrn Prof. H. Scholz danke ich sehr für seine Anregungen und sein Interesse an diesem Beitrage.

---

[1]) Sitz.ber. Heidelberger Akad. d. Wiss. 1932, S. 3.
[2]) J. f. Math. 182, 1940.
[3]) Amer. J. Math. 57 (1935), S. 276.

§ 1.

Permutationsgruppen.

Der allgemeine Gruppenbegriff ist aus der Theorie der Permutationen entstanden. Unter einer Permutation φ einer Menge M versteht man eine eineindeutige Abbildung $a \to \varphi a$ von M auf sich.

Zunächst interessiert uns, daß sich aus je zwei Permutationen von M: $a \to \varphi a$ und $a \to \psi a$ neue Permutationen bilden lassen: $a \to \varphi(\psi a)$ ist eine Permutation, die wir mit $\varphi\,\psi$ bezeichnen, ebenso ist $\psi a \to \varphi a$ eine Permutation. Wir bezeichnen diese mit φ/ψ. Die Verknüpfungen je zweier Permutationen φ, ψ zu $\varphi\,\psi$ und φ/ψ sind nicht unabhängig voneinander: es gilt nämlich stets

$$\varphi\,\psi/\psi = \varphi.$$

Hieraus ergibt sich, daß wir beide Verknüpfungen aus einer einzigen dreistelligen Relation ableiten können. Dazu definieren wir für je drei Permutationen φ, ψ, χ von M eine Relation $\frac{\varphi\ \psi}{\chi}$ durch:

$\frac{\varphi\ \psi}{\chi}$ ist genau dann wahr, wenn $\varphi\,\psi = \chi$, also $\chi/\psi = \varphi$ ist.

Als nächstes definieren wir jetzt die Permutationsgruppen einer Menge M:

Eine Permutationsgruppe G von M ist eine nichtleere Menge von Permutationen von M, die mit φ und ψ auch φ/ψ enthält.

Da eine Permutationsgruppe G mindestens eine Permutation φ enthält, enthält G auch φ/φ. φ/φ ist die „identische Permutation" $a \to a$. $\varphi/\varphi/\varphi$ ist die „zu φ inverse Permutation" $\varphi\, a \to a$, die wir mit φ' bezeichnen.

Die Zuordnung $\varphi \longleftrightarrow \varphi'$ ist also eine eineindeutige Zuordnung von G zu sich. Für drei Permutationen φ, ψ und χ von G ist ersichtlich $\frac{\varphi\ \psi}{\chi}$ genau dann wahr, wenn $\frac{\psi'\ \varphi'}{\chi'}$ wahr ist. Demnach ist eine nichtleere Menge G von Permutationen von M nicht nur durch:

1) G enthält mit χ und ψ auch eine Permutation φ mit $\frac{\varphi\ \psi}{\chi}$,

sondern auch durch:

2) G enthält mit χ und φ auch eine Permutation ψ mit $\frac{\varphi\ \psi}{\chi}$,

als Permutationsgruppe gekennzeichnet.

Nach der Definition der Permutationsgruppen wenden wir uns jetzt dem allgemeinen Gruppenbegriff zu.

Dazu sei A eine Menge, in der eine dreistellige Relation R erklärt ist, d. h. je drei Elementen a, b, c von A sei eine Aussage $R(a, b, c)$ zugeordnet. Da zwei Relationen R_1 und R_2 in A dann als gleich betrachtet werden, wenn

$R_1(a, b, c)$ genau dann wahr ist, wenn $R_2(a, b, c)$ wahr ist, interessieren von A nur die Elemente a, b, c, für die $R(a, b, c)$ wahr ist. Die Vereinigungsmenge dieser Elemente bezeichnen wir als das „Feld" (R) von R.

Ist $\overline{R}$ eine dreistellige Relation in einer Menge $\overline{A}$, so heißt $\overline{R}$ isomorph zu R, wenn es eine eineindeutige Abbildung $a \to \bar{a}$ von (R) auf $(\overline{R})$ gibt, so daß $\overline{R}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ genau dann wahr ist, wenn $R(a, b, c)$ wahr ist.

Wir haben gesehen, daß sich in jeder Permutationsgruppe eine dreistellige Relation $\frac{\varphi\psi}{\chi}$ erklären läßt. Jede zu einer solchen Relation isomorphe Relation nennen wir eine *Gruppenrelation*.

Die Aufgabe der Gruppenaxiomatik läßt sich jetzt dahingehend formulieren, möglichst einfache Bedingungen oder Axiome anzugeben, denen eine Relation R genau dann genügt, wenn R eine Gruppenrelation ist.

Ehe wir im nächsten Paragraphen einen Weg zur Lösung dieser Aufgabe beschreiben, bemerken wir noch, daß mit der Relation R auch die „zu R inverse Relation" R', für die $R'(a, b, c)$ genau dann wahr ist, wenn $R(b, a, c)$ wahr ist, eine Gruppenrelation ist. Denn ist $a \to \varphi$ eine bezüglich R isomorphe Abbildung von (R) auf eine Permutationsgruppe, so ist die Abbildung $a \to \varphi'$ isomorph bezüglich R'.

§ 2.

Die Gruppenaxiome.

Eine Kennzeichnung der Gruppenrelationen von ganz anderer Art als im § 1 wird durch die folgende Betrachtung nahegelegt. Es sei G eine Permutationsgruppe und a, b, c seien Elemente von G, für die $\frac{a\,b}{c}$ wahr ist. Durch je zwei Elemente von a, b, c ist das dritte eindeutig bestimmt. Jedem Element a von G läßt sich also eine Permutation φ_a von G zuordnen, die b genau dann auf c abbildet, wenn $\frac{a\,b}{c}$ wahr ist, d. h. $\varphi_a b = ab$. Die Abbildung $a \to \varphi_a$ ist isomorph bezüglich der Relation $\frac{a\,b}{c}$, da $\varphi_{ab} = \varphi_a \varphi_b$ ist, denn für alle c von G gilt $\varphi_{ab} c = (ab)c$ und $\varphi_a \varphi_b c = a(bc)$. Es sei nun eine beliebige dreistellige Relation R vorgelegt. Statt $R(a, b, c)$ schreiben wir kürzer $\frac{a\,b}{c}$ und wollen annehmen, daß R die folgenden Axiome erfüllt:

U: Für alle a, b von (R) gibt es höchstens ein Element c von (R) mit $\frac{a\,b}{c}$.

rU: Für alle a, c von (R) gibt es höchstens ein Element b von (R) mit $\frac{a\,b}{c}$.

E: Für alle a, b von (R) gibt es mindestens ein Element c von (R) mit $\frac{a\,b}{c}$.

rE: Für alle a, c von (R) gibt es mindestens ein Element b von (R) mit $\frac{a\,b}{c}$.

Bezeichnen wir dann mit ab das wegen U und E eindeutig bestimmte Element c, für das $\frac{a\,b}{c}$ wahr ist, so wird durch $\varphi_a b = ab$ wie oben jedem Element a von (R) eine Permutation φ_a von (R) zugeordnet.

Diese Zuordnung $a \to \varphi_a$ ist eineindeutig, wenn R dem Axiom

$l\,u$: Ist für alle b, c von (R) genau dann $\frac{a_1\,b}{c}$ wahr, wenn $\frac{a_2\,b}{c}$ wahr ist, so ist $a_1 = a_2$

genügt, und ist isomorph bezüglich R, wenn R dem Axiom

A: Für alle a, b, c von (R) gilt $a\,(bc) = (ab)c$

genügt.

Um nun schließen zu können, daß R eine Gruppenrelation ist, müssen wir nur noch zeigen, daß die Permutationen von (R) eine Permutationsgruppe bilden. Dazu muß R dem Axiom

i: Es gibt ein e mit $e \in (R)$

genügen. Wegen 2) § 1 folgt jetzt aus i und rE, daß die Permutationen φ_a eine Gruppe bilden.

Damit ist also gezeigt, daß eine Relation R genau dann eine Gruppenrelation ist, wenn R den Axiomen A, U, rU, E, rE, $l\,u$ und i genügt.

Nachdem einmal diese Kennzeichnung der Gruppenrelationen gewonnen ist, entsteht sofort die Frage nach weiteren und womöglich „einfacheren" Kennzeichnungen durch ähnliche Axiome. Wir wollen diese Frage systematisch beantworten und geben zunächst eine Aufstellung aller Axiome, die von uns in Betracht gezogen werden sollen:

1) Die allgemeinen Unitätsaxiome, zu denen wir außer U und rU noch

$l\,U$: Für alle b, c von (R) gibt es höchstens ein Element a von (R) mit $\frac{a\,b}{c}$,

und außer $l\,u$ noch

u: Ist für alle a, b von (R) genau dann $\frac{a\,b}{c_1}$ wahr, wenn $\frac{a\,b}{c_2}$ wahr ist, so ist $c_1 = c_2$,

ru: Ist für alle a, c von (R) genau dann $\frac{a\,b_1}{c}$ wahr, wenn $\frac{a\,b_2}{c}$ wahr ist, so ist $b_1 = b_2$,

hinzurechnen.

2) Die allgemeinen Existenzaxiome E, rE und

$l\,E$: Für alle b, c von (R) gibt es mindestens ein Element a von (R) mit $\frac{a\,b}{c}$.

3) Die Einsaxiome

lI: Es gibt ein e mit $\frac{e\,a}{a}$ für alle Elemente a von (R),

rI: Es gibt ein e mit $\frac{a\,e}{a}$ für alle Elemente a von (R),

I: Es gibt ein e mit $\frac{e\,e}{e}$,

li: Es gibt ein e mit $\frac{e\,a}{a}$ für ein Element a von (R),

ri: Es gibt ein e mit $\frac{a\,e}{a}$ für ein Element a von (R).

Diese Axiome und i lassen sich alle in der Form

J: Es gibt ein e mit $J(e)$

schreiben. Sie sind offensichtlich nicht unabhängig voneinander, sondern I ist eine Folge von lI oder rI, ebenso ist i eine Folge von li oder ri. Andererseits folgt li bzw. ri aus I, aber auch aus lE bzw. rE.

4) Die speziellen Unitätsaxiome

lUJ: Es gibt ein e mit $J(e)$, zu dem es zu jedem a von (R) höchstens ein Element a' von (R) mit $\frac{a'\,a}{e}$ gibt,

rUJ: Es gibt ein e mit $J(e)$, zu dem es zu jedem a von (R) höchstens ein Element a' von (R) mit $\frac{a\,a'}{e}$ gibt,

wobei J ein beliebiges Einsaxiom oder i bezeichnet.

5) Die speziellen Existenzaxiome

lEJ: Es gibt ein e mit $J(e)$, zu dem es zu jedem a von (R) mindestens ein Element a' von (R) mit $\frac{a'\,a}{e}$ gibt,

rEJ: Es gibt ein e mit $J(e)$, zu dem es zu jedem a von (R) mindestens ein Element a' von (R) mit $\frac{a\,a'}{e}$ gibt,

wobei wieder J ein beliebiges Einsaxiom oder i ist.

Als letztes Gruppenaxiom wählen wir A, das wir ohne Voraussetzung von U oder E in der Form von Baer-Levi [1]) benutzen wollen. Um diese Formulierung übersichtlich hinschreiben zu können, führen wir die folgende abkürzende Schreibweise ein, die wir in der ganzen Arbeit benutzen werden:

Wir schreiben $\dfrac{a\,b\,c}{\dfrac{d'}{d''}}$ für die logische Summe von $\dfrac{a\,b}{d'}$ und $\dfrac{d'\,c}{d''}$. Wir schreiben $\dfrac{a\,\dfrac{b\,c}{d'}}{d''}$ für die logische Summe von $\dfrac{b\,c}{d'}$ und $\dfrac{a\,d'}{d''}$ und $\dfrac{\dfrac{d''}{d'}}{\dfrac{a\,b\,c}{d''}}$ für die logische Summe von $\dfrac{a\,b\,c}{\dfrac{d'}{d''}}$ und $\dfrac{a\,b\,c}{\dfrac{d'}{d''}}$.

Das letzte Axiom lautet jetzt:

A: Für alle $a, b, c, d', d', d'', d''$ von (R) mit $\dfrac{\dfrac{d''}{d'}}{\dfrac{a\,b\,c}{d''}}$ gibt es d', d' von (R) mit $\dfrac{\dfrac{d''}{d'}}{\dfrac{a\,b\,c}{d'}}$.

Alle diese Axiome bezeichnen wir als Gruppenaxiome, und es ist also unsere Aufgabe, Systeme von Gruppenaxiomen zu suchen, mit der Eigenschaft, daß jede Relation, die allen Axiomen des Systems genügt, eine Gruppenrelation ist. Jedes System von Gruppenaxiomen mit dieser Eigenschaft nennen wir vollständig.

Wir haben gesehen, daß das System $A, U, rU, E, rE, l\,u, i$ vollständig ist. Wegen der Schlußbemerkung von § 1 folgt hieraus sofort die Vollständigkeit von $A, U, l\,U, E, lE, r\,u, i$. Denn genügt eine Relation R den Axiomen dieses Systems, so genügt die zu R inverse Relation R' ersichtlich den Axiomen $A, U, rU, E, rE, l\,u, i$. Also ist R' eine Gruppenrelation, woraus aber folgt, daß auch R eine Gruppenrelation ist.

Allgemein erhalten wir aus einem beliebigen vollständigen System durch Vertauschung von l und r (bei der die Axiome A, U, E, I, i ungeändert bleiben) wieder ein vollständiges System.

Die Frage nach „möglichst einfachen" vollständigen Systemen führt uns dazu, alle Systeme mit möglichst wenig Axiomen, also alle kürzesten vollständigen Systeme, zu bestimmen. Wir werden in § 4 sehen, daß jedes vollständige System mindestens vier Axiome enthält und werden dort auch alle viergliedrigen vollständigen Systeme aufstellen. Die Vollständigkeitsbeweise geben wir allerdings — um Wiederholungen zu vermeiden — erst in § 6.

Zunächst betrachten wir zur Vorbereitung von § 4 einige unvollständige Systeme.

§ 3.

Unvollständige Systeme.

Wir beweisen die Unvollständigkeit eines Systems durch explizite Aufweisung einer Relation, die alle Axiome des Systems erfüllt, aber keine Gruppenrelation ist. Diese Aufweisung geschieht durch Hinschreiben einer „Multiplikationstafel", die jedem geordneten Paar a, b von Elementen einer Menge A eine Untermenge ab von A zuordnet. Dadurch wird diejenige Relation definiert, für die $\frac{ab}{c}$ genau dann wahr ist, wenn $c \in ab$.

1)

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	1	5	6	4
3	3	1	2	6	4	5
4	4	5	6	1	2	3
5	5	6	4	3	1	2
6	6	4	5	2	3	1

Definiert eine Relation, die alle Gruppenaxiome außer A erfüllt, denn es ist z. B.

$$\frac{\frac{5}{2}}{\frac{4\,5\,6}{\frac{2}{4}}}$$

2)

	1	2	3
1	1	2	3
2	2	1, 3	0
3	3	0	1, 2

Hier sind alle Gruppenaxiome außer U und E erfüllt, wie man sofort nachprüfen kann.

3)

	1	1.2
1	1	2
2	2	1, 2

Hier sind alle Gruppenaxiome außer U, lU und rU erfüllt.

4)

	1	2	3
1	1	2	3
2	2	1	0
3	3	0	1

erfüllt alle Gruppenaxiome außer E, lE und rE.

Um im nächsten Paragraphen beweisen zu können, daß die dort aufgestellten viergliedrigen vollständigen Systeme die einzig möglichen sind, brauchen wir noch die Unvollständigkeit von drei weiteren Systemen.

Das System α) A, U, lU, E, lE, rI ist unvollständig.

Beweis:

	1	2
1	1	1
2	2	2

Die Unvollständigkeit der beiden letzten zu betrachtenden Systeme läßt sich nur durch Relationen in unendlichen Mengen beweisen.

Es sei dazu M eine abzählbar unendliche Menge und A die Menge aller eineindeutigen Abbildungen $a \to \varphi a$ von M in sich. φ ist also eine eineindeutige Abbildung von M auf die Untermenge φM von M.

Die Relation $\frac{\varphi\,\psi}{\chi}$, die genau dann wahr ist, wenn $\varphi(\psi a) = \chi a$ für alle Elemente a von M ist, erfüllt die Axiome des Systems

$$\beta)\ A,\ U,\ lU,\ rU,\ E,\ lI,\ rI,$$

ist aber keine Gruppenrelation, da sie z. B. lE nicht erfüllt. Also ist $\beta)$ ein unvollständiges System.

Ebenso ist die Relation $\frac{\varphi\,\psi}{\chi}$, die genau dann wahr ist, wenn für alle Elemente a von M $\varphi(\psi a) = \chi a$ ist, und außerdem die Mengen $M - \varphi M$ und $M - \psi M$ unendlich sind[1]), keine Gruppenrelation, erfüllt aber die Axiome des Systems

$$\gamma)\ A,\ U,\ rU,\ E,\ lE,\ li,$$

dessen Unvollständigkeit damit bewiesen ist.

§ 4.

Die vollständigen viergliedrigen Systeme.

Aus 1) im letzten Paragraphen folgt, daß jedes System von Gruppenaxiomen unvollständig ist, das A nicht enthält. Jedes vollständige System muß also A enthalten. Genau so ersieht man aus 2) bzw. 3) bzw. 4), daß jedes vollständige System U oder E bzw. U oder lU oder rU bzw. E oder lE oder rE enthalten muß.

Sehen wir hier, wie auch stets im folgenden, von der Vertauschung von l und r ab, so ergibt sich, daß jedes vollständige System A, U, E oder A, U, lE oder A, lU, E enthalten muß. Wie das System $\alpha)$ in § 3 zeigt, sind die drei Systeme A, U, E; A, U, lE und A, lU, E unvollständig, sogar auch noch, wenn man rI als viertes Axiom hinzunimmt.

Jedes vollständige System ist also mindestens viergliedrig, und es wird jetzt unsere Aufgabe sein, alle vollständigen viergliedrigen Systeme aufzustellen. Wir nehmen zunächst die Systeme, die A, U und E enthalten und haben also alle Gruppenaxiome darauf zu untersuchen, ob sie, als viertes Axiom zu A, U und E genommen, ein vollständiges System ergeben. Als viertes Axiom kommen die Einsaxiome und auch die allgemeinen Unitätsaxiome wegen $\beta)$ nicht in Frage, ebenso die allgemeinen Existenzaxiome wegen $\alpha)$ nicht. Von den speziellen Existenzaxiomen bleibt wegen $\alpha)$ allein $lE\,lI$ übrig.

Das System $A, U, E, lE\,lI$ ist nun in der Tat vollständig, wie zuerst Dickson[4]) zeigte. Von uns wird die Vollständigkeit dieses Systems in § 6 mitbewiesen werden.

---

[4]) Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905), S. 198.

Dort werden wir auch beweisen, daß die folgenden Systeme vollständig sind:

$$A,\ U,\ lE,\ lI$$
$$A,\ U,\ lE,\ rEi$$
$$A,\ U,\ lE,\ rUri.$$

A, U, lE ergibt also mit jedem Axiom, das lI enthält, mit rUI oder $rUrI$, mit jedem Axiom rEJ und auch mit rE und i ein vollständiges System. Jedes andere Axiom als viertes Axiom hinzugenommen, führt zu einem unvollständigen System: nämlich lU und rI wegen α) und E, rU und $rUli$ wegen γ).

Die Vollständigkeit des Systems A, U, lE, lI wurde von Garver[3]) bewiesen. Will man entscheiden, ob das System A, U, lE, rEi „schwächer" ist als das Garversche System, so hat man nur zu untersuchen, in welchem Sinne das Axiom rEi „schwächer" ist als lI.

Nun ist das folgende Axiom:

Es gibt ein e, zu dem es zu jedem a von (R) mindestens ein Element b von (R) mit $\frac{ea}{b}$ gibt

augenscheinlich eine Folge von lI, aber nicht umgekehrt. Dieses neue Axiom ist also sicher „schwächer" als lI. Da es nun aber aus rEi durch bloße Vertauschung der Reihenfolge hervorgeht, ist es gerechtfertigt, auch rEi „schwächer" als lI zu nennen.

Um alle vollständigen viergliedrigen Systeme aufzustellen, müssen wir nur noch die Systeme untersuchen, die A, lU und E enthalten. Wir zeigen in § 6 die Vollständigkeit der Systeme

$$A,\ lU,\ E,\ lElI$$
$$A,\ lU,\ E,\ rEli.$$

Auch hier ist kein anderes Axiom als viertes Axiom möglich: ein Unitätsaxiom nicht wegen β), lE und $lErI$ nicht wegen α) und rE und $rEri$ nicht wegen γ).

§ 5.

Assoziativaxiome.

Da jedes vollständige System A und U oder E enthalten muß, liegt es nahe, statt A Assoziativaxiome zu benutzen, aus denen sich außer A noch eine Unitäts- oder Existenzaussage folgern läßt.

HUNTINGTON[5]) hat das folgende Axiom eingeführt:

$$UA\text{: Aus } \frac{\dfrac{d'''}{d''}}{\dfrac{a\,b}{d'}\;c} \text{ folgt } d'' = d'''.$$

Aus UA folgt ersichtlich A, aber nicht U. Es läßt sich sogar U auch nicht aus UA, $l\,U$, $r\,U$, $l\,E$ und i folgern, wie die folgende Relation zeigt:

	1	2	3	4	...
1	0	0	0	0	...
2	0	0	0	0	...
3	1, 2	0	0	0	...
4	0	1	0	0	...
5	3	0	0	0	...
6	0	2	0	0	...
7	0	0	1	0	...
8	4	0	0	0	...
9	0	3	0	0	...
.		⋱			
.		...			
.					

(0 bezeichnet die leere Menge)

Dagegen gilt:

1) Aus UA und $l\,I$ folgt U.

Beweis. Es gibt ein e mit $\frac{e\,a}{a}$ für alle Elemente a von (R). Gilt also $\frac{a\,b}{c_1}$ und $\frac{a\,b}{c_2}$, so gilt $\dfrac{\dfrac{\dfrac{c_2}{c_2}}{e\;a\;b}}{\dfrac{a}{c_1}}$, woraus $c_1 = c_2$ folgt.

Mit 1) können wir jetzt zeigen, daß U auch aus UA, $l\,E$ und $r\,i$ folgt. Es gilt nämlich:

2) Aus UA, $l\,E$ und $r\,i\,(e)$ folgt $r\,I\,(e)$.

Beweis. Wegen $r\,i\,(e)$ gibt es ein Element d mit $\frac{d\,e}{d}$. Zu jedem Element a von (R) gibt es also wegen $l\,E$ Elemente a_1 und b mit $\dfrac{\dfrac{\dfrac{a_1}{d}}{b\;d\;e}}{\dfrac{a_1}{a}}$,

woraus $a_1 = a$, also $\frac{a\,e}{a}$ folgt, w. z. b. w.

[5]) Trans. Amer. Math. Soc. 4 (1903), S. 27.

Als Assoziativaxiom, das gleichzeitig eine Existenzaussage enthält benutzen wir

EA: Für alle Elemente a, b, c, d von (R) gibt es genau dann ein Element d' mit $\dfrac{\dfrac{a\ b}{d'}\ c}{d}$, wenn es ein Element $d`$ mit $\dfrac{a\ \dfrac{b\ c}{d`}}{d}$ gibt.

Auch hier folgt A, aber nicht E, aus EA. Das Beispiel

	1	2
1	1	2
2	2	0

zeigt, daß E auch nicht aus EA, U, lU, rU, lI und rI folgt.

Dagegen gilt

3) Aus EA und $lE\,lI$ folgt E.

Beweis. Wegen $lE\,lI$ gibt es ein Element e mit $\dfrac{e\ b}{b}$ für alle Elemente b von (R) und zu jedem Element a von (R) ein Element a' mit $\dfrac{\dfrac{a'\ a\ b}{e}}{b}$, woraus die Existenz eines Elementes c mit $\dfrac{a\ b}{c}$ folgt,

w. z. b. w.

Wir begnügen uns hier mit diesen Eigenschaften der Assoziativaxiome UA und EA, um uns wieder der Frage nach allen kürzesten vollständigen Axiomensystemen zuzuwenden.

§ 6.

Die vollständigen dreigliedrigen Systeme.

Wir wollen nun feststellen, welche vollständigen dreigliedrigen Systeme es gibt, wenn wir die Assoziativaxiome UA und EA noch zu den Gruppenaxiomen hinzunehmen. Ersichtlich haben wir dazu nur zu untersuchen, ob sich in den vollständigen viergliedrigen Systemen des § 4 die Axiome A und U bzw. E durch UA bzw. EA ersetzen lassen. Wie wir jetzt beweisen werden, entsteht aus jedem viergliedrigen System des § 4 durch diese Ersetzung ein vollständiges System. Wir haben also die Vollständigkeit der folgenden sieben Systeme zu zeigen:

1) $UA,\ lE,\ lI$
2) $UA,\ lE,\ rEi$
3) $UA,\ lE,\ rUri$
4) $UA,\ E,\ lE\,lI$
5) $EA,\ U,\ lE\,lI$
6) $EA,\ lU,\ lE\,lI$
7) $EA,\ lU,\ rE\,li.$

Vollständigkeitsbeweis von 1):

R sei eine dreistellige Relation. Wir schreiben $\frac{a\,b}{c}$ statt $R(a, b, c)$ und setzen voraus, daß R den Axiomen von 1) genügt. Um zu zeigen, daß R eine Gruppenrelation ist, haben wir nach dem Ergebnis von § 2 nur zu zeigen, daß R auch den Axiomen U, E, lU, ru genügt.

Die Gültigkeit von U ergibt sich direkt aus 1) in § 5. Um auf E schließen zu können, bemerken wir zunächst, daß es wegen lI ein Element e mit $rI(e)$ gibt, denn aus $lI(e)$ folgt zunächst $ri(e)$ und hieraus mit 2) in § 5 auch $rI(e)$. Zu jedem Element b von (R) gibt es also wegen lE Elemente b' und b_1 mit $\dfrac{\dfrac{b_1}{e}}{\dfrac{b_1\,\overline{b'\,b}}{b}}$, woraus $b_1 = b$, also $\frac{b\,b'}{e}$ folgt. Zu jedem Element a von (R) gibt es weiterhin wegen lE stets Elemente c und a_1 mit $\dfrac{\dfrac{a_1}{e}}{\dfrac{a_1\,\overline{b\,b'}}{a}}$, woraus $a_1 = a$, also $\frac{a\,b}{c}$ folgt. Dadurch ist die Gültigkeit von E gezeigt. Aus $\frac{a\,b}{c}$ können wir jetzt also auf die Existenz eines Elementes a_1 mit $\dfrac{\dfrac{a}{e}}{\dfrac{a\,\overline{b\,b'}}{a_1}}$ schließen, woraus $a_1 = a$, also $\frac{c\,b'}{a}$ folgt. Wegen U gibt es also zu zwei Elementen b, c von (R) höchstens ein Element a mit $\frac{a\,b}{c}$, d. h. R erfüllt das Axiom lU.

Die Gültigkeit von ru schließlich ergibt sich direkt aus der Gültigkeit von lI.

Damit ist die Vollständigkeit des Systems 1) bewiesen.

Vollständigkeitsbeweis von 2):

R sei eine Relation, die den Axiomen von 2) genügt. Können wir zeigen, daß R auch dem Axiom lI genügt, so haben wir damit bewiesen, daß R alle Axiome von 1) erfüllt, also eine Gruppenrelation ist.

Es gibt ein Element d von (R) mit $rEi(d)$, also gibt es auch ein Element e mit $\frac{d\,e}{d}$, d. h. mit $ri(e)$. Wegen 2) in § 5 folgt hieraus $rI(e)$. Wegen $rEi(d)$ gibt es ein Element d_1 mit $\frac{e\,d_1}{d}$ und wegen lE gibt es Elemente d' und d'' mit $\dfrac{\dfrac{d''}{e}}{\dfrac{d''\,\overline{d'\,d_1}}{d}}$, woraus $d'' = d$, also $\frac{d\,d'}{e}$ folgt. Wegen lE gibt es ferner zu jedem Element a von (R) ein Element e_1 mit $\frac{e_1\,a}{a}$ und Elemente d_2 und e_2 mit

$\dfrac{\dfrac{e_2}{e}}{\dfrac{e_2\ d\ d'}{d_2}}$, woraus $e_1 = e_2$, also $\dfrac{e_1\ d}{d_2}$ folgt. Wegen $rEi(d)$ gibt es ein Element b

mit $\dfrac{\dfrac{d_2}{d}}{\dfrac{e_1\ a\ b}{a}}$, woraus $d_2 = d$, also $\dfrac{e_1\ d}{d}$ folgt. Damit gilt aber auch $\dfrac{\dfrac{e_1}{e}}{\dfrac{e_1\ d\ d'}{d}}$, woraus

$e_1 = e$, also $\dfrac{e\ a}{a}$ folgt, d. h. $l\,I(e)$. Damit ist die Vollständigkeit von 2) bewiesen.

Vollständigkeitsbeweis von 3):

Wir führen die Vollständigkeit von 3) auf die Vollständigkeit von 2) zurück, haben also zu zeigen, daß eine Relation R, die den Axiomen von 3) genügt, auch das Axiom rEi erfüllt. Dazu sei R eine Relation, die die Axiome von 3) erfüllt. Es gibt also ein Element e von R mit $rUri(e)$. Nach 2) in § 5 folgt $rI(e)$. Wegen $l\,E$ gibt es zu jedem Element a von (R) Elemente a'

und e_1 mit $\dfrac{\dfrac{e_1}{e}}{\dfrac{e_1\ a'\ a}{a'}}$, woraus $e_1 = e$, also $\dfrac{e\ a'}{a'}$ folgt. Wieder wegen $l\,E$ gibt es

Elemente a_1 und a_1' mit $\dfrac{\dfrac{a_1'}{e}}{\dfrac{a_1'\ a_1\ a'}{a'}}$, woraus $a_1' = a'$, also $\dfrac{a'\ a_1}{e}$ folgt. Wegen $rUri(e)$

folgt aus $\dfrac{a'\ a}{e}$ und $\dfrac{a'\ a_1}{e}$ jetzt $a_1 = a$, also wegen $\dfrac{a_1\ a'}{e}$ auch $\dfrac{a\ a'}{e}$, d. h. $rEi(e)$.

Damit ist die Vollständigkeit von 3) bewiesen.

Vollständigkeitsbeweis von 4):

Wir führen die Vollständigkeit von 4) auf die Vollständigkeit von 1) zurück. Sei also R eine Relation, die den Axiomen von 4) genügt. Wir haben zu zeigen, daß R das Axiom $l\,E$ erfüllt.

Es gibt ein Element e mit $l\,E\,l\,I(e)$. Demnach gibt es zu jedem Element c von (R) Elemente c' und c_1 mit $\dfrac{c'\ c}{e}$ und $\dfrac{c_1\ c'}{e}$. Wegen E gibt es also ein Element c_2

mit $\dfrac{\dfrac{c_2}{e}}{\dfrac{c_1\ c'\ c}{c}}$, woraus $c_2 = c$, also $\dfrac{c_1\ e}{c}$ folgt. Wieder wegen E gibt es jetzt

auch ein Element c_3 mit $\dfrac{\dfrac{c}{e}}{\dfrac{c_1\ e\ e}{c_3}}$, woraus $c_3 = c$, also $\dfrac{c\ e}{c}$ folgt.

Da es zu jedem Element b von (R) wegen $l E\, l I(e)$ ein Element b' mit $\frac{b'\,b}{e}$ gibt, gibt es wegen E auch Elemente a und c_1 mit $\frac{\frac{c}{e}\;\frac{c\,b'\,b}{a}}{c_1}$, woraus $c_1 = c$, also $\frac{a\,b}{c}$ folgt. Zu je zwei Elementen b, c von (R) gibt es also mindestens ein Element a mit $\frac{a\,b}{c}$, d. h. das Axiom $l E$ ist erfüllt.

Vollständigkeitsbeweis von 5):

Wegen 3) in § 5 erfüllt jede Relation, die den Axiomen von 5) genügt, auch das Axiom E und also alle Axiome von 4). Damit ist die Vollständigkeit von 5) zurückgeführt auf die Vollständigkeit von 4).

Vollständigkeitsbeweis von 6):

Wir führen die Vollständigkeit von 6) auf die Vollständigkeit von 5) zurück. Sei also R eine Relation, die die Axiome von (6) erfüllt. Wir haben zu zeigen, daß auch das Axiom U erfüllt ist.

Wegen 3) in § 5 gilt zunächst das Axiom E. Ferner gibt es ein Element e von (R) mit $l I(e)$. Es gilt also auch $\frac{e\,e}{e}$ und wegen E gibt es zu jedem Element c von (R) ein Element c_1 mit $\frac{c\,\frac{e\,e}{e}}{c_1}$, woraus wegen EA die Existenz eines Elementes c_2 mit $\frac{c\,\frac{e\,e}{c_2}}{c_1}$ folgt. Wegen $l U$ folgt jetzt $c_2 = c$, also $\frac{c\,e}{c}$. Wegen $l E\, l I(e)$ gibt es weiterhin ein Element c' mit $\frac{c\,\frac{c'\,c}{e}}{c}$, woraus die Existenz eines Elementes e_1 mit $\frac{c\,\frac{c'\,c}{e_1}}{c}$ folgt. Wieder wegen $l U$ folgt $e_1 = e$, also $\frac{c\,c'}{e}$.

Jetzt können wir zeigen, daß es zu zwei Elementen a, b von (R) höchstens ein Element c mit $\frac{a\,b}{c}$ gibt. Denn aus $\frac{c'\,\frac{a\,b}{c}}{e}$ folgt die Existenz eines Elementes b' mit $\frac{c'\,\frac{a\,b}{b'}}{e}$, worin wegen $l U$ zunächst b' und dann auch c' durch a und b eindeutig bestimmt sind. Wegen $\frac{c\,c'}{e}$ und nochmals $l U$ ist dann auch c durch a und b eindeutig bestimmt.

Also ist das Axiom U erfüllt.

Vollständigkeitsbeweis von 7):

Wir führen die Vollständigkeit von 7) auf die Vollständigkeit von 6) zurück. Sei dazu R eine Relation, die den Axiomen von 7) genügt. Wir haben zu zeigen, daß R das Axiom $lElI$ erfüllt.

Wegen li gibt es Elemente e und c mit $\frac{e\,c}{c}$, woraus $\frac{e\,e\,c}{\frac{c}{e}}$ folgt. Wegen EA folgt die Existenz eines Elementes e_1 mit $\frac{e\,e\,c}{\frac{e_1}{c}}$, woraus $e_1 = e$ wegen lU folgt. Also gilt $\frac{e\,e}{e}$. Wegen $rE\,li(e)$ gibt es zu jedem Element a von (R) ein Element a' mit $\frac{e\,a\,a'}{e}$, woraus die Existenz eines Elementes a_1 mit $\frac{e\,a\,a'}{\frac{a_1}{e}}$ folgt. Wegen lU folgt $a_1 = a$, also $\frac{e\,a}{a}$, d. h. $lI(e)$. Wegen $rE\,lI(e)$ gibt es zu a' auch ein Element a_1 mit $\frac{a'\,e\,a_1}{e}$, woraus die Existenz eines Elementes a_1' mit $\frac{a'\,e\,a_1}{\frac{a_1'}{e}}$ folgt. Wegen lU folgt $a_1' = a'$, also $\frac{a'\,e}{a'}$. Hieraus folgt jetzt $\frac{a'\,a\,a'}{\frac{e}{a'}}$, woraus die Existenz eines Elementes e_1 mit $\frac{a'\,a\,a'}{\frac{e_1}{a'}}$ folgt. Wieder wegen lU folgt $e_1 = e$, also $\frac{a'\,a}{e}$, d. h. $lElI(e)$, w. z. b. w.

(Eingegangen am 6. Juni 1942.)

Die Elementarteiler eines Polynoms in einer Matrix.

Von

Edwin Wagner.

Inhalt. Aus den Elementarteilern einer vorgegebenen quadratischen Matrix, deren Elemente einem kommutativen Körper K angehören, werden die Elementarteiler eines Polynoms in dieser Matrix mit Koeffizienten aus K berechnet. Dies gelingt, indem eine Zerlegung des Vektorraumes in eine direkte Summe von unzerlegbaren A-Zyklen zu einer solchen von unzerlegbaren $f(A)$-Zyklen nach der von G. Kowalewski (Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig. Bd. 68, 1916) dargelegten Methode verfeinert wird. Folgerungen über die Lösungen der Matrizengleichung $f(x) = A$.

1. Die quadratische Matrix $A = (\alpha_{ik})$, deren Elemente α_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots 0)$ einem kommutativen Körper K der Charakteristik 0 angehören, habe die Elementarteiler $a_1(t)$, $a_2(t)$, ... $a_i(t)$ sei zerlegt in ein Produkt von teilerfremden Potenzen von in K irreduziblen Polynomen

$$a_i(t) = \prod_k a_{ik}^{n_{ik}}(t). \tag{1}$$

Die $a_i(t)$ seien „normiert", d. h. ihr höchster Koeffizient sei das Einselement von K. Die Gesamtheit $\mathfrak{A}$ der Vektoren $(\xi) = (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_0)$, ξ_i aus K, läßt sich dann in eine *direkte Summe* von unzerlegbaren A-Zyklen $\mathfrak{A}_{ik}$ zerlegen:

$$\mathfrak{A} = \sum_{i,k} \mathfrak{A}_{ik}. \tag{2}$$

Unter einem A-Zyklus ist dabei eine Gesamtheit aller Vektoren (ξ) gemeint, die aus einem Grundvektor (ϱ) durch Transformation mit allen Polynomen $p(A)$ von A entstehen:

$$(\xi) = p(A) \cdot (\varrho).$$

In einem der Zerfällung (2) angepaßten Koordinatensystem ist die Matrix A direkte Summe von Matrizen A_{ik}. A_{ik} transformiert $\mathfrak{A}_{ik}$ in sich und genügt der Gleichung

$$a_{ik}^{n_{ik}}(A_{ik}) = 0 \tag{3}$$

und $a_{ik}^{n_{ik}}(t)$ ist das niedrigste Polynom mit Koeffizienten aus K, das die Gleichung (3) erfüllt. Mit W. Krull wollen wir das Polynom $a_{ik}^{n_{ik}}(t)$ die Ordnung der Matrix A_{ik} und des zugehörigen Teilraumes $\mathfrak{A}_{ik}$ nennen.

Ist nun $B = f(A)$ ein vorgegebenes Polynom in A mit Koeffizienten aus K, so ist in dem angepaßten Koordinatensystem auch B direkte Summe

von Matrizen B_{ik} gleichen Grades wie die A_{ik}, die ebenfalls $\mathfrak{A}_{ik}$ in sich transformieren. Wir gewinnen die Bausteine für eine Zerlegung der Elementarteiler der Matrix B nach Gleichung (1) in den Ordnungen der unzerlegbaren B-Zyklen, in die sich die $\mathfrak{A}_{ik}$ zerlegen lassen.

2. Es sei also $\mathfrak{A}$ irgendein unzerlegbarer A-Zyklus mit dem Grundelement (ϱ) und $a^n(t)$ seine Ordnung bezüglich A; $a(t)$ ist in K irreduzibel. Ist $g(T)$ die Ordnung von $\mathfrak{A}$ bezüglich B, also $g(T)$ das niedrigste normierte Polynom, welches in $\mathfrak{A}$ die Gleichung

$$g(B) = 0 \tag{4}$$

erfüllt, so gilt wegen

$$g\big(f(A)\big) = 0 \tag{4'}$$

die Beziehung

$$g\big(f(t)\big) \equiv 0 \mod a^n(t). \tag{5}$$

Umgekehrt genügt jedes Polynom, welches (5) erfüllt, ebenfalls der Gleichung (4), da in $\mathfrak{A}$

$$a^n(A) = 0. \tag{3'}$$

$g(T)$ ist also das (immer existierende und, wie sich zeigen wird, eindeutig bestimmte) normierte Polynom niedrigsten Grades, welches die Kongruenz (5) erfüllt. Über die Lösungen von (5) ziehen wir den folgenden elementar zu beweisenden Hilfssatz an:

1. Hilfssatz. *Das normierte Polynom $b(T)$ niedrigsten Grades, welches die Gleichung*

$$b\big(f(t)\big) \equiv 0 \mod a(t)$$

erfüllt, ist eindeutig bestimmt und in K irreduzibel, und jede andere Lösung hat $b(T)$ zum Teiler. Es sei

$$b\big(f(t)\big) = a^s(t) \cdot q(t) \tag{6}$$

und $q(t)$ nicht mehr durch $a(t)$ teilbar. Das niedrigste Polynom $g_i(T)$, welches die Gleichung

$$g_i\big(f(t)\big) \equiv 0 \mod a^i(t)$$

erfüllt, ist

$$g_i(T) = b^{r_i}(T), \tag{7}$$

wo r_i durch die Ungleichung

$$i \leqq s \cdot r_i < i + s \tag{8}$$

eindeutig bestimmt ist.

Der Beweis stützt sich nur auf die im Polynomring $\mathsf{K}[t]$ immer mögliche Division durch normierte Polynome und die Eindeutigkeit der Zerlegung eines Polynoms $F(t)$ in Primfaktoren und kann hier übergangen werden.

Es könnte hier noch eine Betrachtung über den Grad von $b(T)$ angeschlossen werden, aber der bezügliche Satz wird sich im folgenden von selbst ergeben.

Aus dem ersten Hilfssatz folgern wir den

2. Hilfssatz. *a) Die Matrix $B = f(A)$ ist in $\mathfrak{A}$ dann und nur dann singulär, wenn $f(t)$ teilbar durch $a(t)$.*

b) Ist $f(t)$ nicht teilbar durch $a(t)$, so gibt es ein Polynom $f'(t)$ derart, daß $f(A) \cdot f'(A) = E$ ($=$ Einheitsmatrix).

c) Die Ordnung eines B-Zyklus, der vom Grundvektor $(\xi) = a^i(A) \cdot p(A) \cdot (\varrho)$ erzeugt wird, ist $b^{m_i}(T)$, wobei $n - i \leqq s \cdot m_i < n - i + s$, wenn $p(t)$ nicht mehr durch $a(t)$ teilbar ist.

Der elementare Beweis kann übergangen werden.

3. Nun wollen wir die Zerlegung von $\mathfrak{A}$ durchführen! Wir gehen in der Reihe der Potenzen

$$t, t^2, t^3, \ldots t^N \quad (N = \text{Grad von } a(t)) \tag{9}$$

bis zu jener Potenz t^M, die als erste folgende Eigenschaft besitzt: Es gibt $M + 1$ Polynome $u_i(T)$ derart, daß

$$u_0(f(t)) + t \cdot u_1(f(t)) + t^2 \cdot u_2(f(t)) + \cdots t^M \cdot u_M(f(t)) \equiv 0 \bmod a(t), \tag{10}$$

ohne daß sämtliche $u_i(T)$ durch $b(T)$ teilbar sind, während die Kongruenz

$$v_0(f(t)) + t \cdot v_1(f(t)) + t^2 \cdot v_2(f(t)) + \cdots + t^{M-1} \cdot v_{M-1}(f(t)) \equiv 0 \bmod a(t) \tag{11}$$

stets die M Kongruenzen

$$v_i(T) \equiv 0 \bmod b(T) \tag{12}$$

nach sich zieht. Spätestens die Potenz N erfüllt diese Bedingung und aus

$$u_0(f(t)) \equiv 0 \bmod a(t)$$

folgt nach Hilfssatz 1 stets

$$u_0(T) \equiv 0 \bmod b(T).$$

Nun beweisen wir zwei wichtige Hilfssätze:

3. Hilfssatz. *Die Summe der von den Vektoren*

$$(\varrho),\ A \cdot (\varrho),\ \ldots A^{M-1} \cdot (\varrho),\ a(A) \cdot (\varrho), \tag{13}$$

$$A \cdot a(A) \cdot (\varrho),\ \ldots A^{M-1} \cdot a(A) \cdot (\varrho), \ldots a^{\sigma-1}(A) \cdot (\varrho), \ldots A^{M-1} \cdot a^{\sigma-1}(A) \cdot (\varrho)$$

erzeugten B-Zyklen ist der gesamte A-Zyklus $\mathfrak{A} \cdot \sigma =$ die kleinere von s, n.

4. Hilfssatz. *Die von den Vektoren* (13) *erzeugten B-Zyklen sind untereinander vektorfremd; die Summe des Hilfssatzes* 3 *ist daher eine direkte Summe.*

Beweis zu 3. Wäre in Gleichung (10) $u_M(T) \equiv 0 \bmod b(T)$, so wäre Gleichung (11) und mithin auch Gleichung (12) erfüllt, also alle $u_i(T)$ durch $b(T)$ teilbar gegen die Voraussetzung. Es ist daher $u_M(T) \not\equiv 0 \bmod b(T)$. Wir multiplizieren (10) mit dem nach dem 2. Hilfssatz b) existierenden Polynom $u'_M(T)$ und einer beliebigen Potenz $a^c(t)$, $0 \leqq c < \sigma$ und t^p, $0 \leqq p < N - M$ und erhalten nach Einsetzung von A für t eine Gleichung für $A^{M+p} \cdot a^c(A)$:

$$(14) \qquad A^{M+p} \cdot a^c(A) = F(A) \cdot a^{c+1}(A) \cdot u'_M(B) -$$

$$- u_0(B) \cdot u'_M(B) \cdot A^p \cdot a^c(A) - \cdots - u_{M-1}(B) \cdot u'_M(B) \cdot A^{M+p-1} \cdot a^c(A).$$

Auf den Vektor (ϱ) angewendet gibt (14) eine in p und c laufende Rekursionsformel, welche gestattet, alle Vektoren des A-Zyklus $\mathfrak{A}$ von der Gestalt $A^i \cdot a^c(A) \cdot (\varrho)$ und ihre Linearkombinationen mit Polynomen $w(A)$ als Koeffizienten durch Vektoren der B-Zyklen des 3. Hilfssatzes sowie der B-Zyklen von Vektoren der Form

$$(15) \qquad A^i \cdot a^R(A) \cdot (\varrho) \qquad R \geqq \sigma$$

linear auszudrücken.

Im Falle $\sigma = n$ ist damit alles bewiesen, da die Vektoren der Form (15) und damit auch alle noch nicht erfaßten Vektoren, die sich ja durch jene und die bereits erfaßten linear ausdrücken lassen, nach (3') verschwinden.

Im Falle $\sigma = s$ behandeln wir die Vektoren der Form (15) (und damit auch die noch nicht erfaßten) folgendermaßen weiter: Sei

$$R = k \cdot s + c_1 \qquad c_1 < s;$$

Gleichung (6) gibt, mit dem Polynom $q'(t)$ (Hilfssatz 3b) multipliziert und zur Potenz k erhoben,

$$(6') \qquad a^{ks}(t) = b^k\big(f(t)\big) \cdot q'^k(t),$$

somit

$$(16) \qquad A^i \cdot a^R(A) = A^i \cdot b^k(B) \cdot q'^k(A) \cdot a^{c_1}(A) \qquad c_1 < s.$$

Wendet man auf die Vektoren (15) die Gleichung (16) an, so erhält man auf der rechten Seite wieder einige Vektoren, auf die man die Formel (15) anwenden muß, was wieder Vektoren aus B-Zyklen mit Grundvektoren der Form (16) erzeugt usw. Da aber bei jedem Schritt vermöge (16) zu den neu hinzukommenden Vektoren auch immer ein Faktor $b^k(B)$ hinzutritt, muß das Verfahren nach d Schritten enden, sobald $skd \geqq n$, weil dann nach (6) $b^{kd}(B) = a^{skd}(A) \cdot q^{kd}(A)$, was nach (3') verschwindet.

Beweis zu 4. Es braucht nur gezeigt zu werden, daß die Gleichung

$$\sum_{i=0}^{\sigma-1} U_i(A, B) \cdot (\varrho) = 0 \tag{17}$$

mit

$$U_i = \sum_{k=0}^{M-1} u_{ik}(B) \cdot a^i(A) \cdot A^k$$

nur bestehen kann, wenn einzeln

$$u_{ik}(B) \cdot a^i(A) \cdot A^k \cdot (\varrho) = 0.$$

Angenommen, (17) würde bestehen, aber

$$U_{i_1} \cdot (\varrho) + U_{i_2} \cdot (\varrho) + \cdots \not\equiv 0,$$

während die übrigen $U_i \cdot (\varrho)$ verschwinden. (17) wäre gleichwertig der Kongruenz

$$U_{i_1}(t, f(t)) + U_{i_2}(t, f(t)) + \cdots \equiv 0 \bmod a^n(t). \tag{17'}$$

Es sei

$$U_{i_l}(t, f(t)) = a^{n_{i_l}}(t) \cdot U^*_{i_l}(t) \cdot a^{i_l}(t) \tag{18}$$

und $U^*_{i_l}(t)$ nicht mehr durch $a(t)$ teilbar.

Nach Voraussetzung [siehe (11) und (12)] ist (18) nur so möglich, daß jedes $u_{i_l,k}(T)$ teilbar ist durch eine geeignete Potenz $b^{m_{i_l}}(T)$. Dann ist in (18)

$$n_{i_l} = s \cdot m_{i_l}$$

und $n_{i_l} + i_l \not\equiv n_{i_k} + i_k$, wenn $l \not\equiv k$, weil dann $i_l - i_k \not\equiv 0 \bmod s$.

Unter den Summen

$$n_{i_l} + i_l \qquad l = 1, 2, \ldots$$

gibt es eine kleinste

$$n_h + h < n$$

und die Kongruenz (17') ist nur möglich, wenn $U^*_h(t)$ noch durch $a(t)$ teilbar ist, gegen die Voraussetzung.

Damit sind beide Hilfssätze bewiesen.

Der A-Zyklus $\mathfrak{A}$ ist in eine direkte Summe von B-Zyklen zerlegt, die selbst unzerlegbar sind, da sie Potenzen irreduzibler Polynome zu Ordnungen haben.

4. Nach Hilfssatz 2c) ist die Ordnung des vom Vektor $A^k \cdot a^i(A) \cdot (\varrho)$ erzeugten B-Zyklus gleich $b^{m_i}(T)$, wo

$$\frac{n-i}{s} \leqq m_i < \frac{n-i}{s} + 1 \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, \sigma-1, \\ k = 0, 1, \ldots, M-1. \end{pmatrix} \tag{19}$$

Bezeichnen wir mit P jene der Zahlen $n, n-1, n-2, \ldots n-\sigma+1$, welche durch σ teilbar ist, und mit Q den Quotienten $\frac{P}{\sigma}$, so ist

$$(19') \qquad \begin{aligned} m_i &= Q+1, \quad \text{wenn } n-i > P, \\ m_i &= Q, \qquad\quad \text{wenn } n-i \leqq P. \end{aligned}$$

Es kommt daher der Exponent Q $M(\sigma - n + P)$-mal und der Exponent $Q+1$ $M(n-P)$-mal vor. Für die Dimension von $\mathfrak{A}$ ergibt sich die Zahl $M \cdot n \cdot N_1$, wenn N_1 der Grad von $b(T)$ ist. Da sie andererseits gleich $n \cdot N$ ist, muß N_1 Teiler von N sein:

$$(20) \qquad N_1 = \frac{N}{M}.$$

Bezeichnen wir der Kürze wegen die Potenzen $a_{ik}^{n_{ik}}(t)$ der Faktorzerlegung (1) der Elementarteiler als die *Primpotenzen* der Matrix, so können wir unser Ergebnis in dem folgenden *Hauptsatz* aussprechen:

Jede Primpotenz $a^n(t)$ der Matrix A erzeugt Primpotenzen $b^m(T)$ des Polynoms $B = f(A)$. Dabei bedeutet $b(T)$ das eindeutig bestimmte „normierte" irreduzible Polynom niedrigsten Grades, welches die Kongruenz $b(f(t)) \equiv 0 \bmod a(t)$ erfüllt; sein Grad N_1 ist Teiler des Grades N von $a(t)$. Von den Exponenten m sind $\frac{N}{N_1}(\sigma - n + P)$ gleich $\frac{P}{\sigma}$ und $\frac{N}{N_1}(n-P)$ gleich $\frac{P}{\sigma}+1$, wenn σ die kleinere der Zahlen n und s = Vielfachheit des Faktors $a(t)$ in der Primfaktorzerlegung von $b(f(t))$ bedeutet und P jene der Zahlen $n, n-1, \ldots n-\sigma+1$, welche σ zum Teiler hat.

Die Exponenten m sind nach (19') dann und nur dann alle untereinander gleich, wenn $P = n$, also n durch σ teilbar ist, und zwar $m = 1$, wenn $n = \sigma$ und $m = k$, wenn $n = k \cdot s$.

Besonders einfache Verhältnisse liegen vor, wenn der Körper K algebraisch abgeschlossen ist. Dann ist $a(t)$ und daher auch $b(t)$ linear, also

$$N = N_1 = M = 1, \quad a(t) = t - \alpha, \quad b(T) = T - \beta$$

und Gleichung (6) nimmt folgende Gestalt an:

$$f(t) - \beta = (t-\alpha)^s \cdot q(t) \quad q(\alpha) \neq 0.$$

Es ist daher $\beta = f(\alpha)$ und s die Vielfachheit der Wurzel α der Gleichung

$$f(t) - f(\alpha) = 0.$$

5. Der Hauptsatz erlaubt eine einfache Lösung einiger alter Fragen:

1. Satz. *Die Matrix A ist dann und nur dann ihrerseits wieder Polynom in der Matrix $B = f(A)$, wenn a) die niedrigste (in K irreduzible) Lösung $b(T)$ der Kongruenz $b(f(t)) \equiv 0 \bmod a(t)$ den gleichen Grad hat wie $a(t)$ und keine Lösung der Kongruenz $b(f(t)) \equiv 0 \bmod a^2(t)$ ist, wenn $n > 1$, und*

b) zu zwei verschiedenen Polynomen $a(t)$ auch zwei verschiedene, also teilerfremde Lösungen $b(T)$ gehören.

Beweis. Da beim Übergang von A zu $B = f(A)$ die Zahl der unzerlegbaren Zyklen nie abnimmt und die Zahl der verschiedenen Primpotenzbasen $a(t)$ nie zunimmt, müssen — soll auch $A = F(B)$ sein — diese Zahlen für beide Matrizen übereinstimmen; für die erste Zahl garantiert das die Bedingung a), für die zweite die Bedingung b).

Sind umgekehrt beide Bedingungen erfüllt, so folgt aus a) zunächst die Existenz einer Funktion $F_a(T)$ so, daß $A = F_a(B)$ im größten A-Zyklus $\mathfrak{A}$, der zur Basis $a(t)$ gehört. Da diese in $\mathfrak{A}$ gültige Gleichung gleichwertig ist der Kongruenz

$$F_a(B) \equiv A \mod a^n(A), \tag{21}$$

gilt sie auch in den übrigen A-Zyklen, die zur gleichen Basis $a(t)$ gehören. Da der A-Zyklus $\mathfrak{A}$ vermöge a) auch größter B-Zyklus ist, kann (21) auch in der Form

$$F_a(B) \equiv A \mod b^m(B) \tag{21'}$$

geschrieben werden. Da die $b(T)$ zu den verschiedenen $a(t)$ nach b) paarweise teilerfremd sind, gibt es eine Funktion $F(T)$ so, daß $F(T) \equiv F_a(T) \mod b^m(T)$ für alle verschiedenen Paare $a(t)$, $b(T)$ und es ist in jedem Zyklus und damit im ganzen Vektorraum $A = F(B)$.

Zweitens erlaubt der Hauptsatz einen Überblick über die Lösungen einer Matrixgleichung der Form

$$f(X) = A, \tag{22}$$

wo A eine gegebene Matrix mit Elementen aus K, X eine gesuchte Matrix gleicher Art und $f(t)$ ein gegebenes Polynom mit Koeffizienten aus K bedeuten.

Um (22) zu lösen, verschaffen wir uns zunächst eine Matrix Y derart, daß $f(Y)$ zu A ähnlich wird:

$$f(Y) = TAT^{-1}. \tag{23}$$

Dann ist $X_0 = T^{-1}YT$ eine Lösung von (22) und jede Lösung von (22) kann so gewonnen werden.

Die Lösungen Y von (23) verschaffen wir uns auf Grund des Hauptsatzes auf die folgende Weise:

Sei $a(t)$ ein irreduzibles Polynom vom Grade N, das als Basis von Primpotenzen von A mit den Exponenten $n_1 \geqq n_2 \geqq \cdots \geqq n_s$ vorkommt. Wir zerlegen $a(f(t))$ in ein Produkt von teilerfremden Potenzen irreduzibler Polynome:

$$a(f(t)) = b^{r_1}(t) \cdot b_2^{r_2}(t), \ldots b_2^{r_l}(t). \tag{24}$$

Der Grad von $b_i(t)$ sei N_i; nach dem Hauptsatz ist *jedes* N_i *ganzzahliges Vielfaches von* N. Nun teilen wir die n_i in Gruppen folgender Art ein:

I. Gibt es unter den n_i solche, die gleich 1 sind, so fassen wir einige von ihnen in Gruppen $\mathfrak{G}_j$ zu M_j Gliedern so zusammen, daß die M_j eine der Gleichungen

$$M_j = \frac{N_k}{N} \cdot m_j \quad \text{mit } 0 < m_j \leqq r_k,$$

sonst beliebig ganzzahlig, erfüllen. $k = 1, 2, \ldots l$.

II. Die restlichen n_i teilen wir in Gruppen folgender Art ein:

a) Jede Gruppe enthält $z = r_k \cdot \frac{N_k}{N}$ aufeinander folgende n_i — mit einem beliebigen (von Gruppe zu Gruppe verschiedenen oder auch gleichen) $k = 1, 2, \ldots l$.

b) Jede Gruppe enthält entweder lauter gleiche Glieder, oder es sind die ersten $p \cdot \frac{N_k}{N}$ untereinander gleich und die restlichen $z - p \cdot \frac{N_k}{N}$ ebenfalls untereinander gleich und um 1 kleiner als die ersten $p \cdot \frac{N_k}{N}$ (mit einem beliebigen ganzzahligen $p < r_k$).

2. Satz. *a) Ist eine Einteilung der Primpotenzen von* A *in Gruppen nach* I. *und* II. *nicht möglich, so ist die Gleichung* (23) *und um so mehr die Gleichung* (22) *in* K *unlösbar.*

b) Jede mögliche Einteilung nach I. *und* II. *liefert die folgende Klasse von ähnlichen Lösungen* Y *der Gleichung* (23): *Jeder Gruppe wird die Primpotenz* $b_k^m(T)$ *zugeordnet, wo* m *den Quotient der Division*

$$(\textit{Summe aller in der Gruppe enthaltenen } n_i) : \left(\frac{N_k}{N}\right)$$

bedeutet. Bei Berücksichtigung aller Primpotenzen von A *erhält man so alle Primpotenzen einer Klasse von ähnlichen Lösungen* Y *von* (23) *und alle Lösungen* Y *von* (23) *können auf diese Weise erhalten werden.*

Der Beweis ergibt sich einfach durch Umkehrung des Hauptsatzes. Jede Primpotenz $b_k^m(T)$ von Y erzeugt Primpotenzen $a^{n_i}(t)$ von A mit allen n_i der zugeordneten Gruppe als Exponenten.

Satz 2 ermöglicht die Entscheidung über die Lösbarkeit der Gleichung (22) und die Bestimmung der Anzahl der verschiedenen Klassen von Lösungen allein durch Untersuchung der Elementarteiler von A. Die Verhältnisse vereinfachen sich, wenn der Körper K algebraisch abgeschlossen ist; dieser Spezialfall wurde bereits eingehend untersucht[1]). Einen tieferen Einblick in die Lösungsmannigfaltigkeit von (22) kann natürlich die Betrachtung der

[1]) P. Franklin, J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **10** (1932); D. E. Rutherford, Proc. Edinburgh Math. Soc. II **3** (1932).

Elementarteiler allein nicht geben, da die Eigenschaft einer Matrix X, Lösung von (22) zu sein, von höheren Invarianten des Paares X, A abhängt. Diese Frage soll gelegentlich von anderen Gesichtspunkten aus behandelt werden.

Eine vollständige Lösung gestattet hingegen die Frage, nach jenen Lösungen von (22), die ihrerseits Polynome in A sind. Sie sind dadurch ausgezeichnet, daß stets zwei ähnliche Lösungen X_0 und $P^{-1}X_0P$ identisch sind, weil jede mit A vertauschbare Matrix P auch mit allen Polynomen in A vertauschbar ist. Jede Lösung Y von (23) liefert in diesem Falle also nur *eine* Lösung X von (22).

Die Bedingungen, denen Y genügen muß, damit X Polynom in A sei, liefert uns Satz 1:

1) In der Zerlegung (24) muß es solche $b_i(t)$ geben, deren Grad gleich N ist. Nur diese dürfen bei der Konstruktion der Y nach Satz 2 verwendet werden [Satz 1, Bedingung a), erster Teil].

2) Aus der Zerlegung (24) darf bei Konstruktion derselben Matrix Y nur *eines* der b_i verwendet werden (Bedingung b).

3) Jede Gruppe I und II darf nur ein Element enthalten (wegen der Gleichheit der Anzahl der Zyklen).

4) Jedes der Bedingung 1) genügende b_i, das in (24) mit einem Exponenten $r_i > 1$ auftritt, darf nur einem $n_i = 1$ zugeordnet werden [Bedingung a), zweiter Teil]; gibt es also zu $a(t)$ Exponenten $n_i > 1$, so dürfen nach 2) überhaupt nur jene $b_i(t)$ verwendet werden, deren $r_i = 1$.

3. Satz. *a) Die Gleichung* (22) *hat dann und nur dann Lösungen* X, *die Polynome von* A *sind, wenn die Zerlegung* (24) *ein* $b_i(t)$ *enthält, dessen Grad dem Grad* N *von* $a(t)$ *gleich, und dessen Exponent* r_i *überdies gleich* 1 *ist, wenn zu* $a(t)$ *auch Primpotenzen von* A *mit höheren Exponenten als* 1 *gehören.*

b) Ist z_a = *Zahl derjenigen der* b_i *der Zerlegung* (24), *deren Grad gleich* N *ist, wenn zu* $a(t)$ *nur Primpotenzen mit dem Exponenten* 1 *gehören, und* z_a = *Zahl der* b_i *vom Grade* N, *die den Exponenten* $r_i = 1$ *tragen, wenn zu* $a(t)$ *auch Primpotenzen mit höheren Exponenten als* 1 *gehören, so ist die Zahl der Lösungen* X *von* (22), *die Polynome in* A *sind, gleich* $\prod_a z_a$. *Das Produkt ist dabei über alle verschiedenen Primpotenzbasen* $a(t)$ *von* A *zu nehmen.*

Satz 3 ist die sinngemäße Erweiterung des Satzes von W. E. Roth[2]) auf den Fall eines nicht algebraisch abgeschlossenen Körpers K.

Ein in der Literatur eingehend behandelter Spezialfall der Gleichung (22) ist die Gleichung

$$X^m = A, \tag{25}$$

[2]) Trans. Amer. Math. Soc. **30** (1928).

wo m eine natürliche Zahl bedeutet. A sei zunächst regulär vorausgesetzt. In algebraisch abgeschlossenen Körpern ist (25) stets lösbar und die Lösungen stehen zu A in einer einfachen Beziehung[3]). Ist K aber nicht abgeschlossen, so trifft das nicht mehr zu:

Die Vereinfachung der Fragestellung gegenüber der allgemeinen Gleichung (22) liegt darin, daß in (24) alle $r_k = 1$ [da $a(t^m)$ in einem passenden Erweiterunskörper in lauter verschiedene Linearfaktoren zerfallen muß; die Charakteristik von K wurde gleich 0 vorausgesetzt].

In allen solchen Fällen ($r_k = 1$) enthalten die Gruppen I und II des Satzes 2 lauter gleiche n_i. Es seien also

$$n'_1 > n'_2 > \cdots > n'_s,$$

alle verschiedenen zu $a(t)$ gehörigen n_i und n'_k kommen z_k-mal vor; der Grad von b_i sei $N_i = M_i \cdot N$. Die Gruppen müssen dann je M_i ($i = 1, 2, \ldots l$) Glieder enthalten und jeder Gruppe mit M_i Gliedern n'_k wird die Primpotenz $b_i^{n'_k}(t)$ zugeordnet. Aus Satz 2 folgt also unmittelbar

4. Satz. *Sind die Exponenten r_k der Zerlegung* (24) *alle gleich* 1, *so ist die Gleichung* (22) *dann und nur dann lösbar, wenn die Vielfachheit z_k der Primpotenz $a_k^{n'}(t)$ eine Zerlegung nach der Gleichung*

(26) $z_k = p_1^{(k)} \cdot M_1 + p_2^{(k)} \cdot M_2 + \cdots + p_l^{(k)} \cdot M_l$, $p_i^{(k)}$ *positiv ganz oder Null, gestattet. Ist Z_k die Anzahl der möglichen Zerlegungen* (26), *so läßt* (22) $\prod_a \left(\prod_{k=1}^{s'} Z_k \right)$ *verschiedene Lösungsklassen zu.*

Die Untersuchung der verschiedenen Lösungen, die zur gleichen Klasse gehören, fällt aus dem Rahmen dieser Arbeit. Nur die folgende Tatsache soll festgehalten werden:

5. Hilfssatz. *Durch gleichzeitige Transformation mit derselben Matrix T*

$$A^* = TAT^{-1}, \quad X^* = TXT^{-1}$$

kann erreicht werden, daß A in eine der Zerfällung (2) *angepaßte Normalform A^* und die beliebige Lösung X in eine Matrix der Form X^* übergeht:*

$$A^* = \underbrace{A_1^{(a)} \dot{+} \cdots \dot{+} A_1^{(a)}}_{p_1^{(1)} \cdot M_1} \dot{+} \underbrace{A_2^{(a)} \dot{+} \cdots \dot{+} A_2^{(a)}}_{p_1^{(2)} \cdot M_1} \dot{+} \cdots \dot{+} \underbrace{A_1^{(a)} \dot{+} \cdots \dot{+} A_1^{(a)}}_{p_2^{(1)} \cdot M_2} \dot{+} \cdots$$

$$X^* = \underbrace{X_1^{(a)(1)} \dot{+} \ldots \dot{+} X_1^{(a)(1)}}_{p_1^{(1)}} \dot{+} \underbrace{X_1^{(a)(2)} \dot{+} \ldots \dot{+} X_1^{(a)(2)}}_{p_1^{(2)}} \dot{+} \ldots \dot{+} \underbrace{X_2^{(a)(1)} \dot{+} \ldots \dot{+} X_2^{(a)(1)}}_{p_2^{(1)}} \dot{+} \ldots$$

---

[3]) Siehe R. Weitzenböck, Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam **35** (1932), S. 157–161.

$A_i^{(a)}$ ist eine zur Primpotenz $a^{n'_i}(t)$ gehörige Normalform (z. B. eine „Begleitmatrix") von $N \cdot n'_i$ Zeilen und Spalten (N = Grad von $a(t)$) und $X_k^{(a)(s)}$ eine Matrix von $M_k \cdot N \cdot n'_i$ Zeilen und Spalten mit dem einzigen Elementarteiler $b_k^{n'_i}(t)$.

Beweis. Die in Satz 2 angegebene Konstruktion liefert ein Y, das bereits nach Art des X^* zerfällt, was für $f(Y)$ dieselbe Zerfällung bedingt. Die Transformation von $f(Y)$ in A^* kann durch ein in gleicher Weise zerfallendes T bewerkstelligt werden, wodurch Y in das gewünschte X^* übergeht.

Auch in allen anderen Fällen der Gleichung (22) gelten entsprechende Sätze. Aus Satz 3 folgt:

5. Satz. *Die Zahl der m-ten Wurzeln aus einer regulären Matrix A, die als Polynome in A dargestellt werden können, ist $\prod_a z_a$, wenn z_a die Anzahl der verschiedenen Primteiler N-ten Grades von $a(t^m)$ bedeutet (N = Grad von $a(t)$).*

Zur Behandlung der Primpotenzen $a^n(t) = t^n$ sei auf die angeführte Arbeit von Weitzenböck verwiesen; bei linearen Primpotenzbasen kommt man mit den dort entwickelten Methoden aus. — Herrn Prof. Dr. Gerhard Kowalewski bin ich für freundliche Durchsicht eines Manuskriptes zu Dank verpflichtet.

(Eingegangen am 2. September 1942.)

Integration linearer Differentialgleichungen durch Laplacesche Integrale. I.

Von

J. Horn in Darmstadt.

§ 1.

Das System linearer Differentialgleichungen

$$\text{(A)} \qquad x^{-1}\frac{dy_\alpha}{dx} + a_\alpha y_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m} Q_{\alpha\beta}(x)\, y_\beta = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

dessen Koeffizienten

$$Q_{\alpha\beta}(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{a_{\alpha\beta}^{(\lambda)}}{x^\lambda} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

in der Umgebung von $x = \infty$ regulär sind, hat die *Unbestimmtheitsstelle* $x = \infty$ *vom Rang* 2 [1]). Es wird durch (im allgemeinen divergente) Reihen

$$y_\alpha = e^{-\frac{a_1 x^2}{2} - a_{11}^{(1)} x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

formal befriedigt, wenn $a_2, \ldots, a_m$ von a_1 verschieden sind. Durch die Substitution

$$y_\alpha = e^{-\frac{a_1 x^2}{2} - a_{11}^{(1)} x} z_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

erhält man, wenn statt z_α wieder y_α geschrieben wird, ein *Differentialgleichungssystem* (A_1), *in welchem* $a_1 = 0$, $a_{11}^{(1)} = 0$, $a_2 \neq 0, \ldots, a_m \neq 0$ *ist* und welches durch Reihen

$$y_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

mit $A_{20} = \cdots = A_{m0} = 0$ formal befriedigt wird. Der Realteil von

$$r = a_{11}^{(2)} - \sum_{\gamma=2}^{m} \frac{a_{1\gamma}^{(1)} a_{\gamma 1}^{(1)}}{a_\gamma}$$

wird positiv angenommen, was nötigenfalls durch eine Substitution $y_\alpha = x^q z_\alpha$ erreicht wird.

---

[1]) Vgl. Jahresber. d. D. Math.-Vereinigung **24** (1915), S. 310–312.

Das Differentialgleichungssystem (A_1) wird durch LAPLACEsche Integrale

$$(1) \qquad y_\alpha = \int_0^\infty \left(w_\alpha^{(0)}(t) + x\, w_\alpha^{(1)}(t)\right) e^{-tx^2}\, dt^{2}) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

sowie auch durch LAPLACEsche Integrale

$$(2) \qquad y_\alpha = \int_0^\infty w_\alpha(t)\, e^{-tx^2}\, dt^{3}) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

befriedigt.

Hier soll gezeigt werden, *daß man bisweilen auch LAPLACEsche Integrale*

$$(3) \qquad y_\alpha = \int_0^\infty w_\alpha(t)\, e^{-tx}\, dt \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

von der von POINCARÉ[4]) *im Falle einer Unbestimmtheitsstelle vom Rang 1 benutzten Form verwenden kann.* Die Bedingungen dafür werden hier ermittelt.

Es ist, wenn y_α das LAPLACEsche Integral (3) bedeutet,

$$\frac{dy_\alpha}{dx} = -\int_0^\infty t\, w_\alpha(t)\, e^{-tx}\, dt,$$

$$x^{-1}\frac{dy_\alpha}{dx} = -\int_0^\infty \int_0^t \tau\, w_\alpha(\tau)\, d\tau \cdot e^{-tx}\, dt$$

unter der Voraussetzung

$$\lim_{t\to\infty} e^{-tx} \int_0^t \tau\, w_\alpha(\tau)\, d\tau = 0.$$

Man erhält also die Integralgleichungen

$$-\int_0^t \tau\, w_\alpha(\tau)\, d\tau + a_\alpha\, w_\alpha(t) + \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t G_{\alpha\beta}(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

unter Einführung der ganzen Funktionen

$$G_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{a_{\alpha\beta}^{(\lambda)}\, t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!};$$

dabei ist $G_{\alpha\beta}(0) = a_{\alpha\beta}^{(1)}$ und $G_{11}(0) = a_{11}^{(1)} = 0$.

---

[2]) Jahresber. **24** (1915), S. 312 f.

[3]) Jahresber. **25** (1916/17), S. 301 f.; Math. Zeitschr. **3** (1919), S. 284–291; **8** (1920), S. 100–114.

[4]) Amer. Journ. of Math. **7** (1885); Act. math. **8** (1886).

Indem wir die zu $\alpha = 1$ gehörige Integralgleichung differentiieren, geben wir den Integralgleichungen die Form

$$(B_1)\quad \begin{cases} t\,w_1(t) = a_{12}^{(1)} w_2(t) + \cdots + a_{1m}^{(1)} w_m(t) + \\ \qquad + \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t G'_{1\beta}(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau \\ a_\alpha w_\alpha(t) = \int_0^t \tau\, w_\alpha(\tau)\, d\tau - \\ \qquad - \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t G_{\alpha\beta}(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau \qquad (\alpha = 2, \ldots, m). \end{cases}$$

Die erste Gleichung (B_1) kann ersetzt werden durch

$$t\,w_1(t) = \sum_{\beta=2}^{m} \frac{a_{1\beta}^{(1)}}{a_\beta} \int_0^t \tau\, w_\beta(\tau)\, d\tau + \\ + \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t \left\{ G'_{1\beta}(t-\tau) - \sum_{\gamma=2}^{m} \frac{a_{1\gamma}^{(1)}}{a_\gamma} G_{\gamma\beta}(t-\tau) \right\} w_\beta(\tau)\, d\tau.$$

Die Integralgleichungen (B_1) erhalten demnach die Form

$$t\,w_1(t) = \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t f_{1\beta}(t,\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau,$$

$$w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t f_{\alpha\beta}(t,\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau \qquad (\alpha = 2, \ldots, m),$$

wo

$$f_{11}(t,\tau) = G_{11}(t-\tau) - \sum_{\gamma=2}^{m} \frac{a_{1\gamma}^{(1)}}{a_\gamma} G_{\gamma 1}(t-\tau),$$

$$f_{1\beta}(t,\tau) = \frac{a_{1\beta}^{(1)}}{a_\beta}\tau + G'_{1\beta}(t-\tau) - \sum_{\gamma=2}^{m} \frac{a_{1\gamma}^{(1)}}{a_\gamma} G_{\gamma\beta}(t-\tau) \quad (\beta = 2, \ldots, m),$$

$$f_{\alpha\alpha}(t,\tau) = \frac{1}{a_\alpha}\tau - \frac{1}{a_\alpha} G_{\alpha\alpha}(t-\tau) \qquad (\alpha = 2, \ldots, m),$$

$$f_{\alpha\beta}(t,\tau) = -\frac{1}{a_\alpha} G_{\alpha\beta}(t-\tau) \qquad (\alpha = 2, \ldots, m;\ \alpha \neq \beta)$$

für alle endlichen t, τ regulär sind. Insbesondere ist

$$f_{11}(0,0) = a_{11}^{(2)} - \sum_{\gamma=2}^{m} \frac{a_{1\gamma}^{(1)} a_{\gamma 1}^{(1)}}{a_\gamma} = r.$$

Nach Jahresber. **24**, S. 213–216 besitzen diese Integralgleichungen eine Lösung $w_\alpha(t)$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$ von solcher Beschaffenheit, daß $t^{-r+1} w_\alpha(t)$ eine ganze Funktion von t ist. Es ist

$$w_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n} t^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m).$$

Wir untersuchen, wie sich die Funktionen $w_\alpha(t)$ verhalten, wenn t längs einer Geraden $\arg t = \omega$ ins Unendliche geht[5]). Wir benutzen dazu gewisse aus den Integralgleichungen (B_1) hervorgehende Ungleichungen.

Die Koeffizienten $Q_{\alpha\beta}(x)$ der Differentialgleichungen (A_1) seien in der Halbebene $\Re(x e^{i\omega}) > \sigma(\omega) \geqq 0$ regulär. Dann bestehen Ungleichungen

$$|G_{\alpha\beta}(t)| < A\, e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)|t|},$$

$$|G'_{\alpha\beta}(t)| < A'\, e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)|t|},$$

wo ε eine beliebig kleine positive Zahl und A, A' hinreichend große positive Konstante sind.

Aus der ersten Integralgleichung (B_1) folgt die Ungleichung

$$(\mathfrak{B}_1) \quad |t| \cdot |w_1(t)| \leqq |a_{12}^{(1)}| \cdot |w_2(t)| + \cdots + |a_{1m}^{(1)}| \cdot |w_m(t)| + \\ + \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^{|t|} A'\, e^{\sigma(\omega)(|t|-|\tau|)} |w_\beta(\tau)|\, d|\tau|.$$

Durch Differentiation der α-ten Integralgleichung $(\alpha = 2, \ldots, m)$ erhält man

$$\frac{dw_\alpha(t)}{dt} - \frac{t}{a_\alpha} w_\alpha(t) = -\frac{1}{a_\alpha} \sum_{\beta=1}^{m} a_{\alpha\beta}^{(1)} w_\beta(t) - \\ - \frac{1}{a_\alpha} \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t G'_{\alpha\beta}(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau$$

oder, wenn $w_\alpha(t) = w_\alpha(|t| e^{i\omega})$ als Funktion von $|t|$ aufgefaßt wird,

$$\frac{\partial w_\alpha(t)}{\partial |t|} - \frac{e^{2i\omega}|t|\, w_\alpha(t)}{a_\alpha} = -\frac{e^{i\omega}}{a_\alpha} \sum_{\beta=1}^{m} a_{\alpha\beta}^{(1)} w_\beta(t) - \\ - \frac{e^{i\omega}}{a_\alpha} \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t G'_{\alpha\beta}(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau.$$

---

[5]) Vgl. Jahresber. **24**, S. 217–221, 321–322.

Wir multiplizieren diese Gleichung mit der zu $w_\alpha(t)$ konjugierten Größe und beachten, daß der reelle Teil der linken Seite höchstens gleich der Summe der absoluten Beträge der Glieder der rechten Seite ist. So ergibt sich

$$(\mathfrak{B}_\alpha)\quad \frac{1}{2}\frac{\partial |w_\alpha(t)|^2}{\partial |t|} - |t|\cdot|w_\alpha(t)|^2\,\Re\frac{e^{2i\omega}}{a_\alpha} \leqq \sum_{\beta=1}^{m}\left|\frac{a_{\alpha\beta}^{(1)}}{a_\alpha}\right|\cdot|w_\alpha(t)|\cdot|w_\beta(t)| +$$

$$+\frac{1}{|a_\alpha|}\sum_{\beta=1}^{m}\int_0^{|t|} A'\,e^{\sigma(\omega)(|t|-|\tau|)}|w_\alpha(t)|\cdot|w_\beta(\tau)|\,d|\tau| \qquad (\alpha=2,\ldots,m).$$

Wir beweisen den folgenden Satz:

Es befinde sich $t=|t|\,e^{i\omega}$ in einem Sektor $\mathfrak{S}$, in welchem

$$\Re\frac{e^{2i\omega}}{a_\alpha} < 0 \qquad (\alpha=2,\ldots.\,m)$$

ist. Die positive Größe h erfülle die Bedingung $h>\sigma(\omega)$. Dann ist, wenn die positive Konstante C hinreichend groß genommen wird,

$$|w_\alpha(t)| < C\,e^{h|t|} \qquad (\alpha=1,\ldots,m).$$

Es sei R eine beliebige positive Größe und C so groß, daß für $|t|\leqq R$ und alle ω des Sektors $\mathfrak{S}$

$$|w_\alpha(t)| < C\,e^{h|t|} \qquad (\alpha=1,\ldots,m)$$

ist. Wir zeigen, daß diese Ungleichungen auch für $|t|<R$ und alle ω von $\mathfrak{S}$ gelten, wenn R hinreichend groß gewählt war.

Wäre dies nicht der Fall, so sei R' die untere Grenze derjenigen Werte von $|t|$, für welche diese Ungleichungen nicht bei allen ω von $\mathfrak{S}$ gelten. Dann sind Werte $\alpha=\alpha'$, $\omega=\omega'$ so vorhanden, daß für $|t|=R'$, $\omega=\omega'$, $\alpha=\alpha'$ $|w_\alpha(t)|=C\,e^{h|t|}$ ist, während für $\alpha=1,\ldots,m$, für $|t|\leqq R'$ und alle ω von $\mathfrak{S}$ $|w_\alpha(t)|\leqq C\,e^{h|t|}$ ist.

Ist $\alpha'=1$, so ergibt die Ungleichung $(\mathfrak{B}_1)$ für $|t|=R'$, $\omega=\omega'$

$$|t|\cdot C\,e^{h|t|} \leqq (|a_{12}^{(1)}|+\cdots+|a_{1m}^{(1)}|)\,C\,e^{h|t|} +$$

$$+\,m\int_0^{|t|} A'\,e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)(|t|-|\tau|)}\cdot C\,e^{h|\tau|}\,d|\tau|$$

oder nach Division mit der linken Seite

$$(\mathfrak{C}_1)\qquad 1 \leqq \frac{|a_{12}^{(1)}|+\cdots+|a_{1m}^{(1)}|}{|t|} + \frac{m\,A'}{(h-\sigma(\omega)-\varepsilon)\,|t|}.$$

Nimmt man R hinreichend groß, so ist die rechte Seite der für $|t|=R'>R$ geltenden Ungleichung kleiner als 1, so daß ein Widerspruch besteht.

Ist $\alpha = \alpha'$ eine der Zahlen $2, \ldots, m$, so benutzen wir die Ungleichung $(\mathfrak{B}_\alpha)$. Für $|t| = R'$, $\omega = \omega'$ ist

$$\frac{1}{2}\frac{\partial |w_\alpha(t)|^2}{\partial |t|} \geqq \frac{1}{2}\frac{d(C^2 e^{2h|t|})}{d|t|} = hC^2 e^{2h|t|},$$

also

$$hC^2 e^{2h|t|} - C^2 e^{2h|t|} \cdot |t| \, \Re \frac{e^{2i\omega}}{a_\alpha} \leqq \sum_{\beta=1}^{m} \left| \frac{a_{\alpha\beta}^{(1)}}{a_\alpha} \right| \cdot C^2 e^{2h|t|} + \\ + \frac{m}{|a_\alpha|} \int_0^{|t|} A' e^{(v(\omega)+\varepsilon)(|t|-|\tau|)} \cdot C^2 e^{2h|\tau|} \, d|\tau|$$

oder nach Division mit $C^2 |t| e^{2h|t|}$

$$(\mathfrak{C}_\alpha) \qquad -\Re \frac{e^{2i\omega}}{a_\alpha} \leqq \frac{\sum_{\beta=1}^{m} |a_{\alpha\beta}^{(1)}|}{|a_\alpha| \cdot |t|} + \frac{m A'}{|a_\alpha|(2h - \sigma(\omega) - \varepsilon)|t|} - \frac{h}{|t|}.$$

Nimmt man R hinreichend groß, so liegt die rechte Seite der für $|t| = R' > R$ geltenden Ungleichung beliebig nahe bei Null; wegen $\Re \frac{e^{2i\omega}}{a_\alpha} < 0$ besteht also ein Widerspruch.

Wenn $c \neq 0$ eine komplexe Größe ist, ist

$$\Re \frac{1}{c} = \frac{\Re c}{|c|^2},$$

so daß $\Re c$ und $\Re \frac{1}{c}$ dasselbe Vorzeichen haben oder gleichzeitig verschwinden. Die Bedingungen

$$\Re \frac{e^{2i\omega}}{a_\alpha} < 0 \qquad (\alpha = 2, \ldots, m)$$

sind also gleichbedeutend mit den Bedingungen

$$\Re (a_\alpha e^{-2i\omega}) < 0 \qquad (\alpha = 2. \ldots, m).$$

Wenn $a_\alpha = |a_\alpha| e^{i\varphi_\alpha}$ $(\alpha = 2, \ldots, m)$ ist, hat man

$$\Re (a_\alpha e^{-2i\omega}) = |a_\alpha| \, \Re e^{i(\varphi_\alpha - 2\omega)} = |a_\alpha| \cos(\varphi_\alpha - 2\omega),$$

so daß sich die früheren Bedingungen schreiben:

$$\cos(\varphi_\alpha - 2\omega) < 0 \qquad (\alpha = 2, \ldots, m).$$

Daher ist der Winkel $\varphi_\alpha - 2\omega$ $(\alpha = 2, \ldots, m)$ absolut genommen größer als $\frac{\pi}{2}$; der Punkt a_α $(\alpha = 2, \ldots, m)$ liegt also in der komplexen Zahlenebene auf der negativen Seite der auf der Geraden $\eta = \xi \operatorname{tg} 2\omega$ senkrechten Geraden $\xi \cos 2\omega + \eta \sin 2\omega = 0$, d. h. auf derjenigen Seite, welche den Punkt $-e^{2i\omega}$ enthält.

Die LAPLACE*schen Integrale*

$$y_\alpha = \int_0^\infty w_\alpha(t)\, e^{-tx}\, dt \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

genügen in dem Gebiet $\Re(x e^{i\omega}) > \sigma(\omega)$ *den Differentialgleichungen* (A_1), *wenn der Integrationsweg* $\arg t = \omega$ *die Bedingungen*

$$\Re(a_\alpha e^{-2i\omega}) \leqq 0 \qquad (\alpha = 2, \ldots, m)$$

erfüllt oder, was dasselbe ist, wenn die Punkte a_α $(\alpha = 2, \ldots, m)$ *auf derselben Seite der durch den Punkt* $a_1 = 0$ *gehenden Geraden* $\xi \cos 2\omega + \eta \sin 2\omega = 0$ *wie der Punkt* $-e^{2i\omega}$ *oder auf der Geraden selbst liegen.*

Es soll gezeigt werden, daß in dem ausgesprochenen Satze die Bedingungen $\Re(a_\alpha e^{-2i\omega}) < 0$ $(\alpha = 2, \ldots, m)$ durch *die Bedingungen* $\Re(a_\alpha e^{-2i\omega}) \leqq 0$ $(\alpha = 2, \ldots, m)$ ersetzt werden können.

Wir setzen jetzt voraus, daß die Punkte a_α $(\alpha = 2, \ldots, m)$ teils auf der Geraden $\xi \cos 2\omega + \eta \sin 2\omega = 0$, teils auf der negativen Seite dieser Geraden liegen. Wenn die auf dieser Geraden gelegenen Punkte a_α sämtlich auf derselben Seite des Nullpunktes liegen, so kann man durch eine beliebig kleine Änderung von ω erreichen, daß alle Punkte $a_2, \ldots, a_m$ auf der negativen Seite der Geraden liegen, also $\Re(a_\alpha e^{-2i\omega}) < 0$ $(\alpha = 2, \ldots, m)$ ist. Dies ist nur dann nicht möglich, wenn auf der Geraden $\xi \cos 2\omega + \eta \sin 2\omega = 0$ mindestens zwei Punkte a_α liegen, welche durch den Nullpunkt getrennt werden, was höchstens für endlich viele Werte ω eintreten kann. Ein solcher Wert sei $\omega = \omega_0$.

Wir beweisen eine Abänderung des früheren Satzes:

Es ist für $t = |t|\, e^{i\omega_0}$

$$|w_\alpha(t)| < C e^{h|t|} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

wenn die positiven Konstanten h und C hinreichend groß sind, vorausgesetzt, daß

$$\Re(a_\alpha e^{-2i\omega_0}) \leqq 0 \qquad (\alpha = 2, \ldots, m)$$

ist.

In dem Beweis des früheren Satzes wird der Sektor $\mathfrak{S}$ durch den Strahl $\arg t = \omega_0$ ersetzt, so daß $\omega' = \omega_0$ ist; h erfüllt nicht nur die Bedingung $h > \sigma(\omega_0) = \sigma_0$, sondern überschreitet auch eine weitere unten angegebene Größe H. Ist $\alpha = \alpha'$ eine der Zahlen $2, \ldots, m$ und ist $\cos(\varphi_\alpha - 2\omega_0) = 0$ oder $\Re \dfrac{e^{2i\omega_0}}{a_\alpha} = 0$, so schreibt sich die Ungleichung $(\mathfrak{C}_\alpha)$

$$0 \leqq \frac{\sum_{\beta=1}^{m} |a_{\alpha\beta}^{(1)}|}{|a_\alpha|} + \frac{m A'}{|a_\alpha|\,(2h - \sigma_0 - \varepsilon)} - h$$

oder, wenn

$$L_\alpha = \frac{\sum_{\beta=1}^{m} |a_{\alpha\beta}^{(1)}|}{|a_\alpha|}, \quad M_\alpha = \frac{m A'}{2|a_\alpha|}$$

und

$$f(h) = (h - L_\alpha)\left(h - \frac{\sigma_0 + \varepsilon}{2}\right) - M_\alpha$$

gesetzt wird,

$$f(h) \leqq 0.$$

Die quadratische Gleichung $f(h) = 0$ hat eine Wurzel kleiner und eine Wurzel größer als $\frac{\sigma_0 + \varepsilon}{2}$; ihre größte Wurzel ist

$$H_\alpha = \frac{L_\alpha + \frac{\sigma_0 + \varepsilon}{2}}{2} + \sqrt{\left(\frac{L_\alpha - \frac{\sigma_0 + \varepsilon}{2}}{2}\right)^2 + M_\alpha}.$$

Wir bezeichnen mit H die größte der Größen H_α, wobei nur solche α in Betracht kommen, für welche $\cos(\varphi_\alpha - 2\omega_0) = 0$ ist. Wenn die größer als $\sigma_0 + \varepsilon$ vorausgesetzte Größe h zugleich größer als H ist, hat man

$$f(h) > 0,$$

so daß ein Widerspruch besteht.

Für $m = 2$ und $m = 3$ sind die Bedingungen $\Re(a_\alpha e^{-2i\omega}) \leqq 0$ $(\alpha = 2, \ldots, m)$ stets erfüllbar, während es für $m \geqq 4$ auf die Lage der Punkte $0, a_2, \ldots, a_m$ ankommt.

Ein System von zwei oder drei Differentialgleichungen (A) *mit einer Unbestimmtheitsstelle vom Rang 2 kann stets mit Hilfe von* Laplaceschen *Integralen von der hier behandelten einfacheren Form* (3) *integriert werden.*

Die einfachere Form der Laplaceschen Integrale macht sich auch bei dem Übergang zu *Fakultätenreihen* geltend. Bei Benutzung der jetzigen Form (3) der Laplaceschen Integrale kommt man zu ebenso einfachen Fakultätenreihen wie im Falle des Ranges 1 [6]), während die Form (1) der Laplaceschen Integrale zu komplizierteren Fakultätenreihen [7]) und die Form (2) zu Gammaquotientenreihen [8]) statt zu Fakultätenreihen führt.

---

[6]) Math. Ann. 71 (1911), Formel S. 522 unten ohne den Exponentialfaktor.

[7]) Math. Ann. 71 (1911), Formel S. 531 oben ohne den Exponentialfaktor; Jahresber. d. D. Math.-Ver. 24 (1915), S. 329 für $k = 2$.

[8]) Math. Zeitschr. 8 (1920), S. 112, vorletzte Formel von § 2 für $k = 2$; vgl. auch 21 (1924), S. 89 f. und 13 (1922), S. 272, Fußnote.

§ 2.

In dem Differentialgleichungssystem (A) *sei jetzt* $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ *und* $a_3, \ldots, a_m$ *von Null verschieden.*

Wenn die Elementarteiler der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} - s, & a_{12}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} \quad , & a_{22}^{(1)} - s \end{vmatrix}$$

linear sind, können wir durch lineare Transformation von y_1, y_2 erreichen, daß $a_{12}^{(1)} = 0$, $a_{21}^{(1)} = 0$ wird. Es werden $a_{11}^{(1)}, \ldots, a_{mm}^{(1)}$ durch die Substitution $y_\alpha = e^{-a_{11}^{(1)} x} z_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$ um $a_{11}^{(1)}$ oder durch die Substitution $y_\alpha = e^{-a_{22}^{(1)} x} z_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$ um $a_{22}^{(1)}$ vermindert. Wir können also in dem System (A) entweder $a_{11}^{(1)} = 0$ oder $a_{22}^{(1)} = 0$ voraussetzen.

1) Es sei $a_{11}^{(1)} = 0$, $a_{22}^{(1)} \neq 0$.

Das Differentialgleichungssystem (A), *in welchem*

$a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 \neq 0, \ldots, a_m \neq 0$, $a_{11}^{(1)} = 0$, $a_{12}^{(1)} = 0$, $a_{21}^{(1)} = 0$, $a_{22}^{(1)} \neq 0$

ist, wird mit (A_2') *bezeichnet.*

Das System (A_2') wird durch Reihen

$$y_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

formal befriedigt. Es ist A_{10} beliebig, $A_{20} = \cdots = A_{m0} = 0$ usw. Der Realteil von

$$r = a_{11}^{(2)} - \sum_{\gamma=3}^{m} \frac{a_{1\gamma}^{(1)} a_{\gamma 1}^{(1)}}{a_\gamma}$$

kann positiv angenommen werden.

Die Laplacesche Transformation[9])

$$y_\alpha = \int_0^\infty w_\alpha(t)\, e^{-tx}\, dt \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

führt auf die Integralgleichungen

$$(B_2') \begin{cases} t\, w_1(t) = \sum_{\beta=3}^{m} a_{1\beta}^{(1)} w_\beta(t) + \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t G_{1\beta}'(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau, \\ (t - a_{22}^{(1)})\, w_2(t) = \sum_{\beta=3}^{m} a_{2\beta}^{(1)} w_\beta(t) + \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t G_{2\beta}'(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau, \\ a_\alpha\, w_\alpha(t) = \int_0^t w_\alpha(\tau)\, d\tau - \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t G_{\alpha\beta}(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau \quad (\alpha = 3, \ldots, m), \end{cases}$$

[9]) Vgl. die Behandlung eines hierher gehörigen Beispiels Math. Ann. 111 (1935), S. 653 f.

die wir auf die Form bringen:

$$t\,w_1(t) = \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t f_{1\beta}(t,\tau)\,w_\beta(\tau)\,d\tau,$$

$$w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t f_{\alpha\beta}(t,\tau)\,w_\beta(\tau)\,d\tau \qquad (\alpha = 2, \ldots, m);$$

dabei ist

$$f_{11}(t,\tau) = G'_{11}(t-\tau) - \sum_{\gamma=3}^{m} \frac{a_{1\gamma}^{(1)}}{a_\gamma}\,G_{\gamma 1}(t-\tau),$$

$$f_{11}(0,0) = a_{11}^{(2)} - \sum_{\gamma=3}^{m} \frac{a_{1\gamma}^{(1)}\,a_{\gamma 1}^{(1)}}{a_\gamma} = r.$$

Wenn die Gerade, die von $t = a_{22}^{(1)}$ mit $\arg t = \arg a_{22}^{(1)}$ ins Unendliche geht, ausgeschlossen wird, wenn sonst t irgendwo im Endlichen und τ auf der Geraden $0 \ldots t$ liegt, sind die Funktionen $f_{\alpha\beta}(t,\tau)$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$ regulär. Man hat [10])

$$w_\alpha(t) = t^{r-1}\,\mathfrak{p}_\alpha(t) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

wo $\mathfrak{p}_\alpha(t)$ abgesehen von der ausgeschlossenen Geraden im Endlichen regulär ist; für $|t| < |a_{22}^{(1)}|$ ist

$$w_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{\alpha n}\,\frac{t^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m).$$

Wir nehmen an, $t = |t|\,e^{i\omega}$ befinde sich auf der Geraden $\arg t = \omega$, wo

$$\Re\,(a_\alpha\,e^{-2i\omega}) < 0 \qquad (\alpha = 3, \ldots, m)$$

und $\omega \neq \arg a_{22}^{(1)}$ sein möge, und es sei $h > \sigma(\omega) \geqq 0$, wo $\sigma(\omega)$ wie in § 1 definiert ist. Dann ist, wenn $C > 0$ hinreichend groß ist,

$$|w_\alpha(t)| < C\,e^{h|t|} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m).$$

Die Laplaceschen Integrale

$$y_\alpha = \int_0^\infty w_\alpha(t)\,e^{-tx}\,dt \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

genügen in dem Gebiet $\Re\,(x\,e^{i\omega}) > \sigma(\omega)$ *den Differentialgleichungen* (A'_2), *wenn der nicht durch* $t = a_{22}^{(1)}$ *gehende Integrationsweg* $\arg t = \omega$ *die Bedingungen erfüllt:*

$$\Re\,(a_\alpha\,e^{-2i\omega}) < 0 \qquad (\alpha = 3, \ldots, m).$$

Im Falle $\Re\,(a_\alpha\,e^{-2i\omega}) = 0$ verfährt man wie am Schluß von § 1.

---

[10]) Jahresber. **24**, S. 213–216.

2) Es sei $a_{11}^{(1)} = 0$, $a_{22}^{(1)} = 0$.

Das Differentialgleichungssystem (A), *in welchem* $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$, $\ldots$, $a_m \neq 0$, $a_{11}^{(1)} = a_{12}^{(1)} = a_{21}^{(1)} = a_{22}^{(1)} = 0$ *ist, wird mit* (A_2'') *bezeichnet.*

Man hat jetzt die formalen Reihen

$$y_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

mit $A_{30} = \cdots = A_{m0} = 0$. Setzt man

$$H_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}^{(2)} - \sum_{\gamma=3}^{m} \frac{a_{\alpha\gamma}^{(1)} a_{\gamma\beta}^{(1)}}{a_\gamma} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2),$$

so ergibt sich $A_{10} : A_{20}$ aus

$$(H_{11} - r) A_{10} + H_{12} A_{20} = 0,$$
$$H_{21} A_{10} + (H_{22} - r) A_{20} = 0,$$

wenn r der quadratischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} H_{11} - r, & H_{12} \\ H_{21} & , \; H_{22} - r \end{vmatrix} = 0$$

genügt. Diese Gleichung habe zwei verschiedene Wurzeln r_1, r_2 ohne ganzzahlige Differenz, so daß je ein Reihensystem zu $r = r_1$ und zu $r = r_2$ gehört. Ist $r = H_{11} = H_{22}$, $H_{12} = H_{21} = 0$, so bleiben A_{10} und A_{20} willkürlich, so daß zwei linear unabhängige Reihensysteme mit demselben r vorhanden sind.

Setzen wir wieder

$$y_\alpha = \int_0^\infty w_\alpha(t)\, e^{-tx}\, dt \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

so erhalten wir für die $w_\alpha(t)$ Integralgleichungen, welche aus den Integralgleichungen (B_2') durch Nullsetzen von $a_{22}^{(1)}$ hervorgehen:

$$(B_2'') \qquad \begin{cases} t\, w_1(t) &= \cdots, \\ t\, w_2(t) &= \cdots, \\ a_\alpha w_\alpha(t) &= \cdots \end{cases} \qquad (\alpha = 3, \ldots, m),$$

wo die rechten Seiten mit den rechten Seiten von (B_2') übereinstimmen. Die Integralgleichungen (B_2'') haben die Form

$$t\, w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t f_{\alpha\beta}(t, \tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau \qquad (\alpha = 1, 2),$$

$$w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t f_{\alpha\beta}(t, \tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau \qquad (\alpha = 3, \ldots, m),$$

wo die $f_{\alpha\beta}(t,\tau)$ $(\alpha = 1,\ldots,m)$ für alle endlichen t, τ regulär sind. Für $\alpha, \beta = 1, 2$ ist

$$f_{\alpha\beta}(t,\tau) = G'_{\alpha\beta}(t,\tau) - \sum_{\gamma=3}^{m} \frac{a^{(1)}_{\alpha\gamma}}{\alpha_\gamma} G_{\gamma\beta}(t-\tau),$$

$$f_{\alpha\beta}(0,0) = a^{(2)}_{\alpha\beta} - \sum_{\gamma=3}^{m} \frac{a^{(1)}_{\alpha\gamma}\, a^{(1)}_{\gamma\beta}}{\alpha_\gamma} = H_{\alpha\beta}.$$

Wir machen von Jahresber. 24, S. 315–318 Gebrauch, wo wir $\mu = 2$ annehmen. Die Determinante

$$|f_{\alpha\beta}(0,0) - r\,\delta_{\alpha\beta}| = |H_{\alpha\beta} - r\,\delta_{\alpha\beta}| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

besitzt, wie oben vorausgesetzt war, zwei lineare Elementarteiler $r - r_1$, $r - r_2$, und zwischen r_1 und r_2 besteht keine von Null verschiedene ganzzahlige Differenz. Die Realteile von r_1 und r_2 werden positiv angenommen. Die Integralgleichungen haben zwei linear unabhängige Lösungen

$$w_\alpha(t) = t^{r-1}\,\mathfrak{p}_\alpha(t) \qquad (\alpha = 1,\ldots,m),$$

wo die $\mathfrak{p}_\alpha(t)$ ganze transzendente Funktionen von t sind und $\mathfrak{p}_3(0) = \cdots = \mathfrak{p}_m(0) = 0$ ist.

Es sind zwei Systeme Laplacescher *Integrale*

$$y_\alpha = \int_0^\infty w_\alpha(t)\, e^{-tx}\, dt \qquad (\alpha = 1,\ldots,m)$$

vorhanden, welche in dem Gebiet $\Re(x\,e^{i\omega}) > \sigma(\omega)$ *den Differentialgleichungen* (A''_2) *genügen, wenn der Integrationsweg* $\arg t = \omega$ *die Bedingungen erfüllt*:

$$\Re(a_\alpha\, e^{-2i\omega}) < 0 \qquad (\alpha = 3,\ldots,m).$$

Im Falle $\Re(a_\alpha\, e^{-2i\omega}) = 0$ verfährt man wie am Schluß von § 1.

Die bisherigen Betrachtungen lassen sich auf Differentialgleichungen (A) ausdehnen, für welche $a_1 = \cdots = a_\mu = 0$ $(\mu > 2)$ ist, während $a_{\mu+1}, \ldots, a_m$ von Null verschieden sind [11]).

---

[11]) In der Arbeit „Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen" [Math. Ann. 111 (1935), S. 638–677] wurde die hier dargestellte Methode auf das Differentialgleichungssystem (A) auf S. 653 ($m = 3$, $\mu = 2$) angewandt. Für die in der Fortsetzung der genannten Arbeit [ebenda 113 (1936), S. 242–291] auf S. 245/246 behandelten Systeme (A) ist $m = 4$, $\mu = 3$.

(Eingegangen am 26. Oktober 1942.)

Über Simony-Knoten und Simony-Ketten mit vorgeschriebenen singulären Primzahlen für die Figur und für ihr Spiegelbild.

Von

Heinrich Tietze in München.

Einleitung.

1. Hat man ein endliches System K von geschlossenen Raumkurven mit einer Projektionsfigur mit nur endlich vielen einfachen Überkreuzungen[1]), dann läßt sich bekanntlich nach der REIDEMEISTERschen Theorie[2]) der Projektionsfigur eine ganzzahlige quadratische Form zuordnen und die ungeraden singulären Primzahlen dieser Form[3]) sind dann Invarianten des Kurvensystems K gegenüber Deformationen und somit charakteristisch für die betrachteten Verknotungen und Verkettungen. Von den fraglichen ungeraden Primzahlen soll dann als von den „singulären Primzahlen der Linienfigur" selbst gesprochen werden[4]). Diese topologisch invarianten Primzahlen sind dabei — hierin abweichend von der GAUSSschen Verschlingungs-Invariante[5]) — unabhängig von etwaigen Orientierungen der einzelnen Linien, für die demgemäß keine Festlegung eines Durchlaufungssinnes vorgenommen wird.

Man kann mit der Untersuchung einer Linienfigur K auch die Betrachtung ihres Spiegelbildes K' verbinden, wobei dem Übergang von K zu K' die Multiplikation der zugeordneten quadratischen Form mit -1 entspricht.

---

[1]) Es sind also bei der Projektionsfigur nur Doppelpunkte zugelassen, nicht aber Punkte, in denen mehr als zwei Linienstücke einander treffen. In den Doppelpunkten soll ein Durchsetzen der beiden Linienstücke der Projektion (keine Berührung) stattfinden. Wegen Überführung von mehr als zweifachen Durchsetzungen in einfache Doppelpunkte vgl. etwa l. c.[3]), S. 3/4, Fig. 4.

[2]) K. REIDEMEISTER, Knotentheorie (Band 1 der „Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete"), 1932, Kap. II, § 7, 8, S. 25ff., sowie l. c.[3]), Kapitel III, S. 22–29.

[3]) Diese Bezeichnung habe ich einmal zur Vereinfachung der Darstellung in einem Vortrag eingeführt (siehe „Ein Kapitel Topologie", Hamburger Math. Einzelschriften 36, S. 21). Ich habe darin keine eigenen Ergebnisse vorgebracht, sondern nur an Hand eines Einzelproblems den neueren Stand der Knotenlehre geschildert, so daß ich im Hinblick auf eine Bemerkung im dortigen Vorwort (l. c., S. VI, Zeile 6) sagen kann: Die guten Gedanken sind von anderen, nur der Stiefel ist von mir.

[4]) Vgl. l. c.[14]), Note I, Nr. 3; ebenso auch gelegentlich l. c.[3]), etwa S. 44, Anm. 23.

[5]) l. c.[3]), S. 17.

Von einem gewissen Interesse ist dann der Fall, daß bei diesem Übergang eine Änderung in den singulären Primzahlen eintritt, weil darin ein sehr bequemer Beweis dafür vorliegt, daß die betrachtete Figur K nicht zu den „amphicheiralen", d. h. in ihr Spiegelbild überführbaren, gehört.

2. Gewisse nach einem besonders einfachen Prinzip auf einem Torus verlaufende Linien[6]) und Liniensysteme $[m, n]$ hat vormals — in der experimentellen Epoche der Knotenforschung — O. Simony eingehend studiert[7]), wobei die einzelne Figur durch ein Paar ganzer Zahlen m, n, das nicht aus zwei Nullen besteht, charakterisiert wird, und wobei $[m, n]$ mit $[-m, -n]$ bzw. mit $[n, m]$ übereinstimmt bzw. topologisch äquivalent ist. Analytisch läßt sich die Figur $[m, n]$ durch

$$(1) \qquad nv \equiv mu \pmod{2\pi}$$

kennzeichnen[8]), wenn u, v Parameter auf der Torusfläche

$$(2) \qquad r = \alpha + \beta \cos u, \quad z = \beta \sin u$$

sind, unter r, v, z Zylinderkoordinaten ($x = r \cos v$, $y = r \sin v$ und z cartesische Koordinaten) verstanden und unter α, β zwei positive Zahlen mit $\alpha > \beta$. Wenn keine der Zahlen m, n gleich null ist, dann unterscheidet man zwischen einem positiven oder negativen *Drehungssinn* der Figur $[m, n]$, je nachdem $mn > 0$ oder < 0 ist[9]). Der größte gemeinsame Teiler t von m und n gibt dabei die Anzahl der Linien des Systems $[m, n]$ an[10]).

---

[6]) Diese Linien sind inzwischen als „Torusknoten" bezeichnet und studiert worden.

[7]) Vgl. l. c.[12]). Über Simony selbst siehe außer Poggendorffs biograph.-liter. Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften Bd. III, 2. Abt., Bd. IV, 2. Abt. noch: Centralblatt für das gesamte Forstwesen, Wien, **42** (1916), S. 64—69; **44** (1918), S. 167—170; Österr. Forst- u. Jagd-Zeitung **36** (Wien 1918), S. 63 sowie l. c.[3]), S. 44, 45.

[8]) Vgl. l. c.[13]), S. 54, 55.

[9]) Diese Unterscheidung stellt natürlich eine Bezugnahme zum gewählten Koordinatensystem dar [während Bezugnahmen zu empirischen Unterscheidungen — rechts, links usw. — mit Geometrie als Teil der reinen — nicht angewandten — Mathematik natürlich nichts zu tun haben; vgl. zu dieser Nebenbemerkung etwa l. c.[14]), Note I, Anm. 3, Nr. 1].

[10]) Jede einzelne der t Linien ist dabei mit der Linie $\left[\frac{m}{t}, \frac{n}{t}\right]$ topologisch gleichwertig, d. h. in sie ohne Durchsetzungen deformierbar.

[11]) Die Fälle $m = 1$ und $m = 0$ bieten kein Interesse: es besteht $[1, n]$ bzw. $[0, n]$ aus einer einzigen unverknoteten Linie bzw. aus n unverknoteten und nicht miteinander verketteten Linien.

Wird $m = 2$ genommen[11]) — ein Fall, auf den wir uns in den vorliegenden Betrachtungen beschränken —, so erhält man die „*speziellen*“ SIMONY-Figuren $[2, n] = L_n$, das sind diejenigen, die SIMONY aus einem verdrehten, an den Enden zusammengeklebten Band durch Aufschneiden längs der Mittellinie des Bandes erhielt, während er im weiteren Verlauf seiner Untersuchungen — unter Beschränkung auf den Fall $t = 1$ einer einzigen verknoteten Linie — die „*allgemeinen*“ Figuren (also die vorgenannten Torusknoten) durch geeignetes Zerschneiden von Hohlringen aus Gummi hergestellt hat[12]). Nach dem Gesagten hat man es bei einer Figur L_n, je nachdem $n \equiv 1$ oder $\equiv 0 \pmod 2$ ist, mit einer einzigen Linie (einem „speziellen Simony-Knoten“) oder mit zwei miteinander verketteten Linien (einer „speziellen Simony-Kette“) zu tun, wobei im letzteren Fall jede der beiden Linien vom Typus $\left[1, \frac{n}{2}\right]$, somit (vgl. Anm. 11) unverknotet ist. Der Drehungssinn (s. o.) von L_n wird durch das Vorzeichen von n gegeben.

Wenn im folgenden von Simony-Figuren (Simony-Knoten, Simony-Ketten) die Rede ist, so sollen immer nur die „speziellen“ Figuren L_n gemeint sein.

3. Es ist sehr leicht[13]), die singulären Primzahlen einer Simony-Figur L_n anzugeben (s. Nr. 5). Auch wurde an anderer Stelle die umgekehrte Frage behandelt, zu einer vorgegebenen endlichen Menge $\mathfrak{P}$ von ungeraden Primzahlen alle Simony-Figuren L_n aufzustellen, die die Primzahlen aus $\mathfrak{P}$ und sonst keine anderen zu singulären Primzahlen haben, und es wurde dabei gezeigt, daß zu vorgegebener Menge $\mathfrak{P}$ unendlich viele solche L_n gehören[14]). Man kann aber auch — und dies ist der Gegenstand der folgenden Zeilen — sowohl für die Figur L_n als auch für ihr Spiegelbild L_n' die Menge der singulären Primzahlen vorschreiben und nach der Gesamtheit aller Paare von Figuren L_n, L_n' fragen, die diesen Forderungen genügen. Allerdings hat man bei Vorgabe der für L_n und für L_n' vorzuschreibenden singulären Primzahlen zu beachten, daß eine singuläre Primzahl p einer Linienfigur K, je nachdem $p \equiv 1$ oder $\equiv 3 \pmod 4$ ist, unter den singulären Primzahlen der spiegelbildlichen Figur K' stets vorkommt bzw. stets fehlt (vgl. Anm. 20). Wählt man aber die für L_n und L_n' vorzuschreibenden singulären Primzahlen im Einklang mit dieser Bedingung, dann zeigt sich analog wie l. c.[14]), daß zu jeder solchen

---

[12]) Siehe OSKAR SIMONY, Über eine Reihe neuer Thatsachen aus dem Gebiete der Topologie. Math. Ann. **19** (1882), S. 110—120 und **24** (1884), S. 253—280.

[13]) Siehe „Bemerkungen über verknotete und verkettete Linien I“. Sitz.ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Jahrg. 1942, S. 53—62, Nr. 7, Satz 1.

[14]) Siehe zwei Noten „Über spezielle Simony-Knoten und Simony-Ketten mit vorgeschriebenen singulären Primzahlen“, die in den Monatsheften für Math. u. Physik erscheinen.

Wahl unendlich viele Paare L_n, L'_n gehören, deren Gesamtheit ohne Schwierigkeit vollständig angegeben werden kann[15]) (§§ 3, 4).

4. Nicht ganz dasselbe gilt, wenn man sich nur auf Simony-*Knoten*, also auf L_n mit ungeradem n (vgl. Nr. 2) beschränkt. So gibt es beispielsweise keinen speziellen Simony-Knoten, der ebenso wie sein Spiegelbild die Primzahl 5 als einzige singuläre Primzahl aufweist. Die Bedingung, der die für den Simony-Knoten und sein Spiegelbild vorgeschriebenen singulären Primzahlen zu genügen haben, wenn ein solches Knotenpaar wirklich existieren soll, wird in Nr. 9 besprochen. Im übrigen spielt auch der Drehungssinn herein und die folgenden Entwicklungen geben eine volle Übersicht über alle etwa vorhandenen Figuren-Paare L_n, L'_n, wenn außer den singulären Primzahlen für jede der beiden Figuren noch ihr Drehungssinn vorgeschrieben ist und außerdem vorgeschrieben ist, ob es zwei Knoten oder zwei Ketten sein sollen. Der Fall, daß L_n und L'_n beide frei von singulären Primzahlen sind, wird in § 5 noch besonders besprochen und zum Schluß auf gewisse asymptotische Häufigkeitsfragen hingewiesen.

§ 1.

Die Restklassen-Bedingungen.

5. Sind $k > 0$, $n \gtrless 0$ ganze Zahlen, dabei n quadratfrei und $N = k^2 n$, dann hat[16]) L_N dieselben singulären Primzahlen wie L_n, so daß wir uns weiterhin auf die Betrachtung von Simony-Figuren L_n mit quadratfreiem n beschränken können[17]). Singulär ist nun bei quadratfreiem n eine ungerade Primzahl p dann und nur dann, wenn sie in n aufgeht und die Zahl $-\frac{n}{p} = -n_1$ quadratischer Nichtrest modulo p, also — ausgedrückt durch das Legendresche Restsymbol — wenn $\left(\frac{-n_1}{p}\right) = -1$ ist[18]). Ist also $\mathfrak{U}$ eine endliche Menge ungerader (positiver) Primzahlen und bezeichnet U ihr Produkt ($U = 1$, wenn $\mathfrak{U}$ die leere Menge ist), so wird für eine Simony-Figur L_n mit quadratfreiem n die Menge der singulären Primzahlen genau mit $\mathfrak{U}$ zusammenfallen dann und nur dann, wenn n die Gestalt UV hat [$V \gtrless 0$, ganz, quadratfrei

---

[15]) Von einem solchen Paar von Simony-Figuren L_n, L'_n soll als „zugehörig zu den vorgegebenen Primzahlen" gesprochen werden.

[16]) Vgl. l. c.[14]), Note I, Nr. 4.

[17]) Für $n = 0$ ergibt sich bei der Figur L_0 (die aus zwei getrennt liegenden unverknoteten Linien besteht) keine singuläre Primzahl.

[18]) Vgl. l. c.[13]), Nr. 7, Satz 1, S. 59.

und zu U teilerfremd[19])] und dabei einerseits für jeden Primfaktor u von $U\,(=uU_1)$ die Gleichung

$$-\left(\frac{-U_1V}{u}\right)=1, \tag{3}$$

andererseits für jeden Primfaktor v von $V\,(=vV_1)$ die Gleichung

$$+\left(\frac{-UV_1}{v}\right)=1 \tag{4}$$

gilt[20]).

6. Sei nun $\mathfrak{P}$ eine endliche Menge von Primzahlen $\equiv 1 \pmod 4$, seien ferner $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ zwei elementfremde endliche Mengen von Primzahlen $\equiv 3 \pmod 4$, wobei jede dieser Mengen auch leer sein darf. Das Produkt aller (positiv vorausgesetzten) Primzahlen aus $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{Q}$ bzw. $\mathfrak{R}$ werde mit P bzw. Q bzw. R bezeichnet (dabei werde jedes dieser Produkte $=1$ gesetzt, wenn die betreffende Menge leer ist). Wir setzen

$$PQR=M. \tag{5}$$

Soll nun für ein quadratfreies n die Simony-Figur L_n die Primzahlen aus $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ — und keine anderen — zu singulären Primzahlen haben, ihr Spiegelbild L_n' aber die Primzahlen aus $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{R}$, dann muß n eine der Gestalten $\pm MP^*$, $\pm 2MP^*$ haben, hierbei unter P^* eine positive ungerade quadratfreie, zu M teilerfremde Zahl verstanden, deren Primfaktoren offenbar, weil sie weder für L_n noch für L_n' singulär sein sollen, sämtlich $\equiv 1 \pmod 4$ sein müssen (vgl. Anm. 20). Die Menge der in P^* aufgehenden Primzahlen werde mit $\mathfrak{P}^*$ bezeichnet.

Im Hinblick auf unsere Fragestellung sollen die Primzahlen aus $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ die *wesentlichen* Primzahlen, dagegen die Primzahlen aus $\mathfrak{P}^*$ die *accessorischen* Primzahlen des Paares L_n, L_n' heißen.

7. Dem Gesagten entsprechend schreiben wir n in der Gestalt

$$n=(-1)^{\varrho}\,2^{\sigma}\,PQRP^*, \tag{6}$$

wobei

$$P=\Pi p_\nu,\quad Q=\Pi q_\nu,\quad R=\Pi r_\nu,\quad P^*=\Pi p_\nu^*$$

---

[19]) Im Falle $U=1$ ($\mathfrak{U}$ leer) liefert außerdem $V=0$, also $n=0$ eine zugehörige Simony-Figur (vgl. Anm. 17).

[20]) Hieraus ist — gemäß dem ersten Ergänzungssatz zum quadratischen Reziprozitätsgesetz

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

— ersichtlich, daß eine für $L_n=[2,n]$ singuläre Primzahl zugleich für $L_n'=[2,-n]$ singulär ist oder nicht, je nachdem $p\equiv 1$ oder $\equiv 3 \pmod 4$ ist.

gesetzt und sowohl unter ϱ wie unter σ eine der Zahlen 0, 1 verstanden werde. Wir haben dann nur die Bedingungsgleichungen dafür aufzustellen, daß jede der Primzahlen p_ν, q_ν für L_n singulär, hingegen jede der Primzahlen r_ν, p_ν^* nicht-singulär sei, woraus schon folgt (vgl. Nr. 3 und Anm. 20), daß für L_n' die Primzahlen p_ν, r_ν singulär, dagegen die Primzahlen q_ν, p_ν^* nicht-singulär sind[21]).

Ist nun beispielsweise p eine Primzahl aus $\mathfrak{P}$, so wird

$$-n_1 = -\frac{n}{p} = (-1)^{\varrho+1} 2^\sigma \Pi' p_\nu \Pi q_\nu \Pi r_\nu \Pi p_\nu^*,$$

wenn Π' das über alle Primfaktoren p_ν von P mit Ausnahme von p erstreckte Produkt bedeutet. Gemäß (3) bzw. (4) in Nr. 5 erhält man daher für die Singularität einer jeden Primzahl p aus $\mathfrak{P}$ und analog für die Singularität der Primzahlen q aus $\mathfrak{Q}$, sowie für die Nicht-Singularität der Primzahlen r aus $\mathfrak{R}$ und p^* aus $\mathfrak{P}^*$ die Bedingungen[22])

$$(7,\text{a}) \quad 1 = -\left(\frac{-1}{p}\right)^{\varrho+1} \cdot \left(\frac{2}{p}\right)^{\sigma} \cdot \Pi' \left(\frac{p_\nu}{p}\right) \cdot \Pi \left(\frac{q_\nu}{p}\right) \cdot \Pi \left(\frac{r_\nu}{p}\right) \cdot \Pi \left(\frac{p_\nu^*}{p}\right),$$

$$(7,\text{b}) \quad 1 = -\left(\frac{-1}{q}\right)^{\varrho+1} \cdot \left(\frac{2}{q}\right)^{\sigma} \cdot \Pi \left(\frac{p_\nu}{q}\right) \cdot \Pi' \left(\frac{q_\nu}{q}\right) \cdot \Pi \left(\frac{r_\nu}{q}\right) \cdot \Pi \left(\frac{p_\nu^*}{q}\right),$$

$$(7,\text{c}) \quad 1 = +\left(\frac{-1}{r}\right)^{\varrho+1} \cdot \left(\frac{2}{r}\right)^{\sigma} \cdot \Pi \left(\frac{p_\nu}{r}\right) \cdot \Pi \left(\frac{q_\nu}{r}\right) \cdot \Pi' \left(\frac{r_\nu}{r}\right) \cdot \Pi \left(\frac{p_\nu^*}{r}\right),$$

$$(7,\text{d}) \quad 1 = +\left(\frac{-1}{p^*}\right)^{\varrho+1} \cdot \left(\frac{2}{p^*}\right)^{\sigma} \cdot \Pi \left(\frac{p_\nu}{p^*}\right) \cdot \Pi \left(\frac{q_\nu}{p^*}\right) \cdot \Pi \left(\frac{r_\nu}{p^*}\right) \cdot \Pi' \left(\frac{p_\nu^*}{p^*}\right),$$

wobei die Bedeutung der Produkte Π' in den Gleichungen (7, b), (7, c), (7, d) in Analogie mit (7, a) klar ist.

Wenn man nun zu den vorgeschriebenen Primzahlen p_ν, q_ν, r_ν aus $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ noch die Zahlen ϱ, σ (gleich 0 oder 1) in bestimmter Weise gewählt denkt, dann besteht unsere Aufgabe darin, alle Systeme $\mathfrak{P}^*$ von Primzahlen p_ν^* aufzustellen, für welche die Gesamtheit der Bedingungen (7) erfüllt ist. Da es sich hierbei um Beziehungen zwischen Restsymbolen handelt, durch welche entweder [nämlich bei den Symbolen von der Gestalt $\left(\frac{-1}{u}\right)$, $\left(\frac{2}{u}\right)$] die Restklasse der betreffenden Primzahl u mod. 4 bzw. 8, oder [nämlich bei den

---

[21]) Vertauscht man innerhalb des Paares L_n, L_n' die Rolle der beiden Figuren L_n und L_n', so läuft dies auf Umkehrung des Drehungssinnes (also Ersetzen von ϱ durch $1-\varrho$) und auf Vertauschen der Mengen $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ hinaus. In den im folgenden aufgestellten Bedingungsgleichungen (7) spricht sich dies einfach darin aus, daß die Bedingungen (7, b), (7, c) miteinander vertauscht werden, hingegen (7, a) und (7, d) ungeändert bleiben.

[22]) Wenn eine der Mengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{P}^*$ leer ist, dann entfallen natürlich die entsprechenden Bedingungen, z. B. die Bedingungen (7, b), wenn $\mathfrak{Q}$ leer ist. Sind alle diese Mengen leer, so entfallen die Bedingungen (7) überhaupt.

Symbolen von der Gestalt $\left(\frac{u}{v}\right)$] die Restklasse von u modulo einer anderen ungeraden Primzahl v Beschränkungen unterworfen wird, so sollen die Bedingungen (7) kurz als die „*Restklassen-Bedingungen*" bezeichnet werden[23]). Zusammenfassend können wir also zunächst feststellen:

Satz 1. *Das Erfülltsein der Restklassen-Bedingungen* (7) *ist notwendig und hinreichend dafür, daß die getroffene Wahl der Menge* $\mathfrak{P}^*$ *der accessorischen Primzahlen auf ein „zu* ϱ, σ, $\mathfrak{P}$, Ω, $\mathfrak{R}$ *gehöriges" Paar von Simony-Figuren* L_n, L'_n *führt.*

§ 2.

Die Anzahlbedingung. Primzahlmengen ohne zugehörigen Simony-Knoten.

8. Es möge mit α bzw. γ die Anzahl der Primzahlen aus $\mathfrak{P}$ bezeichnet werden, die $\equiv 1$ bzw. $\equiv 5 \pmod 8$ sind; die entsprechende Bedeutung mögen α^* und γ^* für die Menge $\mathfrak{P}^*$ haben. Ferner sei β bzw. δ die Anzahl der Primzahlen aus Ω, die $\equiv 3$ bzw. $\equiv 7 \pmod 8$ sind, und es mögen β', δ' die entsprechenden Anzahlen für die Menge $\mathfrak{R}$ sein. In den einzelnen Mengen $\mathfrak{P}$, Ω, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{P}^*$ verteilen sich also die Primzahlen auf die Restklassen mod. 8 gemäß der folgenden

Anzahl-Tabelle.

	1	3	5	7
$\mathfrak{P}$	α	0	γ	0
Ω	0	β	0	δ
$\mathfrak{R}$	0	β'	0	δ'
$\mathfrak{P}^*$	α^*	0	γ^*	0

Wir setzen noch

$$\alpha + \gamma = c, \quad \alpha^* + \gamma^* = c^*, \tag{8}$$

$$\beta + \delta = d, \quad \beta' + \delta' = d', \tag{9}$$

$$c + d = b, \quad c + d' = b', \tag{10}$$

$$c + d + d' = g, \tag{11}$$

$$c + d + d' + c^* = a. \tag{12}$$

---

[23]) Dabei soll beispielsweise von der angeschriebenen Restklassen-Bedingung (7, a) gesagt werden, sie beziehe sich auf die Primzahl p; und analog sagen wir, wenn w irgendeine Primzahl aus einer der Mengen $\mathfrak{P}$, Ω, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{P}^*$ ist, daß diejenige *Restklassen-Bedingung sich auf* w *bezieht*, in der die Restsymbole $\left(\frac{-1}{w}\right)$, $\left(\frac{2}{w}\right)$, $\left(\frac{p_\nu}{w}\right)$, $\left(\frac{q_\nu}{w}\right)$, $\left(\frac{r_\nu}{w}\right)$, $\left(\frac{p^*}{w}\right)$ auftreten.

Nunmehr kehren wir zurück zu den a Restklassen-Relationen (7). Wir wollen ihr Produkt bilden[24]). Dabei folgt zunächst aus den Ergänzungssätzen zum quadratischen Reziprozitätsgesetz: In allen Relationen (7, a) bzw. (7, d) ist $\left(\frac{-1}{p}\right)$ bzw. $\left(\frac{-1}{p^*}\right)$ gleich $+1$; in allen Relationen (7, b) bzw. (7, c) ist $\left(\frac{-1}{q}\right)$ bzw. $\left(\frac{-1}{r}\right)$ gleich -1; in γ von den Relationen (7, a) hat $\left(\frac{2}{p}\right)$ den Wert -1 und dasselbe gilt für $\left(\frac{2}{q}\right)$ bzw. $\left(\frac{2}{r}\right)$ bzw. $\left(\frac{2}{p^*}\right)$ für β bzw. β' bzw. γ^* von den Relationen (7, b) bzw. (7, c) bzw. (7, d). Wenn ferner u und v irgend zwei verschiedene Primfaktoren von $PQRP^*$ sind, so kommt jedes der Restsymbole $\left(\frac{u}{v}\right)$ und $\left(\frac{v}{u}\right)$ in genau einer der Relationen (7) vor. Ihr Produkt $\left(\frac{u}{v}\right)\cdot\left(\frac{v}{u}\right)$ aber hat nach dem quadratischen Reziprozitätsgesetz den Wert -1 dann und nur dann, wenn die Primzahlen u und v beide $\equiv 3 \pmod 4$ sind; und da es unter den Primfaktoren von $PQRP^*$ genau $d + d'$ Primzahlen $\equiv 3 \pmod 4$ gibt, so ergibt sich für $\frac{1}{2}(d+d')(d+d'-1)$ Paare u, v der Wert $\left(\frac{u}{v}\right)\cdot\left(\frac{v}{u}\right) = -1$, für alle anderen Paare aber ist er $= +1$. Alles dies zusammengenommen zeigt, daß die Multiplikation aller Relationen (7) auf die Gleichung

$$+1 = (-1)^b\,(-1)^{(\varrho+1)(d+d')}\,(-1)^{\sigma(\beta+\beta'+\gamma+\gamma^*)}\,(-1)^{\frac{1}{2}(d+d')(d+d'-1)}$$

oder auf

$$0 \equiv b + (\varrho+1)(d+d') + \sigma(\beta+\beta'+\gamma+\gamma^*) + \tfrac{1}{2}(d+d')(d+d'-1) \pmod 2 \tag{13}$$

führt. Es ist das eine von den Primzahlmengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{P}^*$ und von den Zahlen ϱ, σ zu erfüllende Bedingung[25]), in der nicht, wie in den Bedingungsgleichungen (7) Restsymbole auftreten, sondern außer ϱ und σ nur mehr Anzahlen wie β, β' usw. Wir wollen diese Bedingung (13) daher als die „*Anzahlbedingung*" bezeichnen. Hierzu noch die folgende

Bemerkung. Wenn $a = 1$ ist, d. h. wenn alle Mengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{P}^*$ zusammen nur eine einzige Primzahl enthalten, also nur eine einzige Bedingung (7) vorliegt[26]), dann deckt sich diese inhaltlich natürlich mit (13).

---

[24]) Wobei natürlich der Fall, daß alle Mengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{P}^*$ leer sind und gar keine Relationen (7) vorliegen (vgl. Anm. 22) außer Betracht bleibt.

[25]) Gegenüber Vertauschung der Rollen von L_n und L'_n (vgl. Anm. 21) ist die Bedingung (13) natürlich invariant, wie sich wegen $b' = b + d' - d \equiv b + d + d'$ unmittelbar aus $b' + ((1-\varrho)+1)(d'+d) \equiv b' + \varrho(d+d') \equiv b + (\varrho+1)(d+d')$ (mod 2) ergibt.

[26]) Falls alle genannten Mengen leer sind (vgl. Anm. 24), ist (13) wegen $b = d = d' = \beta = \beta' = \gamma = \gamma^* = 0$ natürlich von selbst erfüllt.

Ist aber die Anzahl a der Bedingungen (7) größer als eins, dann erhält man ein dem System der (für das Vorhandensein eines zugehörigen Paares L_n, L'_n notwendigen und hinreichenden) Bedingungen (7) gleichwertiges System, indem man eine der Bedingungen (7) durch die Anzahlbedingung (13) ersetzt.

9. Im allgemeinen, d. h. wenn mehr als eine Bedingung (7) vorliegt, stellt die Anzahlbedingung (13) nur eine auf die Zahlen ϱ, σ, auf die wesentlichen Primzahlmengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ und die accessorische Primzahlmenge $\mathfrak{P}^*$ bezügliche notwendige, nicht aber auch hinreichende Bedingung für die Existenz zugehöriger Figuren-Paare L_n, L'_n dar. Dabei ist der Fall der Simony-Ketten ($\sigma = 1$) vom Fall der Simony-Knoten ($\sigma = 0$) insofern wesentlich verschieden, als im letzteren die Zahl γ^* aus (13) herausfällt und diese Bedingung sonach überhaupt nichts mehr mit den accessorischen Primzahlen zu tun hat, vielmehr nur die wesentlichen Primzahlen und den (durch ϱ bestimmten) Drehungssinn betrifft. Da aber das Nichterfülltsein von (13) die Existenz eines den vorgeschriebenen Primzahlmengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ zugehörigen Figuren-Paares L_n, L'_n ausschließt, so können wir sagen:

Satz 2. *Zu den vorgeschriebenen Primzahlmengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ gibt es kein zugehöriges Paar von Simony-Knoten L_n, L'_n mit dem durch die Zahl ϱ bestimmten Drehungssinn, wenn die auf diese Primzahlmengen (gemäß Nr. 8) bezüglichen Anzahlen d, d', b der Kongruenz*

$$(14) \qquad 1 \equiv b + (\varrho + 1)(d + d') + \tfrac{1}{2}(d + d')(d + d' - 1) \pmod 2$$

genügen.

Daraus folgt insbesondere für den Fall, daß die Anzahl d der Primzahlen aus $\mathfrak{Q}$ mit der Anzahl d' der Primzahlen aus $\mathfrak{R}$ übereinstimmt oder sich von ihr nur um eine gerade Zahl unterscheidet:

Satz 3. *Zu den vorgeschriebenen Primzahlmengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ gibt es überhaupt kein zugehöriges Paar von Simony-Knoten (gleichgültig welchen Drehungssinnes), wenn die Kongruenzen*

$$\begin{aligned} d &\equiv d', \\ 1 &\equiv b + \tfrac{1}{2}(d + d')(d + d' - 1) \end{aligned} \pmod 2$$

bestehen.

Beispielsweise liegt dieser Fall vor, wenn die beiden Mengen $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ leer sind, dagegen die Menge $\mathfrak{P}$ eine ungerade Anzahl von Primzahlen enthält. Ein spezieller Fall dieser Art (mit einer aus einer einzigen Primzahl bestehenden Menge $\mathfrak{P}$) wurde bereits in der Einleitung (Nr. 4) erwähnt.

§ 3.

Ist die Anzahlbedingung erfüllt, so gibt es unendlich viele zugehörige Paare von Simony-Figuren mit accessorischen Primzahlen.

10. In Satz 2 von Nr. 9 wird eine Gesamtheit von Fällen angegeben (unter denen sich auch die in Satz 3 aufgeführten als Sonderfälle befinden), in denen zu vorgegebenem ϱ, zu vorgegebenem σ ($= 0$) und zu vorgegebenen Primzahlmengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ kein zugehöriges Paar von Simony-Figuren L_n, L'_n vorhanden ist. Im Gegensatz dazu werden wir nachweisen können (vgl. unten die Sätze 4 und 5), daß in allen anderen Fällen stets zugehörige Paare L_n, L'_n existieren, und zwar sogar unendlich viele mit quadratfreiem n (außerdem dann natürlich noch gemäß Nr. 5 unendlich viele andere L_N, L'_N mit $N = k^2 n$). Wenn wir über diesen Nachweis hinaus eine Übersicht über *alle* zu einem gegebenen System ϱ, σ, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ gehörigen Paare L_n, L'_n gewinnen wollen, so werden wir bei den bezüglichen Überlegungen die Fälle *mit* accessorischen Primzahlen (also $c^* \geqq 1$) getrennt behandeln von jenen speziellen Fällen, in denen accessorische Primzahlen *fehlen* (also $c^* = 0$ ist). Die Behandlung dieser letzteren Fälle wollen wir auf § 4 verschieben und uns den Fällen mit accessorischen Primzahlen zuwenden[27]).

11. Über das gegebene System ϱ, σ, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ machen wir also die Voraussetzung, daß nicht die Relationen $\sigma = 0$ und (14) alle beide gelten. Falls also $\sigma = 0$ ist, dann ist dieser Voraussetzung gemäß die Anzahlbedingung (13) erfüllt. Ist aber $\sigma = 1$, dann läßt sich γ^* so bestimmen, daß (13) erfüllt ist; denn offenbar kommt es nur darauf an, ob γ^* eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, und wenn hierüber geeignet verfügt wird, dann wird die Kongruenz (13) gelten. Ob also der eine Fall ($\sigma = 0$) oder der andere ($\sigma = 1$) vorliegt, stets können wir auf unendlich viele Arten α^* und γ^* so wählen, daß die Bedingung (13) erfüllt ist. Da wir, wie gesagt, die Betrachtung des Falles $c^* = 0$ (d. h. $\alpha^* = \gamma^* = 0$) auf § 4 verschieben, so wollen wir jetzt über α^*, γ^* noch die Voraussetzung

$$c^* = \alpha^* + \gamma^* \geqq 1 \tag{15}$$

machen.

Für die weiteren Betrachtungen haben wir also auszugehen von dem gegebenen System ϱ, σ, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ und von zwei Zahlen α^*, γ^* von der Art, daß sowohl (13) als (15) erfüllt ist. Und die zu behandelnde Frage ist, ob wir die Menge $\mathfrak{P}^*$ der accessorischen Primzahlen so bestimmen können, daß einerseits

---

[27]) Bemerkt sei, daß sich in die Überlegungen der §§ 3 und 4 auch der Fall $g = 0$, in welchem alle drei Mengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ leer sind, einbeziehen läßt. Doch werden wir diesen Fall, der für die Behandlung gewisse Besonderheiten aufweist, in § 5 selbständig besprechen.

ihre Verteilung auf die Restklassen 1 und 5 (mod. 8) in Einklang steht mit den bereits gewählten Werten von α^* und γ^*, und daß andererseits die Primzahlen aus $\mathfrak{P}^*$ den sämtlichen a Restklassen-Bedingungen (7) genügen. Wir werden sehen, daß eine solche Bestimmung von $\mathfrak{P}^*$ stets, und zwar auf unendlich viele Arten möglich ist, daß also der Satz gilt:

Satz 4. *Zu den gegebenen Primzahlmengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, zu den Zahlen ϱ, σ und zu Anzahlen α^*, γ^*, die der Voraussetzung* (15) *genügen, läßt sich bei Erfülltsein von* (13) *eine zugehörige Primzahlmenge $\mathfrak{P}^*$ auf unendlich viele Arten bestimmen.*

In diesem Satz 4 mit enthalten ist der folgende

Satz 5. *Zu vorgegebenen Zahlen ϱ, σ und vorgegebenen Primzahlmengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, für die nicht $\sigma = 0$ und* (14) *gilt, existieren stets unendlich viele zugehörige Paare von Simony-Figuren L_n, L'_n mit accessorischen Primzahlen (und zwar mit quadratfreiem n)*[28]).

Beim Nachweis von Satz 4 soll zunächst (in Nr. 12) der Fall $c^* = 1$ und dann (in Nr. 13) der Fall $c^* > 1$ vorgenommen werden.

12. Im Falle $c^* = 1$ ist eine der Zahlen α^*, γ^* gleich 0, die andere gleich 1; anders gesagt: Von der einen accessorischen Primzahl p^*, aus der die zu bestimmende Menge $\mathfrak{P}^*$ bestehen soll, ist die Restklasse mod. 8, der p^* angehören soll (ob nämlich $p^* \equiv 1$ oder $\equiv 5$ sein soll), festgelegt. Andererseits folgt aus der Bemerkung am Schluß von Nr. 8, daß wegen Erfülltsein der Anzahlbedingung (13) von den Restklassen-Bedingungen (7) nur $a - 1$ erfüllt zu werden brauchen, um zu gewährleisten, daß sämtliche a Bedingungen (7) gelten. Wir wollen die (im Sinne von Anm. 23) auf p^* bezügliche Bedingung (7, d) weglassen und danach trachten, die übrigen auf die wesentlichen Primzahlen bezüglichen $a - 1 = g$ Bedingungen (7, a), (7, b), (7, c) durch geeignete

---

[28]) Wollte man nur diesen Satz 5 feststellen, dann wäre es nicht nötig, Satz 4 für beliebige der Voraussetzung (15) genügende Werte von α^* und γ^* zu beweisen. Vielmehr würde es ausreichen, sich beim Beweis mit einem der Fälle $c^* = 1$ und $c^* > 1$ zu begnügen. Denn ob nun $\sigma = 0$ oder $\sigma = 1$ ist, so ist es allemal möglich, der Anzahlbedingung (13) speziell auch so zu genügen, daß γ^* gleich einer der Zahlen 0 oder 1 wird und man braucht dann nur α^* gleich 1 oder 0 zu nehmen, um $c^* = \alpha^* + \gamma^* = 1$ zu bekommen; es ist somit Satz 5 nachgewiesen, sobald Satz 4 für $c^* = 1$ bewiesen ist. Das Erfülltsein von (13) wird aber andererseits nicht gestört, wenn α^* beliebig vergrößert wird und γ^* entweder (im Falle $\sigma = 0$) ebenfalls beliebig vergrößert wird oder (im Falle $\sigma = 1$) um eine gerade Zahl, so daß die Anzahlbedingung (13) stets auch so erfüllt werden kann, daß $c^* > 1$ ist; somit würde für den Nachweis von Satz 5 auch der Beweis von Satz 4 für $c^* > 1$ ausreichen.

Da wir eine Übersicht über *alle* zu ϱ, σ, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ gehörigen Paare L_n, L'_n geben wollen, sind beide Fälle $c^* = 1$ und $c^* > 1$ zu besprechen.

Wahl von p^* zu befriedigen. Wir wollen dabei $g > 0$ annehmen[29]). In jeder der fraglichen g Restklassen-Bedingungen sind dann durch ϱ, σ, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ alle auftretenden Größen festgelegt mit Ausnahme des einen Symbols von der Gestalt $\left(\frac{p^*}{w}\right)$, in welchem w diejenige wesentliche Primzahl bedeutet, auf die sich die fragliche Restklassen-Bedingung bezieht. Diese Bedingung legt also den Wert von $\left(\frac{p^*}{w}\right)$ und damit $\frac{w-1}{2}$ teilerfremde Restklassen mod. w fest, in deren einer die Primzahl p^* liegen muß. Beachten wir, daß außerdem die Restklasse mod. 8, der p^* anzugehören hat, festgelegt ist, und bezeichnen wir mit $w_1, \ldots, w_g$ die sämtlichen Primzahlen aus den Mengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, so bekommen wir insgesamt $\frac{1}{2^g} \Pi (w_\nu - 1)$ teilerfremde Restklassen mod. $8 \Pi w_\nu = 8\,PQR = 8\,M$, so daß durch die Wahl von p^* in einer dieser Restklassen das Erfülltsein aller Bedingungen (7) gesichert ist. Da nach dem Dirichletschen Satz jede dieser Restklassen unendlich viele Primzahlen enthält, so ist damit Satz 4 für den Fall $c^* = 1$ bewiesen.

Als Beispiel betrachten wir für eine Simony-Kette ($\sigma = 1$) den Fall, daß $\mathfrak{P}$ aus der einen Primzahl $p = 5$, $\mathfrak{Q}$ aus der einen Primzahl $q = 3$ besteht und daß $\mathfrak{R}$ leer ist. Es ist dann $\alpha = \delta = \beta' = \delta' = 0$, $\beta = \gamma = 1$, $c = d = 1$, $d' = 0$, $b = 2$, $g = 2$. Gemäß $c^* = 1$, d. h. bei einer einzigen accessorischen Primzahl p^* haben wir dann $n = (-1^\varrho)\, 2\, pqp^* = (-1)^\varrho\, 30\, p^*$. Die Anzahlbedingung liefert $\gamma^* \equiv \varrho + 1$ (mod. 2) und die auf p und q bezüglichen Restklassen-Bedingungen ergeben

$$\left(\frac{p^*}{5}\right) = -1, \qquad \left(\frac{p^*}{3}\right) = (-1)^\varrho.$$

Für positiven Drehungssinn ($\varrho = 0$) folgt daraus $\gamma^* = 1$, $\alpha^* = 0$, $p^* \equiv 5$ (mod. 8), $p^* \equiv 1$ (mod. 3), woraus wegen $p^* \equiv 2$ oder 3 (mod. 5) sich ergibt, daß p^* eine Primzahl $\equiv 13$ oder 37 (mod. 120) sein muß; $n = 30\, p^*$ liefert dann ein Paar Simony-Ketten der verlangten Art. Für negativen Drehungssinn ($\varrho = 1$) aber hat man $\gamma^* = 0$, $\alpha^* = 1$, $p^* \equiv 1$ (mod. 8), $p^* \equiv 2$ (mod. 3), wegen $p^* \equiv 2$ oder 3 (mod. 5) muß also p^* eine Primzahl $\equiv 17$ oder 113 (mod. 120) sein und $n = -30\, p^*$ liefert dann ein Paar Simony-Ketten mit den gewünschten singulären Primzahlen.

13. Nicht wesentlich schwieriger ist der Fall $c^* > 1$. Wir setzen $c^* - 1 = h$ und bezeichnen die zu bestimmenden accessorischen Primzahlen mit $p_1^*, \ldots, p_h^*$, $p_{h+1}^* = p^*$, wobei wir im Einklang mit den bereits festgelegten Anzahlen α^*, γ^* für jede dieser Primzahlen p_ν^* festsetzen, ob sie $\equiv 1$ oder $\equiv 5$ (mod. 8) gewählt werden soll. Die Bestimmung der c^* Primzahlen p_ν^* erfolgt nun in zwei Schritten. Beim ersten Schritt wählen wir jede der Prim-

[29]) Falls $g = 0$, also $a = 1$ ist, ist das System der Bedingungen (7), der Bemerkung am Schluß von Nr. 8 gemäß, mit der einen Anzahlbedingung (13) gleichwertig, nach unserer Voraussetzung also von selbst erfüllt, sobald die Primzahl p^* im Einklang mit den Werten von α^*, γ^*, d. h. also in der geeigneten Restklasse mod. 8 (sei es $\equiv 1$, sei es $\equiv 5$) gewählt wird. Auch in diesem Fall des Fehlens wesentlicher Primzahlen (vgl. Anm. 27 und § 5) bestehen also für die Wahl von p^* und somit von $\mathfrak{P}^*$ unendlich viele Möglichkeiten: Satz 4 gilt auch für $g = 0$.

zahlen $p_1^*, \ldots, p_h^*$, und zwar im Einklang mit der für die betreffende Primzahl p_ν^* festgesetzten Restklasse mod. 8, sonst aber beliebig, so daß schon hierbei unendlich viele Möglichkeiten für dieses System der „*vorausgewählten*" Primzahlen $p_1^*, \ldots, p_h^*$ vorliegen. Ist diese Vorauswahl getroffen, dann beachten wir wieder, daß wegen des Erfülltseins der Anzahlbedingung (13) gemäß der Bemerkung am Schluß von Nr. 8 von den a Restklassen-Bedingungen (7) die eine, auf p^* bezügliche, weggelassen werden kann und nur die übrigen $a-1$ erfüllt zu werden brauchen, um sicher zu sein, daß sämtliche a Bedingungen (7) gelten. Jede der $a-1$ beibehaltenen Bedingungen bezieht sich dann (im Sinne von Anm. 23) auf eine der g wesentlichen Primzahlen oder auf eine der h vorausgewählten Primzahlen p_ν^* $(1 \leqq \nu \leqq h)$. Sei w eine dieser $g+h=a-1$ Primzahlen[30]). In der auf w bezüglichen Bedingung (7) sind dann alle auftretenden Größen festgelegt mit Ausnahme des Symbols $\left(\frac{p^*}{w}\right)$. Um also sämtlichen Bedingungen zu genügen, braucht — als zweiter Schritt zur Bestimmung von $\mathfrak{P}^*$ — nur mehr die „*restierende*" Primzahl p^* so bestimmt zu werden, daß jedes der Symbole $\left(\frac{p^*}{w}\right)$ den Wert erhält, der sich aus der auf die Primzahl w bezüglichen Restklassen-Bedingung (7) ergibt. Da jeder dieser Werte für die Wahl von p^* auf $\frac{w-1}{2}$ zulässige teilerfremde Restklassen mod. w führt und außerdem die Restklasse mod. 8, in der p^* liegen soll, bereits feststeht, so stehen insgesamt $\frac{1}{2^{a-1}} \Pi(w-1)$ teilerfremde Restklassen mod. $8 \Pi w = 8 PQR p_1^* \ldots p_h^*$ für die Primzahl p^* zur Verfügung. Nach dem Dirichletschen Satz enthält jede dieser Restklassen unendlich viele Primzahlen, deren jede, für p^* genommen, auf eine zulässige Menge $\mathfrak{P}^*$ führt. Damit ist Satz 4 auch im Falle $c^* > 1$ nachgewiesen.

Als Beispiel betrachten wir für eine Simony-Kette mit negativem Drehungssinn ($\sigma = 1$, $\varrho = 1$) wieder (vgl. Nr. 12) den Fall, daß $\mathfrak{P}$ aus der einen Primzahl $p = 5$, $\mathfrak{Q}$ aus der einen Primzahl $q = 3$ besteht und daß $\mathfrak{R}$ leer ist. Die Anzahl c^* der accessorischen Primzahlen wollen wir $= 3$ vorschreiben, somit n in der Gestalt $n = -2pqp_1^*p_2^*p^* = -30\, p_1^*p_2^*p^*$ ansetzen. Die Anzahlbedingung (13) liefert jetzt $\gamma^* \equiv 0 \pmod 2$, also $\gamma^* = 0, \alpha^* = 3$ oder $\gamma^* = 2, \alpha^* = 1$. Wir wollen den zweiten Fall vornehmen und wollen im besonderen die accessorischen Primzahlen auf die Restklassen mod. 8 so verteilen, daß $p_1^* \equiv 1$ und $p_2^* \equiv p^* \equiv 5 \pmod 8$ ist. Als ersten Schritt des weiteren Verfahrens verfügen wir über die „Vorauswahl" von p_1^* und p_2^* und setzen etwa $p_1^* = 17$, $p_2^* = 13$, somit $n = -2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 13 \cdot p^* = -6630\, p^*$. Aus den auf die Primzahlen 5, 3, 17 und 13 bezüglichen Restklassen-Bedingungen ergibt sich dann $\left(\frac{p^*}{5}\right) = -1$, $\left(\frac{p^*}{3}\right) = +1$, $\left(\frac{p^*}{17}\right) = +1$, $\left(\frac{p^*}{13}\right) = +1$; in Einklang damit wollen

[30]) Es ist dabei belanglos, ob $g > 0$ oder $g = 0$ ist, so daß auch der letztere Fall des Fehlens wesentlicher Primzahlen (vgl. Anm. 27 und § 5) hier mit inbegriffen erscheint.

wir z. B. $p^* \equiv 2 \pmod 5$, $p^* \equiv 1 \pmod 3$, $p^* \equiv 4 \pmod{17}$, $p^* \equiv 1 \pmod{13}$ also — wegen $p^* \equiv 5 \pmod 8$ —

$$p^* \equiv 157 \pmod{8 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 13 = 26520}$$

ansetzen. Für p^* können wir dann irgendeine der unendlich vielen, dieser Kongruenz genügenden Primzahlen, z. B. 157 oder 53197, nehmen und erhalten dann mit $n = -6630\,p^*$ eine Simony-Kette der gewünschten Art.

§ 4.

Fälle ohne accessorische Primzahlen.

14. Wir kommen nun zu dem in § 3 beiseite gelassenen Fall (vgl. Nr. 10), daß die Menge $\mathfrak{P}^*$ der accessorischen Primzahlen leer ist ($c^* = 0$). Liegt dieser Fall vor, dann entfallen in dem System (7) von notwendigen und hinreichenden Bedingungen die Bedingungen (7, d) und in den übrigen Bedingungen, deren Anzahl gemäß (8) bis (12) durch

$$a = g = \alpha + \gamma + \beta + \delta + \beta' + \delta' \tag{16}$$

gegeben ist, entfällt das letzte über die Primzahlen p_ν^* erstreckte Produkt. Die Feststellung, ob für gegebene ϱ, σ, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ diese Bedingungen sämtlich erfüllt sind und demgemäß die Zahl

$$n = (-1)^\varrho\, 2^\sigma PQR \tag{17}$$

ein zugehöriges Paar L_n, L_n' liefert, läßt sich natürlich in jedem einzelnen Fall ohne weiteres durch Einsetzen in die Bedingungen (7, a), (7, b), (7, c) treffen, da diese Bedingungen wegen des Fortfallens der accessorischen Primzahlen nur gegebene und keine frei verfügbaren Elemente enthalten. Insofern liegt ein Problem nicht vor. Immerhin läßt sich mittels einer entsprechenden Klassifikation eine gewisse Übersicht darüber gewinnen, in welchen Fällen zu dem durch (17) gegebenen Wert von n ein zu ϱ, σ, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ gehöriges Paar von Simony-Figuren L_n, L_n' existiert, und in welchen Fällen nicht.

15. Zu dieser Klassifikation gelangen wir, wenn wir unterscheiden, ob nach dem Modul 2 die Zahlen d, d' einander kongruent sind oder nicht; ferner ob nach dem Modul 2 die Zahlen γ und $\beta + \beta'$ einander kongruent sind oder nicht. Im ganzen gibt das vier Fälle:

I) $d' \equiv d$, $\gamma \equiv \beta + \beta'$; II) $d' \equiv d$, $\gamma \equiv \beta + \beta' + 1$; III) $d' \equiv d + 1$, $\gamma \equiv \beta + \beta'$; IV) $d' \equiv d + 1$, $\gamma \equiv \beta + \beta' + 1$

(alle Kongruenzen modulo 2).

Für jeden dieser Fälle wollen wir die Anzahlbedingung (13) aufstellen, wobei wegen des Fehlens accessorischer Primzahlen $\gamma^* = 0$ zu setzen ist und im übrigen für $x = d + d'$ von der Kongruenz $\frac{1}{2}x(x-1) \equiv [\frac{1}{2}x] \pmod 2$

Gebrauch gemacht werden soll, hierbei unter $[\frac{1}{2}x]$ die größte ganze Zahl in $\frac{1}{2}x$ verstanden. Man erhält dann in den einzelnen vier Fällen

(18, I) $$0 \equiv b + [\tfrac{1}{2}(d + d')] \pmod 2,$$

(18, II) $$\sigma \equiv b + [\tfrac{1}{2}(d + d')] \pmod 2,$$

(18, III) $$\varrho + 1 \equiv b + [\tfrac{1}{2}(d + d')] \pmod 2,$$

(18, IV) $$\sigma + \varrho + 1 \equiv b + [\tfrac{1}{2}(d + d')] \pmod 2.$$

Der Fall I unterscheidet sich von den übrigen Fällen dadurch, daß keine der Zahlen ϱ, σ in der Anzahlbedingung auftritt, so daß diese nur von den Mengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ abhängt. Man erhält hier die Aussage:

Satz 6. *Sind die Primzahlmengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ derart gewählt, daß für die zugehörigen Anzahlen d, d', b, γ, β, β' nach dem Modul 2 die Konvergenzen*

$$d' \equiv d, \quad \gamma \equiv \beta + \beta', \quad 1 \equiv b + [\tfrac{1}{2}(d + d')]$$

gelten, dann wird, wie immer man ϱ (Drehungssinn) und σ (Knoten oder Kette) wählen mag, die gemäß (17) *— d. h. ohne accessorische Primzahlen — bestimmte Zahl n niemals auf ein zugehöriges Paar von Simony-Figuren L_n, L'_n führen.*

16. Im übrigen sei an die Bemerkung am Schluß von Nr. 8 angeknüpft, die sich auf ein System notwendiger und hinreichender Bedingungen dafür bezieht, daß zu vorgegebenen ϱ, σ, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ ein zugehöriges Paar L_n, L'_n existiert: Ein solches System von Bedingungen wird gegeben durch die Anzahlbedingung und die Restklassen-Bedingungen nach Weglassung einer von ihnen.

Danach aber läßt sich eine Übersicht über alle Gesamtheiten ϱ, σ, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, für welche zugehörige Paare L_n, L'_n ohne accessorische Primzahlen existieren, nach dem folgenden Verfahren gewinnen, bei dem wir nur den Fall, daß alle drei Mengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ leer sind, beiseite lassen, da dieser in § 5 gesondert besprochen wird. Das Verfahren besteht darin, daß hinsichtlich der Mengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ vorerst gar nicht die in ihnen enthaltenen Primzahlen selbst betrachtet werden, sondern nur die Anzahlen

(19) $$\alpha,\ \gamma,\ \beta,\ \delta,\ \beta',\ \delta',$$

also nur die Anzahlen der Primzahlen, die in diesen Mengen enthalten sind, nebst der Art der Verteilung auf die Restklassen mod. 8. Diese Anzahlen denken wir uns zusammen mit den Zahlen ϱ, σ auf alle möglichen Arten so gewählt, daß die Anzahlbedingung (18) erfüllt ist[31]).

[31]) Wie schon in Nr. 15 besprochen, handelt es sich dabei im Fall I um eine nur die Anzahlen (19) betreffende Bedingung: ist die Bedingung (18, I) erfüllt, so sind bezüglich der Wahl von ϱ und σ alle vier Möglichkeiten zulässig, die sich durch $\varrho = 0$

In dem besonderen Falle nun, daß die durch (16) gegebene Anzahl a der Restklassen-Bedingungen (7) gleich 1 ist, brauchen wir uns mit diesen Bedingungen überhaupt nicht mehr zu befassen, da ja dann nur eine einzige Restklassen-Bedingung vorliegt und diese — zufolge der Bemerkung am Schluß von Nr. 8 — zugleich mit der ihr äquivalenten Anzahlbedingung erfüllt ist. Man braucht dann nur die Primzahlen der Mengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ im Einklang mit den Anzahlen (19) zu wählen. Sei beispielsweise $\gamma = 1$, alle anderen Zahlen (19) gleich 0 genommen, was $b = 1$, $d = d' = 0$ ergibt und, da der Fall II von Nr. 15 vorliegt, gemäß (18, II) auf $\sigma = 1$ führt. Die Zahl ϱ können wir im Fall II beliebig $= 0$ oder 1 wählen. Nunmehr steht es uns frei, die eine zu $\mathfrak{P}$ gehörige Primzahl p — gemäß $\gamma = 1$ — gleich einer ganz beliebigen Primzahl $\equiv 5 \pmod 8$ zu setzen: stets wird die gemäß (17) bestimmte Zahl $n = (-1)^{\varrho} 2p = \pm 2p$ auf ein Paar von Simony-Ketten L_n, L'_n mit p als einziger singulärer Primzahl für L_n und für L'_n führen.

Liegt aber der Fall $a > 1$ vor, dann mögen von den a Primzahlen alle bis auf eine, die wir die „restierende" nennen, gewählt werden[32]), natürlich in entsprechenden Restklassen modulo 8. Es sind dann $a - 1$ Primzahlen der Mengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ festgelegt (wir nennen sie die „vorausgewählten" Primzahlen und bezeichnen ihr Produkt mit V), während von der einen restierenden Primzahl, die wir w nennen wollen, nur feststeht, welcher der Mengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ und welcher Restklasse mod. 8 sie angehören soll. Wegen der bereits erfüllten Anzahlbedingung brauchen wir uns dann gemäß der obenerwähnten Bemerkung am Schluß von Nr. 8 nicht um alle a Restklassen-Bedingungen (7, a), (7, b), (7, c) zu kümmern, sondern wir können eine von ihnen weglassen, da sie von selbst erfüllt ist, sofern die übrigen $a - 1$ erfüllt sind. Wir wollen nun diejenige Bedingung weglassen, die sich auf die restierende Primzahl w bezieht. In jeder der übrigen Restklassen-Bedingungen sind dann alle Größen bekannt bis auf das darin auftretende Restsymbol von einer der Gestalten $\left(\frac{w}{p}\right)$, $\left(\frac{w}{q}\right)$, $\left(\frac{w}{r}\right)$, wobei p, q, r alle „vorausgewählten" Primzahlen aus $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ zu durchlaufen hat. Diese letzteren Restsymbole können also aus den Restklassen-Bedingungen berechnet werden; im Einklang mit diesen Werten der Restsymbole kann nun bezüglich jeder der vorausgewählten Primzahlen eine bestimmte Restklasse für w gewählt werden. Da außerdem bekannt ist, welcher Restklasse modulo 8 die Primzahl w anzugehören hat, so ergibt sich aus alledem für w eine Restklasse mod. $8V$. Jedwede Primzahl aus dieser Restklasse

---

oder 1 und $\sigma = 0$ oder 1 ergeben. Dagegen ist in den anderen Fällen II, III, IV die zugehörige Bedingung (18) derart, daß von den genannten vier Möglichkeiten bezüglich ϱ und σ immer nur zwei zulässig sind, im Fall II beispielsweise ϱ beliebig, hingegen σ durch die Anzahlen (19) festgelegt ist.

[32]) Die Überlegungen verlaufen ähnlich wie die in Nr. 13.

kann dann für w genommen werden und führt auf ein System von Mengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, das zusammen mit den gewählten Werten von ϱ, σ ein Paar von Simony-Figuren ohne accessorische Primzahlen liefert.

Als Beispiel wählen wir den Fall $\gamma = 1$, $\beta = 2$, $\delta' = 1$, $\alpha = \delta = \beta' = 0$, also $c = 1, d = 2, d' = 1, b = 3, a = 4$. Wir wählen die eine Primzahl aus $\mathfrak{P}$ (im Einklang mit $\gamma = 1$ muß sie $\equiv 5$ modulo 8 sein) gleich 5, ferner die eine Primzahl aus $\mathfrak{R}$ (im Einklang mit $\delta' = 1$ muß sie $\equiv 7$ modulo 8 sein) gleich 7, schließlich eine von den beiden Primzahlen aus $\mathfrak{Q}$ (die wegen $\beta = 2$ beide $\equiv 3$ modulo 8 sein müssen) gleich 3; als „vorausgewählte" Primzahlen haben wir also $p = 5$, $q_1 = 3$, $r = 7$; für die noch „restierende" Primzahl $w = q$ haben wir $q \equiv 3$ (mod. 8). Ersichtlich ist $d' \not\equiv d$, $\gamma \not\equiv \beta + \beta'$, es liegt also Fall IV aus Nr. 15 vor und die Anzahlbedingung (18, IV) gibt $\sigma \not\equiv \varrho$ (mod. 2), also $\varrho = 1 - \sigma$. Gemäß (17) wird somit $n = -(-2)^\sigma 105\, q$ und von den Restklassen-Bedingungen (7) lauten die drei auf die vorausgewählten Primzahlen 5, 3 und 7 bezüglichen

$$1 = -\left(\frac{-2}{5}\right)^\sigma \left(\frac{21}{5}\right)\left(\frac{q}{5}\right), \quad 1 = -\left(\frac{-2}{3}\right)^\sigma \left(\frac{35}{3}\right)\left(\frac{q}{3}\right), \quad 1 = +\left(\frac{-2}{7}\right)^\sigma \left(\frac{15}{7}\right)\left(\frac{q}{7}\right),$$

woraus sich

$$\left(\frac{q}{5}\right) = (-1)^{\sigma+1}, \quad \left(\frac{q}{3}\right) = +1, \quad \left(\frac{q}{7}\right) = (-1)^\sigma$$

ergibt. Nehmen wir etwa den Fall $\sigma = 0$ (Simony-Knoten), also $\varrho = 1$ und $n = -105\, q$, so sehen wir, daß $q \equiv 2$ oder 3 (mod. 5) und $\equiv 1$, 2 oder 4 (mod. 7) ferner $\equiv 1$ (mod. 3), außerdem $\equiv 3$ (mod. 8) und daß daher die Primzahl q modulo $5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 8 = 840$ einer der Zahlen 43, 67, 163, 403, 547, 667 kongruent sein muß. Man braucht also für q nur eine Primzahl aus einer dieser Restklassen mod. 840 zu wählen und man erhält dann für $n = -105\, q$ einen Simony-Knoten L_n ohne accessorische Primzahlen mit 5, 3 und q als singulären Primzahlen von L_n, und 5, 7 als singulären Primzahlen von L_n'. — Analog ergibt sich im Fall $\sigma = 1$, also $\varrho = 0$ und $n = +210\, q$, daß man für jede Primzahl q, die modulo 840 einer der Zahlen 19, 139, 451, 619, 691, 811 kongruent ist, eine Simony-Kette L_n ohne accessorische Primzahlen erhält, bei der 5, 3, q die singulären Primzahlen von L_n und 5, 7 jene von L_n' sind.

§ 5.

Simony-Knoten und -Ketten ohne singuläre Primzahlen.

17. Wir wollen noch den Fall besonders besprechen, daß alle drei Mengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ leer sind, also die gemäß (11) bestimmte Zahl $g = 0$ ist.

Zunächst ist klar, daß wir in diesem Fall (bei beliebiger Wahl von ϱ und σ) ein zugehöriges Paar von Simony-Figuren erhalten, wenn wir gar keine accessorischen Primzahlen nehmen ($\mathfrak{P}^*$ leer, $c^* = 0$), da sich dann überhaupt keine Restklassen-Bedingungen (7) ergeben, die zu befriedigen wären. Die zugehörigen Werte von n sind dann ± 1 und ± 2 und liefern das Paar von

Simony-Knoten L_1, $L_{-1} = L_1'$ und das Paar von Simony-Ketten L_2, $L_{-2} = L_2'$[33]).

Bei Heranziehung accessorischer Primzahlen ist für jede solche Primzahl p^* gemäß (7, d) eine zugehörige Restklassen-Bedingung

$$(20) \qquad 1 = \left(\frac{2}{p^*}\right)^{\sigma} \Pi' \left(\frac{p_\nu^*}{p^*}\right)$$

zu erfüllen; dabei läßt sich, gemäß der Schlußbemerkung von Nr. 8, eine dieser Bedingungen (20) durch die „Anzahlbedingung" ersetzen, die jetzt einfach die Gestalt

$$(21) \qquad 0 \equiv \sigma\, \gamma^* \pmod 2$$

annimmt.

Wird also die Anzahl c^* der accessorischen Primzahlen $= 1$ genommen, so ist überhaupt nur die eine Bedingung (21) zu befriedigen. Demgemäß erhält man im Falle $\sigma = 0$ bzw. $\sigma = 1$ stets ein Paar Simony-Knoten L_n, L_n' bzw. ein Paar Simony-Ketten L_n, L_n' ohne singuläre Primzahlen, wenn man $n = \pm p^*$ bzw. $n = \pm 2\, p^*$ nimmt, hierbei unter p^* eine beliebige Primzahl $\equiv 1 \pmod 4$ bzw. eine beliebige Primzahl $\equiv 1 \pmod 8$ verstanden.

Wird aber $c^* > 1$ genommen, $h = c^* - 1$ gesetzt und werden die zu bestimmenden accessorischen Primzahlen mit $p_1^*, \ldots, p_h^*, p_{h+1}^* = p^*$ bezeichnet, so kann wie in § 3, Nr. **13** verfahren werden: Es werden α^*, γ^* so gewählt, daß $\alpha^* + \gamma^* = c^*$ gilt und (21) erfüllt ist (was nur für γ^* und nur im Falle $\sigma = 1$ eine Beschränkung der Wahl bedeutet). Im Einklang mit dieser Bestimmung von α^*, γ^* werde für jede Primzahl p_ν^* festgelegt, ob sie $\equiv 1$ oder $\equiv 5 \pmod 8$ gewählt werden soll. Dieser Festlegung entsprechend werden dann analog wie in Nr. **13** (vgl. Anm. 30) in einem ersten Schritt die Primzahlen $p_1^*, \ldots, p_h^*$ „vorausgewählt", worauf wie l. c. für die Bestimmung der „restierenden" Primzahl p^* in einem zweiten Schritt des Verfahrens die Wahl aus $\frac{1}{2^h} \prod_{\nu=1}^{\nu=h} (p_\nu^* - 1)$ Restklassen mod. $8\, p_1^* \ldots p_h^*$ freisteht.

Beispielsweise werde $c^* = 2$, $h = 1$ genommen. Für $\sigma = 1$ (Simony-Ketten) gibt das für α^*, γ^* die Bedingungen $\gamma^* \equiv 0 \pmod 2$, $\alpha^* + \gamma^* = 2$. Wir wählen etwa $\gamma^* = 0$, $\alpha^* = 2$, somit $p_1^* \equiv p^* \equiv 1 \pmod 8$ und erhalten, wenn wir $p_1^* = 17$ wählen, gemäß (20) die Bedingung $1 = \left(\frac{2}{p_1^*}\right)^{\sigma} \left(\frac{p^*}{p_1^*}\right) = \left(\frac{p^*}{17}\right)$, der — ebenso wie der Bedingung $p^* \equiv 1 \pmod 8$ — z. B. durch die Primzahl $p^* = 89$ genügt wird, so daß $n = \pm 2 \cdot 17 \cdot 89 = \pm 3026$ auf ein Paar Simony-Ketten L_n, L_n' ohne singuläre Prim-

---

[33]) Ohne singuläre Primzahlen ist auch die Simony-Kette L_0 (vgl. Anm. 17). Übrigens sind L_1 und L_1', desgleichen L_2 und L_2' topologisch nicht voneinander verschieden. Die Bezeichnungen Simony-„Kette" bzw. Simony-„Knoten" sind bei L_n für $n = 0$ bzw. $n = 1$ natürlich insofern unzutreffend, als L_0 unverkettet, L_1 unverknotet ist.

zahlen führt. Für $\sigma = 0$ (Simony-Knoten) dagegen wären α^*, γ^* nur an $\alpha^* + \gamma^* = c^* = 2$ gebunden, und wenn man $\alpha^* = \gamma^* = 1$, $p_1^* \equiv 5$, $p^* \equiv 1 \pmod 8$ und speziell $p_1^* = 5$ wählt, dann ist gemäß (20) die Bedingung $\left(\frac{p^*}{5}\right) = 1$, also $p^* \equiv 1$ oder $4 \pmod 5$, somit $p^* \equiv 1$ oder $9 \pmod{40}$ zu erfüllen, so daß z. B. $p^* = 41$, $n = \pm 5 \cdot 41 = \pm 205$ ein Paar Simony-Knoten L_n, L_n' ohne singuläre Primzahlen liefert.

18. Gruppentheoretische Betrachtungen ergeben bekanntlich, daß die Figur L_n für jedes $n > 1$ bei ungeradem n verknotet, bei geradem n verkettet ist, sowie daß sie für $n > 2$ allemal von ihrem Spiegelbild L_n' verschieden ist. Man mag, um die Tragweite der in vorliegender Note herangezogenen Reidemeisterschen Methode am Beispiel der speziellen Simony-Figuren zu beurteilen, die Frage nach der Häufigkeit jener Werte n stellen, für welche zu L_n wenigstens eine singuläre Primzahl gehört; ebenso nach der Häufigkeit derjenigen Werte n, für welche die Menge der singulären Primzahlen von L_n verschieden ist von der entsprechenden Menge für L_n', derart, daß aus der Betrachtung der singulären Primzahlen die topologische Verschiedenheit von L_n und L_n' erhellt (vgl. Nr. 1). Da es sich, wie die vorausgegangenen Entwicklungen zeigen, bei den Werten n, die eine dieser Forderungen erfüllen oder sie nicht erfüllen, stets um unendliche Mengen von Werten n handelt, so sind die erwähnten (übrigens im Wesen rein zahlentheoretischen) Häufigkeitsfragen im asymptotischen Sinn zu verstehen. So kann bezüglich der zuletzt erwähnten Häufigkeit zunächst folgende Frage gestellt werden: Was läßt sich über Vorhandensein bzw. Wert von $\lim \frac{A(N)}{N}$ sagen, wenn $A(N)$ die Anzahl derjenigen positiven Werte $n \leqq N$ bedeutet, für welche L_n und L_n' in den singulären Primzahlen nicht übereinstimmen? Doch wollen wir uns mit der Erwähnung dieser Fragen bescheiden[34]).

[34]) Wegen einiger zahlenmäßiger Stichproben vgl. l. c.[13]), Nr. 9, S. 61.

(Eingegangen am 6. Januar 1943.)

Über extremale Punktverteilungen in ebenen Gebieten.

Von

H. Hadwiger in Bern.

Es bezeichne G ein ebenes, zusammenhängendes Gebiet mit dem JORDANschen Flächeninhalt F und der Randkurvenlänge L. Wir studieren nachfolgend Verteilungen V_n von n Punkten in G, wo die Punkte von V_n im Innern oder auf dem Rand von G liegen können. Für eine feste Verteilung V_n sei $d(V_n)$ die kleinste Distanz, die unter den $\binom{n}{2}$ Distanzen der Punktepaare von V_n festgestellt werden kann. Wir betrachten weiter die obere Schranke

$$d_n = \text{fin sup}\, d(V_n) \tag{1}$$

aller kleinsten Distanzen bei festem n bezogen auf die Menge aller Verteilungen V_n. Die Extremaldistanz d_n wird offenbar durch eine oder mehrere extremale V_n realisiert. Während der exakte Wert von d_n offensichtlich durch die Gestalt von G wesentlich beeinflußt wird, zeigt es sich, daß d_n in erster Näherung für große n als Funktion der Fläche F und der Randlänge L des Gebietes G dargestellt werden kann. In einer kürzlich erschienenen Note hat L. FEJES[1]) die asymptotische Relation

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, d_n = \sqrt{\frac{2F}{\sqrt{3}}} \tag{2}$$

nachgewiesen. Ziel dieser Arbeit ist es, für jedes endliche $n > 2$ eine Abschätzung für d_n nach oben und nach unten herzuleiten. Es gilt für $n > 2$

$$\sqrt{\frac{2F}{\sqrt{3}\,n}} \leqq d_n \leqq \frac{\sqrt{3}\,L + \sqrt{3\,L^2 + 6\,(3\sqrt{3}\,n + 2\pi - 6\sqrt{3})\,F}}{3\sqrt{3}\,n + 2\pi - 6\sqrt{3}}. \tag{3}$$

Geeignete einfache Umrechnungen[2]) ergeben noch

$$\sqrt{\frac{2F}{\sqrt{3}}} \leqq \sqrt{n}\, d_n < \sqrt{\frac{2F}{\sqrt{3}}} + \frac{L + \sqrt{\sqrt{3}\,F}}{\sqrt{n}}, \tag{4}$$

eine Abschätzung, aus der sich die Formel (2) von L. FEJES ergibt.

Zum Beweis der linksseitigen Ungleichung von (3) gehen wir von einer bekannten Mittelwertformel für bewegte Gebiete im Punktgitter aus, die darlegt, daß die mittlere Anzahl der vom Gebiet G bedeckten Gitterpunkte

---

[1]) L. FEJES, Über einen geometrischen Satz. Math. Zeitschr. 46 (1940), S. 83–85.

[2]) Es werden die Ungleichungen

$$\sqrt{a+b} \leqq \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad n \geqq 3, \quad \frac{6\sqrt{3} - 2\pi}{3\sqrt{3}} < 1$$

z. T. mehrmals verwendet.

im wesentlichen durch den Flächeninhalt F von G gegeben ist. Bezeichnet T den Flächeninhalt des Fundamentalparallelogramms des Punktgitters, $\bar{N}$ den mittleren Wert der Bedeckungszahl N von G im Gitter, so gilt [3])

$$\bar{N} = \frac{F}{T}. \tag{5}$$

Wählen wir nun speziell ein rhombisches, $\frac{\pi}{3}$-winkliges Punktgitter der Elementardistanz

$$a = \sqrt{\frac{2F}{\sqrt{3}\,n}}, \tag{6}$$

so wird

$$T = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{F}{n},$$

und somit

$$\bar{N} = n. \tag{7}$$

Da die größte in Betracht fallende Bedeckungszahl N gewiß nicht kleiner sein kann als der Mittelwert, wird es eine Lage von G geben, so daß $N \geqq n$ ausfällt. Jedenfalls enthält dann G n Punkte des oben bezeichneten rhombischen Gitters, und für diese Punktverteilung V_n gilt offenbar

$$a \leqq d(V_n),$$

so daß der erste Teil der Behauptung (3)

$$\sqrt{\frac{2F}{\sqrt{3}\,n}} \leqq d_n \tag{8}$$

unmittelbar folgt.

Wir wenden uns jetzt der rechtsseitigen Ungleichung von (3) zu. Der Nachweis wird sich leicht auf Grund zweier Feststellungen betreffend den Flächeninhalt der ϱ-Umgebung spezieller Punktmengen ergeben. Unter der ϱ-Umgebung einer ebenen Punktmenge verstehen wir die Vereinigungsmenge der offenen Kreise vom Radius ϱ, die um sämtliche Punkte der Menge (als Mittelpunkte) gelegt werden.

Zunächst kann folgende Feststellung gemacht werden:

Ist $\Phi(\varrho)$ der Flächeninhalt der ϱ-Umgebung des Gebietes G, so gilt die Ungleichung

$$\Phi(\varrho) \leqq F + L\,\varrho + \pi\,\varrho^2. \tag{9}$$

---

[3]) Vgl. die wesentlich allgemeinere Formel für Bewegung eines Gebietes in einem Gebietsgitter bei H. Hadwiger, Über Mittelwerte im Figurengitter. Comment. math. helv. 11 (1938/39), S. 221–233, bes. S. 223. Es handelt sich um eine Übertragung der Hauptformel der ebenen Integralgeometrie von W. Blaschke auf Figuren, welche eine Gruppe gestatten. Eine noch allgemeinere Formel gab L. A. Santaló, Geometria integral de figuras ilimitadas. Publicaciones del instituto de matematicas (Rosario 1939), Vol. 1, Nr. 2.

Im Falle konvexer Gebiete gilt bekanntlich das Gleichheitszeichen und es handelt sich um die Formel von J. STEINER[4]) für den Flächeninhalt sogenannter Parallelbereiche.

Die zweite Feststellung bezieht sich auf die ϱ-Umgebung einer endlichen Menge, deren Punkte einander nicht beliebig nahe kommen dürfen.

Es sei V_n eine Verteilung von n Punkten, von denen nicht zwei eine Entfernung $< d$ haben sollen, so daß $d(V_n) \geqq d$ gilt. Es bezeichne $\chi(\varrho)$ den Flächeninhalt der ϱ-Umgebung der Punkte von V_n. Ist

$$d \leqq 2\varrho \leqq \sqrt{2}\, d, \tag{10}$$

und setzt man

$$d = 2\varrho \cos\theta, \tag{11}$$

so gilt für $n > 2$

$$\chi(\varrho) \geqq \{n\pi - (3n - 6)(2\theta - \sin 2\theta)\}\varrho^2. \tag{12}$$

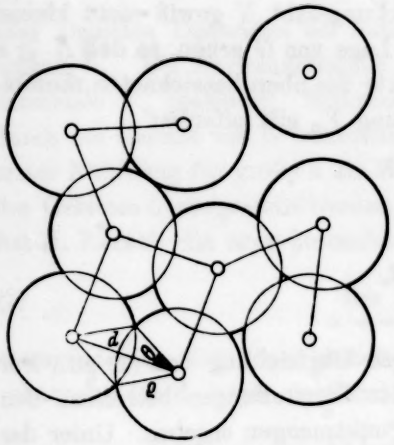

Fig. 1.

Wählt man in (11) speziell $d = \sqrt{3}\,\varrho$, also $\theta = \frac{\pi}{6}$, so ergibt sich

$$\chi\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right) \geqq \left(\frac{3\sqrt{3}\,n + 4\pi - 6\sqrt{3}}{6}\right) d^2. \tag{13}$$

Den Nachweis für (12) bzw. (13) erbringen wir so: Wir verbinden zwei Punkte von V_n durch eine Strecke, wenn die um die beiden Punkte gezogenen Kreise vom Radius ϱ gemeinsame innere Punkte haben (vgl. hierzu die Figur). Auf diese Weise entstehe ein Streckenkomplex mit n Punkten und s Strecken. Dieser Streckenkomplex liegt nun in der Ebene schlicht, d. h. zwei Strecken des Komplexes überschneiden sich nicht gegenseitig. Andernfalls müßten nämlich vier Punkte der Verteilung V_n ein konvexes Viereck bilden, dessen Diagonalen beide $< 2\varrho$, also mit Rücksicht auf (10) beide $< \sqrt{2}\, d$ wären, während die vier Seiten nach dem Distanzverbot alle $\geqq d$ sein sollten, was mit einem elementar-geometrischen Sachverhalt im Widerspruch steht. Für einen schlichten Streckenkomplex auf einer Fläche vom Geschlecht Null gilt

$$s \leqq 3n - 6 \quad (n > 2). \tag{14}$$

[4]) J. STEINER gab die entsprechende Formel für dreidimensionale konvexe Gebiete: Über parallele Flächen. Monatsber. der Akad. d. Wiss. Berlin 1840, S. 114–118.

Dies kann so bewiesen werden, daß man zunächst geeignete nicht notwendig geradlinige „Strecken" so hinzufügt, daß die Ebene in lauter „Dreiecke" zerlegt wird (derjenige Teil, der den unendlich fernen Punkt der Ebene enthält, soll auch von drei Strecken berandet sein, und als Dreieck zählen). Der so erzeugte Streckenkomplex enthalte n Punkte, k Strecken und f Dreiecke. Nach dem EULERschen Polyedersatz gilt dann[5]) $n - k + f = 2$, und wegen $3f = 2k$ rechnet man $k = 3n - 6$, und schließt mit $s \leqq k$ auf (14).

Wird nun zur Bildung der ϱ-Umgebung um jeden Punkt von V_n ein Kreis vom Radius ϱ gezogen, so enthält die entstehende Figur offenbar s Überdeckungssegmente benachbarter Kreise. Der Flächeninhalt eines derartigen Segmentes ist mit Rücksicht auf das Distanzverbot und auf Relation (11) nicht größer als $(2\,0 - \sin 2\,0)\,\varrho^2$. So ergibt sich für den Flächeninhalt der ϱ-Umgebung der Punkte von V_n die Abschätzung

$$\chi(\varrho) \geqq n\pi\varrho^2 - s(2\,0 - \sin 2\,0)\,\varrho^2, \tag{15}$$

und wird jetzt noch (14) berücksichtigt, so erhält man (12).

Zum Beweise der rechtsseitigen Ungleichung von (3) gehen wir von einer beliebigen Verteilung V_n von n Punkten im Gebiet G aus, und setzen $d = d(V_n)$ (kleinste in V_n auftretende Distanz zweier Punkte). Da die ϱ-Umgebung der Punkte von V_n als Teil in der ϱ-Umgebung des Gebietes G enthalten ist, gilt mit der früher gewählten Bezeichnung für ihre Flächeninhalte die Beziehung

$$\chi(\varrho) \leqq \Phi(\varrho).$$

Setzen wir speziell $\varrho = \frac{d}{\sqrt{3}}$, so sind die notwendigen Voraussetzungen für die Anwendung der Abschätzung (13) erfüllt, und mit gleichzeitiger Verwertung von (9) gewinnt man zunächst

$$\left(\frac{3\sqrt{3}n + 4\pi - 6\sqrt{3}}{6}\right) d^2 \leqq F + \frac{L}{\sqrt{3}} d + \frac{\pi}{3} d^2,$$

oder

$$d \leqq \frac{\sqrt{3}L + \sqrt{3L^2 + 6(3\sqrt{3}n + 2\pi - 6\sqrt{3})F}}{3\sqrt{3}n + 2\pi - 6\sqrt{3}}. \tag{16}$$

Da die Ungleichung (16) für jede Verteilung V_n Gültigkeit hat, kann d durch die obere Schranke d_n ersetzt werden. Damit ist der Beweis der in Frage stehenden Relation erbracht.

---

[5]) Vgl. D. KÖNIG, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig 1936. S. 196.

(Eingegangen am 26. Januar 1943.)

Über gewisse trigonometrische Integrale. II.

Von

Hans Hornich in Wien.

In der ersten Mitteilung[1]) wurde, ausgehend von der charakteristischen Funktion eines Intervalls, durch iterierte Mittelbildungen eine Folge von Funktionen gebildet und deren Grenzverhalten untersucht. Für den Fall der Konvergenz sollen nun die Grenzfunktionen weiter untersucht werden. Man erhält dabei eine Klasse von Verteilungsfunktionen, die von unendlich vielen Konstanten abhängen; sie haben sehr viele Ähnlichkeit mit den Gaussschen Funktionen — es gilt auch für sie der Faltungssatz —, sie enthalten aber die Gaussschen Funktionen nicht. Dies ist bemerkenswert im Hinblick auf so viele Grenzsätze der Verteilungsfunktionen, die auf die Gaussschen Funktionen hinführen.

Wir betrachten die trigonometrischen Integrale

$$(1) \qquad \Psi(a_1, a_2, \ldots; t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \prod_{i=1}^\infty \frac{\sin a_i x}{a_i x} \cos 2xt \, dx,$$

wo die a_i eine Folge positiver Zahlen mit konvergenter Summe $\sum_{i=1}^\infty a_i^2$ seien. Unter dieser Voraussetzung sind die Ψ nicht identisch verschwindende, unbeschränkt differenzierbare Funktionen von t und es ist

$$\Psi(a_1, a_2, \ldots; t) = \Psi(a_1, a_2, \ldots; -t) \geqq 0$$
$$\Psi'(a_1, a_2, \ldots; t) \geqq 0 \qquad \text{für } t \leqq 0.$$

also

$$\Psi(a_1, a_2, \ldots; 0) = \operatorname*{Max}_t \Psi(a_1, a_2, \ldots; t).$$

Es ist ferner, und zwar gleichmäßig für alle t:

$$(2) \qquad \Psi(a_1, a_2, \ldots; t) = \lim_{k \to \infty} \Psi_k(a_1, a_2, \ldots, a_k; t);$$

dabei ist

$$\Psi_1(a_1; t) = \frac{1}{a_1} \quad \text{für} \quad |t| < \frac{a_1}{2},$$
$$= \frac{1}{2a_1} \quad \text{für} \quad |t| = \frac{a_1}{2},$$
$$= 0 \quad \text{für} \quad |t| > \frac{a_1}{2},$$

[1]) Math. Zeitschr. 48 (1942), S. 785.

und durch Mittelbildung

$$(3)\qquad \Psi_{k+1}(a_1, a_2, \ldots a_{k+1}; t) = \frac{1}{a_{k+1}} \int_{-\frac{a_{k+1}}{2}}^{\frac{a_{k+1}}{2}} \Psi_k(a_1, a_2, \ldots a_k; t+\tau)\, d\tau.$$

Für die Funktionen Ψ_k gilt der Faltungssatz:

$$(4)\qquad \Psi_{i+k}(a_1, a_2, \ldots a_{i+k}; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_i(a_1, a_2, \ldots a_i; t-\tau)\, \Psi_k(a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots a_{i+k}; \tau)\, d\tau.$$

Wir geben zunächst einige *Abschätzungen*.

Es ist für die ev. nur einseitig vorhandenen r-ten Ableitungen mit $r \leqq k-1$

$$(5)\qquad |\Psi_k^{(r)}(a_1, a_2, \ldots a_k; t)| \leqq \frac{2^r}{a_1 a_2 \ldots a_{r+1}}.$$

Man zeigt zunächst die Abschätzung für $k = r+1$; diese ist für $r = 0$ richtig und folgt durch Induktion für allgemeines r aus der k-fach differenzierten Formel (3). Für $k > r+1$ folgt die Abschätzung dann sofort etwa mit Hilfe von (3).

Aus (5) folgt dann ohne weiteres wegen der Konvergenz auch der Ableitungen

$$(6)\qquad |\Psi^{(r)}(a_1, a_2, \ldots; t)| \leqq \frac{2^r}{a_1 a_2 \ldots a_{r+1}}.$$

Wir können damit den *Konvergenzradius* $\varrho(t)$ *einer eventuellen Potenzreihenentwicklung* von Ψ abschätzen. Es ist

$$(7)\qquad \varrho(t) \geqq \frac{1}{2e} \varliminf k \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}}.$$

Für hinreichend schwach konvergente Summen $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ ist dann Ψ sogar eine ganze analytische Funktion; z. B. für

$$a_\nu = \nu^{-\alpha} \quad \text{mit} \quad \tfrac{1}{2} < \alpha < 1.$$

Bei konvergenten $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ist höchstens ein stückweise analytisches Verhalten von Ψ möglich, da dann ja für $|t| \geqq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ die Funktion Ψ identisch verschwindet.

Weiter ist für $r \leqq k-4$

$$\Psi_k^{(r)}(a_1, \ldots a_k; t+\tau) - \Psi_k^{(r)}(a_1, \ldots a_k; t) = \tau \Psi_k^{(r+1)}(a_1, \ldots a_k; t) + \frac{\tau^2}{2} \Psi_k^{(r+2)}(a_1, \ldots a_k; t+\vartheta\tau),$$

woraus durch Integration nach τ von $-\frac{a_{k+1}}{2}$ bis $\frac{a_{k+1}}{2}$ mit Berücksichtigung von (3) und (5) folgt:

$$(8) \qquad \left| \Psi^{(r)}_{k+1}(a_1, \ldots a_{k+1}; t) - \Psi^{(r)}_k(a_1, \ldots a_k; t) \right| \leqq \frac{2^r a^2_{k+1}}{6\, a_1 \ldots a_{r+3}}$$

und durch Summation

$$(9) \qquad \left| \Psi^{(r)}(a_1, \ldots; t) - \Psi^{(r)}_k(a_1, \ldots a_k; t) \right| \leqq \frac{2^r}{6\, a_1 \ldots a_{r+3}} \sum_{j=1}^{\infty} a^2_{k+j},$$

was wieder den Konvergenzsatz illustriert.

Wir betrachten die n-ten „Momente“:

$$M_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n \Psi(a_1, a_2, \ldots; t)\, dt \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Wir zeigen ihre Existenz und berechnen ihre Werte.

Sei zunächst $n = 2$. Es ist für jedes i:

$$(10) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \Psi_1(a_i; t)\, dt = \frac{a_i^3}{12}.$$

Nach dem Faltungssatz (4) ist für jedes ganze k:

$$(11) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \Psi_{k+1}(a_1, \ldots a_{k+1}; t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \tau + \tau)^2 \Psi_k(a_1, \ldots a_k; t - \tau)\, \Psi_1(a_{k+1}; \tau)\, d\tau\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 \Psi_k(a_1, \ldots a_k; v)\, dv + \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^2 \Psi_1(a_{k+1}; \tau)\, d\tau = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{k+1} a_i^2.$$

Es existiert also:

$$(12) \qquad \lim_{k \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \Psi_k(a_1, a_2, \ldots a_k; t)\, dt = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2.$$

Sei $R > 0$, so ist auch

$$\int_{-R}^{+R} t^2 \Psi(a_1, a_2, \ldots; t)\, dt + 2 \lim_{k \to \infty} \int_{R} t^2 \Psi_k(a_1, a_2, \ldots a_k; t)\, dt = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2.$$

Das erste Integral ist mit wachsenden R monoton nicht abnehmend und beschränkt, also für $R \to \infty$ konvergent. Damit ist die Existenz des Integrals M_2 gezeigt und es ist:

$$(13) \qquad M_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \Psi(a_1, a_2, \ldots; t)\, dt = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2,$$

wobei rechts zunächst nur das Zeichen $\leqq$ gilt. Unabhängig davon zeigen wir die Existenz und den Wert von

$$M_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(a_1, a_2, \ldots; t)\, dt.$$

Es ist für ein $R > 0$ nach einfacher Rechnung:

$$\begin{aligned}(14)\qquad \int_0^R \Psi(a_1, a_2, \ldots; t)\, dt &= R\Psi(2R, a_1, a_2, \ldots; 0)\\ &= R\Psi_{k+1}(2R, a_1, a_2, \ldots a_k; 0) +\\ &\quad + R[\Psi(2R, a_1, a_2, \ldots; 0) - \Psi_{k+1}(2R, a_1, a_2, \ldots a_k; 0)].\end{aligned}$$

Nun ist nach (9)

$$R\,|\Psi(2R, a_1, a_2, \ldots; 0) - \Psi_{k+1}(2R, a_1, a_2, \ldots a_k; 0)| \leqq \frac{1}{12\, a_1\, a_2} \sum_{j=2}^{\infty} a_{k+j}^2,$$

also beliebig klein durch Wahl von k allein unabhängig von R.

Wählen wir, bei festem k, $2R > a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, so ist

$$\Psi_{k+1}(2R, a_1, a_2, \ldots a_k; 0) = \frac{1}{2R}$$

und es folgt für $R \to \infty$ aus (14)

$$(15)\qquad M_0 = 1.$$

Wenden wir nun den Faltungssatz (4) und (11) auf die Funktion $\Psi(a_1, \ldots; t)$ an, so folgt daraus die angegebene Formel (13).

Wir können daher die Integrale $\int_{-\infty}^{t} \Psi(a_1, a_2 \ldots; \tau)\, d\tau$ *als Verteilungsfunktionen ansehen.*

Nun die allgemeinen Momente M_{2n} Setzen wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} \Psi_k(a_1, a_2, \ldots a_k; t)\, dt = M_{2n}(a_1, a_2, \ldots a_k),$$

so ist mit derselben Umformung wie bei $n = 1$ nach dem binomischen Satz

$$\begin{aligned}(16)\quad M_{2n}(a_1, a_2, \ldots a_{k+1}) &= M_{2n}(a_1, a_2, \ldots a_k) +\\ &+ \binom{2n}{2} M_{2n-2}(a_1, a_2, \ldots a_k)\, M_2(a_{k+1}) +\\ &+ \binom{2n}{4} M_{2n-4}(a_1, a_2, \ldots a_k)\, M_4(a_{k+1}) + \cdots + M_{2n}(a_{k+1});\end{aligned}$$

ferner ist

$$(17)\qquad M_{2j}(a_{k+1}) = \frac{a_{k+1}^{2j}}{(2j+1)\, 2^{2j}}.$$

Daraus ergibt sich zunächst durch Induktion nach n, daß bei festem n die $M_{2n}(a_1, a_2, \ldots a_k)$ beschränkt sind; ferner daß die $M_{2n}(a_1, a_2, \ldots a_k)$

für $k \to \infty$ monoton wachsen, also konvergieren, und daß schließlich — genau wie bei $n = 1$ — auch M_{2n} existiert und

$$M_{2n} = \lim_{k \to \infty} M_{2n}(a_1, a_2, \ldots a_k). \tag{18}$$

Wenden wir die Formel (16) wiederholt an und setzen schließlich nach (17) ein, so wird

$$\begin{aligned} M_{2n}(a_1, a_2, \ldots a_k) &= \sum \frac{(2n)!}{(2i_1)!\,(2i_2)! \ldots (2i_k)!} M_{2i_1}(a_1)\, M_{2i_2}(a_2) \ldots M_{2i_k}(a_k) \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum \frac{(2n)!}{(2i_1+1)!\,(2i_2+1)! \ldots (2i_k+1)!}\, a_1^{2i_1} a_2^{2i_2} \ldots a_k^{2i_k}. \end{aligned} \tag{19}$$

Die Summe ist dabei über alle k-Tupel $(i_1 i_2 \ldots i_k)$ ganzer Zahlen $\geqq 0$ mit $i_1 + i_2 + \cdots + i_k = n$ zu erstrecken. Nach (18) folgt dann für $k \to \infty$:

Der Wert der Momente M_{2n} ist:

$$M_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \sum \frac{(2n)!}{(2i_1+1)!\,(2i_2+1)! \ldots} a_1^{2i_1} a_2^{2i_2} \ldots, \tag{20}$$

wo über alle Folgen ganzer Zahlen $(i_1 i_2 \ldots)$ mit $i_j \geqq 0$ und $i_1 + i_2 + \cdots = n$ zu summieren ist.

Die angeschriebenen Produkte sind natürlich nur formal unendliche Produkte.

Die Momente ungerader Ordnung M_{2n+1} existieren gleichfalls sämtlich, ihr Wert ist stets Null.

Auf Grund der Existenz von M_0 können wir den *Faltungssatz* (4) ganz allgemein so formulieren:

Sind $\{a_i\}$ und $\{b_i\}$ zwei beliebige Zahlenfolgen, so ist

$$\Psi(a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(a_1, a_2, \ldots; t - \tau)\, \Psi(b_1, b_2, \ldots; \tau)\, d\tau. \tag{21}$$

Der Satz (4) läßt sich als Spezialisierung dieses Satzes auffassen, wenn man für die verschwindenden a_i die betreffenden Quotienten $\frac{\sin a_i x}{a_i x}$ gleich 1 setzt.

Betrachten wir noch das Moment M_4. Es ist

$$M_4 = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^4 + \frac{4!}{3!\,3!}\sum_{i<k} a_i^2 a_k^2\right] = \frac{1}{48}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2\right)^2 - \frac{1}{120}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^4$$

und daher der Exzeß

$$\varepsilon = \frac{M_4}{M_2^2} - 3 = -\frac{6}{5}\,\frac{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^4}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2\right)^2}, \tag{22}$$

der Exzeß ist also stets negativ.

Es ist daher nicht möglich, daß eine Gaußsche Funktion $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 t^2}$ durch ein Integral Ψ dargestellt wird; denn für jene Funktionen ist der Exzeß stets Null. Es lassen sich aber die Gaußschen Funktionen als Limes einer Folge von Integralen Ψ_k — allerdings mit Konstanten a_i, die mit k sich ändern — darstellen: es ist etwa[2])

$$\sqrt{\frac{6}{\pi}}\, e^{-6t^2} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{k}\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^k \cos\left(2\sqrt{k}\,t\,x\right) dx \tag{23}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \Psi_k\left(\frac{1}{\sqrt{k}}, \ldots \frac{1}{\sqrt{k}}; t\right).$$

Wir zeigen, daß durch die Funktionen Ψ die Konstanten a_i eindeutig festgelegt werden:

Ist für zwei Folgen $\{a_i\}$ und $\{b_i\}$ von positiven Zahlen mit konvergenten Summen $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ und $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2$ bei jedem t

$$\Psi(a_1, a_2, \ldots; t) = \Psi(b_1, b_2, \ldots; t), \tag{24}$$

so ist bei geeigneter Numerierung der a_i und b_i (etwa der Größe nach)

$$a_i = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{25}$$

Aus (24) folgt

$$\Psi(a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots; t) = \Psi(a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots; t) = \Psi(b_1, b_1, b_2, b_2, \ldots; t)$$

und für $t = 0$:

$$\int_0^\infty \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\sin a_i x}{a_i x} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin b_j x}{b_j x}\, dx = \int_0^\infty \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\sin^2 a_i x}{a_i^2 x^2}\, dx = \int_0^\infty \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin^2 b_j x}{b_j^2 x^2}\, dx.$$

In der Schwarzschen Ungleichung

$$\left[\int_0^\infty f g\, dx\right]^2 \leqq \int_0^\infty f^2\, dx \cdot \int_0^\infty g^2\, dx$$

kann aber das Gleichheitszeichen nur stehen, wenn $\lambda f = \mu g$ für zwei Konstante λ und μ $(\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$ gilt; es muß also

$$\lambda \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\sin a_i x}{a_i x} = \mu \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin b_j x}{b_j x} \tag{26}$$

gelten, woraus für $x = 0$ $\lambda = \mu$ und durch Betrachtung der Nullstellen von (26) auch (25) folgt.

---

[2]) Vgl. A. Sommerfeld, Boltzmann-Festschrift 1904, S. 848–859; G. Polya, Math. Annalen 74 (1913), S. 204–212.

(Eingegangen am 3. März 1943.)

Abschätzung des Fehlers bei der Tangentennäherungskonstruktion von Pirani.

Herrn Friedrich Pfeiffer zum 60. Geburtstag gewidmet.

Von

Max Müller in Tübingen.

Die Tangente an eine Kurve $\mathfrak{K}$ in einem Punkte P kann sofort konstruiert werden, wenn ihre Richtung bekannt ist. Zur Auffindung der Tangentenrichtung hat M. von Pirani [1]) folgende Näherungskonstruktion angegeben: Man schlage um P einen Kreis mit nicht zu großem Radius a, der die Kurve $\mathfrak{K}$ in zwei Punkten P_1 und P_2 schneidet. Die Verbindungssehne dieser beiden Punkte hat (falls P_1 und P_2 sich in einer unten näher gekennzeichneten Lage befinden) angenähert die Richtung der Tangente von $\mathfrak{K}$ im Punkte P. Fragen, die mit der Genauigkeit der Piranischen Konstruktion zusammenhängen, haben schon A. Walther und Th. Zech behandelt und mit einigen allgemeineren geometrischen Fragestellungen verknüpft [2]). Hier soll die für den Praktiker wichtigste dieser Fragen eine besonders elementare und teilweise verschärfte Antwort finden.

1. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir den Punkt P zum Nullpunkt des Koordinatensystems und die Kurventangente in P zur x-Achse machen. Dann hat die Kurve $\mathfrak{K}$ in der Nachbarschaft von P eine Darstellung $y = f(x)$. Die Funktion $f(x)$ sei in einem Intervall $|x| \leqq X$ stetig. Wir wählen den Kreisradius a so klein, daß $0 < a \leqq X$. Dann hat die Gleichung

$$G(x) \equiv x^2 + (f(x))^2 - a^2 = 0$$

mindestens eine Lösung x_1 mit $-a \leqq x_1 < 0$ und mindestens eine Lösung x_2 mit $0 < x_2 \leqq a$, denn es ist $G(x)$ stetig für $|x| \leqq a$, $G(0) = -a^2 < 0$, $G(\pm a) = (f(\pm a))^2 \geqq 0$. Irgend zwei solche Lösungen greifen wir heraus, die zugehörigen Schnittpunkte P_1 und P_2 des Kreises $x^2 + y^2 = a^2$ mit der Kurve $\mathfrak{K}$ haben die Koordinaten $(x_i, f(x_i))$ $(i = 1, 2)$ und liegen auf verschiedenen Seiten der y-Achse, d. h. auf verschiedenen Seiten der Normalen

---

[1]) Marcello von Pirani, Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik. Sammlung Göschen, Nr. 728, Berlin und Leipzig 1914, S. 24–28. 2. Auflage (besorgt von I. Runge), 1931, S. 22–27.

[2]) A. Walther u. Th. Zech, Bemerkungen zur angenäherten Tangentenkonstruktion von Pirani. Berichte der math.-phys. Klasse der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig 85 (1933), S. 45–56.

der Kurve $\mathfrak{K}$ im Punkte P. Ihre Verbindungsgerade nennen wir eine Piranische Sehne; deren Neigungswinkel gegenüber der positiven x-Achse bezeichnen wir mit $\delta = \delta(a)$.

Da die x-Achse Tangente der Kurve $y = f(x)$ im Punkte $(0, 0)$ sein soll, existiert $f'(0)$ und ist

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ [3]};$$

also existiert auch

$$\text{(1)} \qquad \operatorname*{fin\,sup}_{0 < |x| \leqq u} \left| \frac{f(x)}{x} \right| = S(u)$$

für $0 < u \leqq X$ und ist

$$\lim_{u \to 0} S(u) = 0.$$

Es ist nach (1)

$$|f(x_i)| \leqq S(a)\,|x_i| \qquad (i = 1, 2)$$

und daher

$$|\operatorname{tg} \delta| = \frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{x_2 - x_1} \leqq S(a)\,\frac{|x_2| + |x_1|}{x_2 - x_1} = S(a)\,\frac{|x_2| + |x_1|}{|x_2| + |x_1|} = S(a),$$

also, wenn hier und im folgenden stets der Hauptwert des Arcustangens genommen wird,

$$\text{(2)} \qquad |\delta| = |\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \delta)| = \operatorname{arctg}(|\operatorname{tg} \delta|) \leqq \operatorname{arctg}\big(S(a)\big)$$

und $\delta(a) \to 0$ für $a \to 0$.

Die Piranischen Sehnen existieren also für hinreichend kleine Kreisradien a und haben für $a \to 0$ stets die Tangente zur Grenzlage, falls diese existiert.

2. Hat $f(x)$ im Intervall $|x| \leqq a$ eine beschränkte Ableitung und ist die obere Grenze von $|f'(x)|$ in diesem Intervall $M_1(a)$, so ist

$$f(x) = x\,f'(\vartheta_1 x) \qquad (0 < \vartheta_1 = \vartheta_1(x) < 1)$$

und daher

$$S(a) = \operatorname*{fin\,sup}_{0 < |x| \leqq a} \left| \frac{f(x)}{x} \right| = \operatorname*{fin\,sup}_{0 < |x| \leqq a} |f'(\vartheta_1 x)| \leqq M_1(a),$$

also nach (2)

$$|\delta| \leqq \operatorname{arctg}\big(M_1(a)\big).$$

3. Hat $f(x)$ im Intervall $|x| \leqq a$ eine beschränkte Ableitung zweiter Ordnung, ist etwa $|f''(x)| \leqq M_2(a)$ für $|x| \leqq a$, so ist

$$\text{(3)} \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(\vartheta_2 x)}{2!}\,x^2 = \frac{1}{2} f''(\vartheta_2 x)\,x^2 \quad (0 < \vartheta_2 = \vartheta_2(x) < 1)$$

---

[3]) Von Tangentendefinitionen, die nicht auf dem Begriff der Ableitung beruhen, sehen wir ab.

und damit

$$S(a) = \operatorname*{fin\,sup}_{0<|x|\leqq a} \left|\frac{f(x)}{x}\right| = \operatorname*{fin\,sup}_{0<|x|\leqq a} \left|x\frac{f''(\vartheta_2 x)}{2}\right|$$

$$\leqq \frac{a}{2} \operatorname*{fin\,sup}_{0<|x|\leqq a} |f''(\vartheta_2 x)| \leqq \frac{a}{2} M_2(a),$$

also nach (2)

$$|\delta| \leqq \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{2} M_2(a)\right).$$

Dieses Ergebnis kann man auch durch folgende einfache geometrische Betrachtung gewinnen: Unter den gegenwärtigen Voraussetzungen verläuft im Intervall $|x| \leqq a$ die Kurve $\mathfrak{K}$ zwischen den Parabeln $y = Lx^2$ und $y = -Lx^2$, wo zur Abkürzung $L = \frac{1}{2} M_2(a)$ gesetzt ist, d. h. im Bereich

$$-Lx^2 \leqq y \leqq Lx^2.$$

Die Winkelabweichung $|\delta|$ der Pranischen Sehne wird also am größten, wenn die Kurve $\mathfrak{K}$ zwei diametral gelegene Schnittpunkte des Kreises $x^2 + y^2 = a^2$ mit diesen Parabeln verbindet und die Pranische Sehne durch diese Punkte gelegt wird. Ist (ξ, η) der im ersten Quadranten gelegene dieser Schnittpunkte, also

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2, \quad \eta = L\xi^2,$$

und zunächst $L > 0$, so wird

$$\xi^2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a^2L^2}}{2L^2};$$

also ist

$$|\operatorname{tg}\delta| \leqq \frac{\eta}{\xi} = L\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 4a^2L^2}}$$

$$\leqq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-1 + 1 + 2a^2L^2} = aL = \frac{1}{2} a M_2(a),$$

d. h.

$$|\delta| \leqq \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{2} M_2(a)\right).$$

Diese Abschätzung gilt nachträglich auch noch, falls $L = \frac{1}{2} M_2(a) = 0$ ist.

4. Wir wenden uns jetzt zu dem Fall, daß im Intervall $|x| \leqq a$ mindestens die zweite Ableitung existiert und auch noch an der Stelle $x = 0$ stetig ist. Dann ist nach (3)

$$f(x) = x^2 \frac{f''(\vartheta_2(x)x)}{2} = x^2 g(x),$$

wo $g(x)$ für $|x| \leqq a$ stetig ist, falls $g(0) = \frac{1}{2} f''(0)$ gesetzt wird. Setzt man zur Abkürzung $g(x_i) = g_i$ und nimmt man zunächst $g_1 \neq 0$, $g_2 \neq 0$ an, so folgt aus der Bedingung

$$x_i^2 + x_i^4 g_i^2 - a^2 = 0,$$

daß

$$x_i^2 = \frac{-1+\sqrt{1+4a^2g_i^2}}{2g_i^2} \qquad (i=1,2). \tag{4}$$

Damit wird

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{x_2^2g_2-x_1^2g_1}{x_2-x_1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|g_1g_2|}{g_1g_2}\,\frac{g_2-g_1+g_1\sqrt{1+4a^2g_2^2}-g_2\sqrt{1+4a^2g_1^2}}{|g_1|\sqrt{-1+\sqrt{1+4a^2g_2^2}}+|g_2|\sqrt{-1+\sqrt{1+4a^2g_1^2}}},$$

d. h.

$$\operatorname{tg}\delta = \sqrt{2}\,a\,\frac{|g_1g_2|}{g_1g_2}\,(g(x_2)-g(x_1))\,F(2ag_1,2ag_2), \tag{5}$$

wo

$$F(t_1,t_2) = \frac{1+\dfrac{t_1\sqrt{1+t_2^2}-t_2\sqrt{1+t_1^2}}{t_2-t_1}}{|t_1|\sqrt{-1+\sqrt{1+t_2^2}}+|t_2|\sqrt{-1+\sqrt{1+t_1^2}}}$$

ist. Die Formel (5) gilt nach ihrer Herleitung nur, sofern $g_1 \neq g_2$ ist. Wir werden in Nr. 5 zeigen, daß es eine Konstante C derart gibt, daß

$$|F(t_1,t_2)| \leqq C \tag{6}$$

für $0<|t_1|<\infty$, $0<|t_2|<\infty$, $t_1 \neq t_2$, und zugleich finden, daß $C=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ die kleinste derartige Konstante ist. Damit folgt dann aus (5), daß

$$|\operatorname{tg}\delta| \leqq \tfrac{1}{2}\,a\,|g(x_2)-g(x_1)|. \tag{7}$$

Diese Ungleichung gilt nun aber auch in dem bisher ausgeschlossenen Fall, daß $g_1=g_2$ ist; dann ist nämlich

$$\operatorname{tg}\delta = g_1(x_2+x_1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{g_1}{|g_1|}\left\{\sqrt{-1+\sqrt{1+4a^2g_1^2}}-\sqrt{-1+\sqrt{1+4a^2g_1^2}}\right\}=0,$$

also (7) auch richtig.

5. Wir beweisen jetzt, daß die Ungleichung (6), d. h. die Ungleichung

$$\left|1+\frac{t_1\sqrt{1+t_2^2}-t_2\sqrt{1+t_1^2}}{t_2-t_1}\right| \leqq C\left\{|t_1|\sqrt{-1+\sqrt{1+t_2^2}}+|t_2|\sqrt{-1+\sqrt{1+t_1^2}}\right\} \tag{8}$$

für $0<|t_1|<\infty$, $0<|t_2|<\infty$, $t_1 \neq t_2$ mit $C=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ gilt, C aber nicht durch eine kleinere Zahl ersetzt werden darf.

Setzt man

$$u_i = \sqrt{-t_i+\sqrt{1+t_i^2}} \qquad (i=1,2),$$

so entspricht dem Bereich $0 < |t_i| < \infty$ der Bereich $0 < u_i < \infty$, $u_i \neq 1$; es wird

$$t_i = \frac{1-u_i^4}{2u_i^2}, \quad \sqrt{1+t_i^2} = \frac{1+u_i^4}{2u_i^2}, \quad \sqrt{-1+\sqrt{1+t_i^2}} = \frac{|1-u_i^2|}{\sqrt{2}\,|u_i|};$$

der Bedingung $t_1 \neq t_2$ entspricht die Bedingung $u_1 \neq u_2$; der Ungleichung (8) entspricht die Ungleichung

$$\frac{|(1-u_1^2)(1-u_2^2)|}{1+u_1^2u_2^2} \leqq \frac{C}{2\sqrt{2}} \frac{|1-u_1^2|\,|1-u_2^2|}{|u_1u_2|} \left\{\frac{1+u_1^2}{|u_1|} + \frac{1+u_2^2}{|u_2|}\right\}$$

oder

$$\frac{u_1^2u_2^2}{1+u_1^2u_2^2} \leqq \frac{C}{2\sqrt{2}} \{(1+u_1^2)\,|u_2| + (1+u_2^2)\,|u_1|\},$$

die, weil $u_i > 0$ ist, auch

$$\frac{u_1^2u_2^2}{1+u_1^2u_2^2} \leqq \frac{C}{2\sqrt{2}} \{(1+u_1^2)\,u_2 + (1+u_2^2)\,u_1\} = \frac{C}{2\sqrt{2}} (u_1+u_2)(1+u_1u_2)$$

geschrieben werden darf. Es ist also gewiß die Ungleichung (6) bewiesen, wenn gezeigt werden kann, daß

$$\Phi(u_1,u_2) = \frac{C}{2\sqrt{2}} (u_1+u_2)(1+u_1u_2) - \frac{u_1^2u_2^2}{1+u_1^2u_2^2} \geqq 0$$

für $0 < u_i < \infty$ und $C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Da $\Phi(u_1,u_2) = \Phi(u_2,u_1)$ ist, genügt es, bei diesem Nachweis $0 < u_2 \leqq u_1 < \infty$ vorauszusetzen. Längs der Hyperbeln $u_1u_2 = k$, soweit sie in diesem Bereich verlaufen, ist

$$\Phi = \Phi\left(u_1, \frac{k}{u_1}\right) = \frac{C}{2\sqrt{2}} \left(u_1 + \frac{k}{u_1}\right)(1+k) - \frac{k^2}{1+k^2} = h(u_1),$$

$$0 < k < \infty, \quad \sqrt{k} \leqq u_1 < \infty,$$

$$h'(u_1) = \frac{C}{2\sqrt{2}} (1+k)\left(1 - \frac{k}{u_1^2}\right) \geqq 0,$$

$$\Phi\left(u_1, \frac{k}{u_1}\right) \geqq \Phi(\sqrt{k}, \sqrt{k}).$$

Wenn also $\Phi(v,v) \geqq 0$ für $0 < v < \infty$ und bei geeigneter Wahl der Konstanten C, so ist auch $\Phi(u_1,u_2) \geqq 0$ für $0 < u_1 < \infty$, $0 < u_2 < \infty$. Nun ist aber

$$\Phi(v,v) = \frac{C}{\sqrt{2}} v(1+v^2) - \frac{v^4}{1+v^4} = \frac{Cv}{\sqrt{2}\,(1+v^4)} \left[(1+v^2)(1+v^4) - \frac{\sqrt{2}}{C} v^3\right]$$

$$= \frac{Cv}{\sqrt{2}\,(1+v^4)}\, l(v).$$

Es ist also zu zeigen, daß

$$l(v) = (1+v^2)(1+v^4) - \frac{\sqrt{2}}{C} v^3 = 1 + v^2 + v^4 + v^6 - \frac{\sqrt{2}}{C} v^3 \geqq 0$$

für $0 < v < \infty$, wenn $C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ gesetzt wird. Für $C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ wird aber

$$l(v) = (v-1)^2 (1 + 2v + 4v^2 + 2v^3 + v^4),$$

also in der Tat $l(v) \geqq 0$ für $0 < v < \infty$. Wird dagegen $C < \frac{1}{2\sqrt{2}}$ gewählt, so wird

$$l(1) = 4 - \frac{\sqrt{2}}{C} < 4 - 4 = 0;$$

mithin ist $C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ auch die kleinste Konstante, mit der die Ungleichung (6) für $0 < |t_1| < \infty$, $0 < |t_2| < \infty$, $t_1 \neq t_2$ gilt.

6. Nun sei $g_1 = 0$, aber $g_2 \neq 0$. Dann ist $x_1 = -a$ und

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{x_2^3 g_2}{x_2 + a}$$

$$= 2a \frac{|g_2|}{g_2} |g_2| \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a^2 g_2^2}}{\sqrt{2}\, 2a |g_2| \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 4a^2 g_2^2}} + 4a^2 g_2^2},$$

d. h.

$$\operatorname{tg}\delta = 2a \frac{|g_2|}{g_2} |g_2| F(2a|g_2|), \tag{9}$$

wo

$$F(t) = \frac{-1 + \sqrt{1 + t^2}}{\sqrt{2}\, t \sqrt{-1 + \sqrt{1 + t^2}} + t^2}.$$

Wir wollen zeigen, daß es eine Konstante D derart gibt, daß

$$|F(t)| \leqq D \tag{10}$$

für $0 < t < \infty$, und daß $D = \frac{1}{4}$ die kleinste derartige Konstante ist.

Die Ungleichung (10) oder

$$|-1 + \sqrt{1 + t^2}| \leqq D \{\sqrt{2}\, t \sqrt{-1 + \sqrt{1 + t^2}} + t^2\}$$

geht durch die Substitution

$$u = \sqrt{-t + \sqrt{1 + t^2}}$$

in die gleichwertige Ungleichung

$$\frac{(1-u^2)^2}{2u^2} \leqq D \left\{\sqrt{2}\, \frac{1-u^4}{2u^2} \frac{|1-u^2|}{\sqrt{2}\,|u|} + \frac{(1-u^4)^2}{4u^4}\right\}$$

über, die für $0 < u < 1$ zu beweisen ist und für diese u auch

$$2u^2 \leqq D(1 + u^2)(1 + u)^2$$

geschrieben werden darf. Es ist also D möglichst klein und so zu bestimmen, daß im Intervall $0 < u < 1$

$$p(u) = 1 + 2u + 2u^2 + 2u^3 + u^4 - \frac{2}{D} u^2 \geqq 0$$

bleibt. Für $D = \frac{1}{4}$ wird nun

$$p(u) = (u-1)^2(1+4u+u^2) \geqq 0,$$

für $D < \frac{1}{4}$ aber

$$p(1) = 8 - \frac{2}{D} < 8 - 8 = 0.$$

Damit ist die Ungleichung (10) im behaupteten Umfang bewiesen.

Aus (9) und (10) folgt, daß

$$|\operatorname{tg}\delta| \leqq \tfrac{1}{2}a\,|g(x_2)| = \tfrac{1}{2}a\,|g(x_2) - g(x_1)|;$$

es gilt also wieder die Ungleichung (7). Ganz entsprechend läßt sie sich begründen, wenn $g_2 = 0$, aber $g_1 \neq 0$ ist. Im Falle $g_1 = g_2 = 0$ ist sie endlich trivialerweise richtig, weil dann $\operatorname{tg}\delta = 0$ ist. Die Ungleichung (7) gilt also ausnahmslos.

7. Wir gehen zu Folgerungen über. Ist $|f''(x)| \leqq M_2(a)$ für $|x| \leqq a$, so ist $|g(x)| \leqq \frac{1}{2}M_2(a)$, und aus (7) folgt, daß

$$|\operatorname{tg}\delta| \leqq \tfrac{1}{2}aM_2(a),$$

d. h.

$$|\delta| \leqq \operatorname{arctg}\left(\tfrac{1}{2}aM_2(a)\right),$$

also das Ergebnis aus Nr. 3.

Ist $|f''(x) - f''(0)| \leqq S_2(a)$ für $|x| \leqq a$, so ist

$$|g(x_2) - g(x_1)| \leqq |g(x_2) - g(0)| + |g(x_1) - g(0)| \leqq S_2(a)$$

und daher nach (7)

$$|\operatorname{tg}\delta| \leqq \tfrac{1}{2}aS_2(a).$$

Ist $f''(x)$ an der Stelle $x = 0$ stetig, so ist $S_2(a) \to 0$ für $a \to 0$, mithin

$$\lim_{a\to 0}\frac{\operatorname{tg}\delta(a)}{a} = 0$$

und erst recht

$$\lim_{a\to 0}\frac{\delta(a)}{a} = 0.$$

Hat $f(x)$ im Intervall $|x| \leqq a$ sogar eine beschränkte Ableitung dritter Ordnung, und ist für $|x| \leqq a$

$$|f'''(x)| \leqq M_3(a),$$

so ist

$$g(x) = \frac{f''(0)}{2!} + \frac{f'''(\vartheta_3 x)}{3!}x \qquad (0 < \vartheta_3 = \vartheta_3(x) < 1),$$

$$g(x_2) - g(x_1) = \frac{1}{6}\left[x_2 f'''\left(\vartheta_3(x_2)x_2\right) - x_1 f'''\left(\vartheta_3(x_1)x_1\right)\right],$$

$$|g(x_2) - g(x_1)| \leqq \frac{1}{3}aM_3(a),$$

$$|\operatorname{tg}\delta| \leqq \frac{1}{3!}a^2M_3(a),$$

$$|\delta| \leqq \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3!}a^2M_3(a)\right). \tag{11}$$

8. Eine noch schärfere Aussage läßt sich, wie in Nr. 9 durch ein Beispiel belegt werden wird, im allgemeinen nicht erzielen. Wenn aber $f(x)$ sogar $(n+1)$-mal differentiierbar und

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0,\ f^{(n+1)}(0) \neq 0 \qquad (n \geqq 3)$$

ist, ferner für $|x| \leqq a$ die Ungleichung

$$|f^{(n+1)}(x)| \leqq M_{n+1}(a)$$

gilt, wenn also der Punkt P ein Flachpunkt n-ter Ordnung ist, so wird

$$g(x) = \frac{x^{n-1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\vartheta_{n+1}(x)\,x) \qquad (0 < \vartheta_{n+1}(x) < 1),$$

$$|g(x_2) - g(x_1)| \leqq |g(x_2)| + |g(x_1)| \leqq 2\,\frac{a^{n-1}}{(n+1)!} M_{n+1}(a),$$

$$|\operatorname{tg}\delta| \leqq \frac{a^n}{(n+1)!} M_{n+1}(a),$$

$$|\delta| \leqq \operatorname{arctg}\Big(\frac{a^n}{(n+1)!} M_{n+1}(a)\Big). \tag{12}$$

Für die Konstruktion der Tangente in einem Flachpunkt ist also, worauf schon Herr Pirani hinwies und was die praktische Erfahrung bestätigt, die Piranische Konstruktion besonders vorteilhaft.

9. Davon, daß die Ungleichungen (11) und (12) im allgemeinen nicht verschärft werden können, kann man sich an folgendem Beispiel überzeugen: Ist die Kurve $\mathfrak{K}$ die Parabel

$$f(x) = K x^{n+1} \quad (K > 0,\ n \text{ eine positive gerade Zahl}),$$

so wird

$$\operatorname{tg}\delta = K\frac{x_2^{n+1}}{x_2} = K x_2^n,$$

$$g(x) = K x^{n-1} \neq 0 \qquad \text{für } x \neq 0,$$

also $g_2 = K x_2^{n-1} \neq 0$ und, wenn θ eine Konstante zwischen 0 und $\frac{1}{\sqrt{2}}$ bedeutet und

$$0 < X \leqq \sqrt[n]{\frac{\theta}{2K}}$$

gewählt wird,

$$|g_2| < K a^{n-1} \leqq K X^{n-1},$$

$$2a|g_2| < 2XKX^{n-1} \leqq \theta < 1,$$

daher nach (4)

$$x_2 = a\sqrt{1 - \frac{1}{4}(2ag_2)^2 + \frac{1\cdot 3}{4\cdot 6}(2ag_2)^4 - \cdots} = a\sqrt{1+\varphi(a)},$$

$$\operatorname{tg}\delta = K a^n \sqrt{1+\varphi(a)}^n.$$

Hier ist bei unseren Voraussetzungen

$$|\varphi(a)| = \left| -\frac{1}{4}(2ag_2)^2 + \frac{1\cdot 3}{4\cdot 6}(2ag_2)^4 - \cdots \right| \leqq (2ag_2)^2 + (2ag_2)^4 + \cdots$$

$$< (2aKa^{n-1})^2 + (2aKa^{n-1})^4 + \cdots = (2K)^2 a^{2n} + (2K)^4 a^{4n} + \cdots.$$

Diese letzte Potenzreihe in a ist für $a \leqq X$ konvergent, weil

$$2Ka^n \leqq 2KX^n \leqq \Theta < 1.$$

Daher ist

$$\lim_{a \to 0} \varphi(a) = 0$$

und damit

$$\lim_{a \to 0} \frac{\operatorname{tg}\delta}{a^n} = K = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}.$$

Die Abschätzung (11) kann also, was die Größenordnung betrifft, mit der a in die Fehlerschranke eingeht, nicht allgemein verschärft werden[4]); dasselbe lehrt das Beispiel von der Ungleichung (12), solange man darauf verzichtet, zwischen geradem und ungeradem n zu unterscheiden.

---

[4]) Dies kann man auch der Potenzreihe entnehmen, die δ als Funktion von a darstellt; vgl. A. WALTHER und TH. ZECH a. in Anm. [3]) a. O., S. 51, Formel (3).

(Eingegangen am 5. März 1943.)

Über Nabelpunkte auf einer Eifläche.

Von G. Bol in Greifswald.

Herr CARATHÉODORY hat bekanntlich[1]) die Vermutung ausgesprochen, daß es auf jeder konvexen Fläche mindestens zwei Nabelpunkte gibt. Diese Vermutung ist unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen (vgl. § 1) von H. HAMBURGER bewiesen worden[2]), leider aber in so umständlicher Weise, daß von einem wirklichen Durchschauen der Verhältnisse, wie mir scheint, nicht die Rede sein kann.

Die vorliegende Arbeit bezweckt, diesem Ziele näherzukommen. Durch Anwendung mehr geometrischer Methoden wird eine sehr erhebliche Vereinfachung und Veranschaulichung erreicht. Dieselbe Methode läßt sich — worauf hier nur hingewiesen werden soll — auch bei anderen Fragen über Nabelpunkte mit Erfolg verwenden. Besonders die Ergebnisse von GULLSTRAND[3]) über die Gestalt des Krümmungsliniennetzes in der Umgebung eines Nabels lassen sich in einfacher Weise wiedergewinnen und erweitern. Darüber soll die demnächst in Hamburg erscheinende Doktorarbeit von Frl. I. ELVERS Aufschluß geben. Ich hoffe aber, die gesamten Ergebnisse bald auch in mehr lehrbuchmäßiger Form herausbringen zu können[4]).

§ 1.

Zurückführung auf ein lokales Problem.

Erinnern wir zunächst daran, wie man unser Problem auf eine Frage nach dem Verhalten des Krümmungsliniennetzes in der Umgebung eines Nabels zurückführen kann.

---

[1]) Vgl. W. BLASCHKE, Differentialgeometrie III, S. 289. Der dort erwähnte Beweis von COHN-VOSSEN, der mir nicht zugänglich war, hat sich, wie mir Herr BLASCHKE mitteilt, als falsch erwiesen.

[2]) H HAMBURGER, Beweis einer Vermutung von C. CARATHÉODORY. I, Annals of Math.; II s. **41** (1940), S. 63—86; II, III, Acta Mathematica **73** (1941), S. 174—332.

[3]) A. GULLSTRAND, Allgemeine Theorie der monochromatischen Aberrationen und ihre nächsten Ergebnisse für die Ophthalmologie. Nova Acta Reg. Soc. Sc. Upsala Ser. III, **20** (1900), S. 1—204; Zur Theorie der Kreispunkte. Acta Math. **29** (1904), S. 59—100.

[4]) Ein ausführliches Literaturverzeichnis über Nabelpunkte bei H. J. FISCHER, Der Verlauf von Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines vorgegebenen Punktes. Deutsche Mathematik **3** (1938), S. 152—188.

Unter Verwendung der Ebenenkoordinaten von BONNET[5]) läßt sich unsere Fläche darstellen mit Hilfe einer Funktion

$$w = w(u, v) \tag{1}$$

zweier Veränderlichen u und v, die für reelle Flächenpunkte konjugiert komplex sind, während w für reelle Flächenpunkte reell ist. Die Gleichung der Krümmungslinien nimmt in diesen Koordinaten die Form an:

$$w_{uu}\, du^2 - w_{vv}\, dv^2 = 0. \tag{2}$$

Die Nabelpunkte sind gekennzeichnet durch

$$w_{uu} = w_{vv} = 0. \tag{3}$$

Für reelle Flächenpunkte sind w_{uu} und w_{vv} konjugiert komplex, ein solcher Punkt ist also genau dann ein Nabel, wenn w_{uu} verschwindet.

Bekanntlich ist die Ebene der komplexen Veränderlichen u zum sphärischen Normalenbild unserer Fläche konform. Da die sphärischen Bilder der Krümmungslinien ein orthogonales Kurvennetz bilden, gilt dasselbe für das Abbild der Krümmungslinien in der u-Ebene.

Bei einer Eifläche ist die Abbildung der Fläche auf die Normalenbildkugel sowie auf die u-Ebene eineindeutig, es ist also gleichgültig, ob wir das Netz der Krümmungslinien auf der Fläche, im sphärischen Bild oder in der u-Ebene untersuchen.

Sei nun $u = v = 0$ ein Nabelpunkt, den wir isoliert voraussetzen, so daß in einer Umgebung des Nullpunktes kein weiterer Nabel mehr vorhanden sein soll, also w_{uu} nirgendwo verschwinden soll. Beschreiben wir in dieser Umgebung einen Umlauf im positiven Sinne um den Nullpunkt, so wird

$$\Delta \arg w_{uu} = 2N\pi \tag{4}$$

bei ganzem N. N nennt man die Kennziffer des Nabels.

Für eine Eifläche mit nur isolierten Nabeln ist, wie a. a. O.[1]) gezeigt wird,

$$\Sigma N_i = -4. \tag{5}$$

Daraus folgt zunächst, daß es auf jeder Eifläche mindestens einen Nabel gibt. Im folgenden soll aber mit H. HAMBURGER bewiesen werden:

Hauptsatz. *Wenn sich w in einer Umgebung eines isolierten Nabels in eine Potenzreihe nach u und v entwickeln läßt, so gilt für die Kennziffer dieses Nabels*

$$N \geqq -2. \tag{6}$$

---

[5]) O. BONNET, Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes. Journ. de Liouville, 2 série, 5 (1860), S. 153–266. Vgl. auch G. DARBOUX, Lecons sur la théorie générale des surfaces I, S. 243 und W. BLASCHKE, Differentialgeometrie III, S. 285.

Daraus ergibt sich offenbar sofort die Richtigkeit der Vermutung von CARATHÉODORY, und zwar in folgender Präzisierung:

Wenn es auf einer Eifläche einen Nabel gibt, in dessen Umgebung sich w in eine Potenzreihe nach u und v entwickeln läßt[6]) *so liegt auf dieser Fläche noch mindestens ein weiterer Nabel.*

Setzen wir

$$w_{uu} = x + iy \tag{7}$$

mit reellen x und y und durchläuft u eine geschlossene Kurve um den Nullpunkt, so beschreibt der Punkt (x, y) eine geschlossene Kurve K in der (x, y)-Ebene. Ist nun N_+ die Anzahl der Durchschneidungen dieser Kurve mit der positiven x-Achse im positiven Sinne, N_- die Anzahl der Durchschneidungen im negativen Sinne, so wird offenbar

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg w_{uu} = N_+ - N_-. \tag{8}$$

Das wird sofort klar, wenn man sich die RIEMANNsche Fläche für $\log w_{uu}$ durch Aufschneiden und Zusammenheften längs der positiven x-Achse hergestellt denkt. Natürlich kann man statt der positiven x-Achse auch jeden anderen Halbstrahl durch den Nullpunkt verwenden.

Offenbar ist N aber auch die Anzahl der Umläufe um den Nullpunkt, auf die sich unsere Kurve ohne Durchschreitung des Nullpunktes stetig zusammenziehen läßt. Wir wollen also N auch die Umlaufszahl unserer Kurve um den Nullpunkt nennen. Man spricht auch von KRONECKERS Charakteristik des Nullpunktes in bezug auf die Kurve K.

Unser Hauptsatz läßt sich jetzt so formulieren:

Die Funktion $w(u, v)$ möge für konjugiert komplexe u, v nur reelle Werte annehmen, in einer Umgebung des Nullpunktes $u = v = 0$ lasse sich w in eine Potenzreihe nach u und v entwickeln:

$$w(u, v) = \sum_{0}^{\infty}{}_{i,k} a_{ik} u^i v^k, \qquad a_{ik} = \bar{a}_{ki}. \tag{8}$$

Es sei $w_{uu}(0, 0) = 0$, diese Nullstelle von w_{uu} sei aber isoliert. Beschreibt dann u einen Umlauf um den Nullpunkt im positiven Sinne, der keine weitere Nullstelle von w_{uu} enthält, so ist die Umlaufszahl der durch (7) erklärten Kurve in der (x, y)-Ebene nicht kleiner als -2.

Durch diese Formulierung wird es verständlich, daß die Bestimmung der Umlaufszahlen für gewisse Kurvenklassen im folgenden einen wichtigen

---

[6]) In vielen Fällen kommt man mit weniger aus, so genügen wenige Glieder der Taylor-Formel, wenn in (9) das erste nicht identisch verschwindende Glied keine vierfache Nullstelle mit konjugiert komplexen u und v und $|u| = 1$ hat. Vgl. hierzu die Schlußbemerkung in § 6.

Platz einnimmt. Diese Untersuchungen, die mir auch für sich von Interesse zu sein scheinen, sind in § 2 zusammengestellt.

Die Umlaufszahl hat eine wichtige Additivitätseigenschaft; verbinden wir zwei Punkte A und C des geschlossenen Kurvenzuges $ABCDA$ durch den Bogen AEC, so ist (Fig. 1)

$$N_{ABCDA} = N_{ABCEA} + N_{AECDA},$$

wobei natürlich alle Umlaufszahlen in bezug auf denselben Punkt genommen werden sollen. Daß dies richtig ist, sieht man sofort aus (8); die Bestandteile, die von dem neuen Bogen AEC herrühren, heben sich heraus.

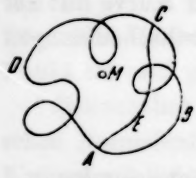

Fig. 1.

Da w_{uu} im Nullpunkt verschwindet, ist offenbar $a_{20} = a_{02} = 0$. Weil unsere Untersuchung sich ausschließlich auf w_{uu} bezieht, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit auch $a_{00} = a_{10} = a_{01} = a_{11} = 0$ voraussetzen. Dann wird

$$w(u, v) = \sum_{h=3}^{\infty} w_h(u, v), \tag{9}$$

wo $w_h(u, v)$ ein homogenes Polynom der Ordnung h in u und v darstellt, das für konjugiert komplexe u und v nur reelle Werte annimmt.

Ist $w_k(u, v)$ das erste Glied in der Entwicklung (9), das nicht identisch verschwindet, so spricht man von einem Nabel der Ordnung $k - 2$[7]).

§ 2.

Umlaufszahlen.

Satz I. *$f(t)$ sei zweimal stetig differenzierbar und periodisch mit Periode 2π, A sei eine positive Konstante. Dann hat die Kurve*

$$x = f'' - Af, \qquad y = f' \tag{10}$$

in bezug auf jeden Punkt $M(x_0, y_0)$ in ihrer Ebene eine nichtnegative Umlaufszahl.

Zum Beweis sei zunächst $y_0 \leqq 0$. Wir bestimmen die Umlaufszahl mit Hilfe der Parallelen zur positiven x-Achse durch M. Sei nun P eine Durchschneidung dieser Halbgeraden im negativen Sinne, also bei abnehmendem y

[7]) Nach GULLSTRAND; die einfachsten Nabel mit $k = 3$ sind dann von erster Ordnung.

(Fig. 2). Wir behaupten dann, daß der nächste Punkt Q auf unserer Kurve, für den der Wert $y = y_0$ (im zunehmenden Sinne) wieder durchschritten wird, rechts von P liegt, also eine Durchschneidung der Halbgeraden im positiven Sinne darstellt. Ist das bewiesen, so ist man fertig, denn wenn auf jede Durchschneidung im negativen Sinne eine im positiven Sinne folgt, so ist $N_+ \geqq N_-$, also $N \geqq 0$.

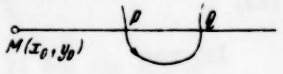

Fig. 2.

Der Beweis ist aber sehr einfach, gehören zu P und Q die Parameterwerte t_P und t_Q, so ist für $t_P \leqq t \leqq t_Q$ stets $y \leqq y_0$, also $f'(t) \leqq y_0$ und daher

$$f(t_Q) - f(t_P) \leqq y_0(t_Q - t_P) \tag{11}$$

und weiter

$$f'(t_P) = f'(t_Q) = y_0, \quad f''(t_P) \leqq 0, \quad f''(t_Q) \geqq 0. \tag{12}$$

Daher aber

$$x_Q - x_P = f''(t_Q) - f''(t_P) - A\{f(t_Q) - f(t_P)\} > 0$$

und damit ist die Behauptung bewiesen.

Ist aber $y_0 > 0$, so setzen wir

$$x^* = -x, \quad y^* = -y, \quad f^* = -f. \tag{13}$$

Die Substitution bedeutet eine Drehung des Achsenkreuzes um π, was an der Umlaufszahl nichts ändert.

Dann gilt für die gesternten Größen wieder (10), es ist aber $y_0^* < 0$. Also ist auch hier die Behauptung richtig.

Setzt man in (10) für $f(t)$ ein Polynom in t und läßt t von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen, so wird die Kurve nicht geschlossen sein, sondern aus dem Unendlichen kommen und dorthin wieder weglaufen. Es ist aber klar, daß sie jeden genügend großen Kreis um M nur zweimal trifft und wir können sie geschlossen machen, indem wir die Teile außerhalb des Kreises weglassen und dann Endpunkt und Anfangspunkt durch einen der beiden Kreisbogen verbinden. Wir wählen dafür den Bogen, der im positiven Sinne durchlaufen werden muß (Fig. 3).

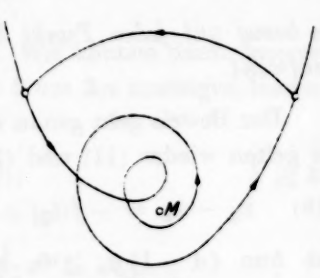

Fig. 3.

Dann bleiben sämtliche Schlüsse richtig und die Umlaufszahl ist wieder nicht negativ. Hierbei ist allerdings der letzte Schnittpunkt unserer Kurve (10) mit dem Halbstrahl gesondert zu betrachten. Durchschneidet hier nämlich die Kurve im negativen Sinne, so ist noch zu zeigen, daß der nächste Schnittpunkt der abgeänderten Kurve ein solcher im positiven Sinne ist. Das ist klar, wenn der Kreisbogen die x-Achse

trifft. Es bleibt also nur noch der Fall zu betrachten, daß (in verständlicher Bezeichnung)

$$f'(-\infty) < y_0, \quad f'(+\infty) < y_0. \tag{14}$$

Ist nun

$$f(t) = a_0 t^k + a_1 t^{k-1} + \cdots + a_{k-1} t + a_k, \tag{15}$$

so tritt offenbar (14) nur dann ein, wenn $a_0 < 0$ und k ungerade ist. Dann wird aber

$$x = -A a_0 t^k + \cdots$$

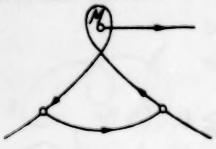

Fig. 4.

und unsere Kurve kommt also aus dem dritten und läuft in das vierte Quadrant. Daher trifft auch jetzt der Kreisbogen unseren Halbstrahl und n kann nicht negativ werden.

Daß aber Vorsicht am Platze ist, sieht man an der Kurve der Fig. 4, bei der wirklich $N = -1$ werden kann bei geeigneter Wahl von M.

Im folgenden Satze ist $f(t)$ wieder ein Polynom und muß man also wieder durch einen Kreisbogen abschließen:

Satz II. *Ist $f(t)$ ein Polynom von der Ordnung k und A eine Konstante für die*

$$1 - Ak > 0, \tag{16}$$

so hat die Kurve

$$\begin{aligned} x &= At f' - f \\ y &= f' \end{aligned} \tag{17}$$

in bezug auf jeden Punkt $M(x_0, y_0)$ in ihrer Ebene eine nichtnegative Umlaufszahl.

Der Beweis geht genau wie bei Satz I, werden P und Q wie dort erklärt, so gelten wieder (11) und (12) und deshalb

$$x_Q - x_P = -f(t_Q) + f(t_P) + A(t_Q - t_P)\, y_0 > (A-1)\, y_0 (t_Q - t_P). \tag{18}$$

Ist nun $(A-1)\, y_0 \geqq 0$, so folgt $x_Q > x_P$, also die Behauptung, ist $(A-1)\, y_0 < 0$, so führt man wieder die Substitution (13) durch.

Wie oben ist der letzte Schnittpunkt besonders zu betrachten; es können nur Schwierigkeiten entstehen, wenn (14) gilt, also wenn in (15) k ungerade und a_0 negativ ist. Da aber dann

$$x = (Ak - 1)\, a_0 t^k + \cdots,$$

so läuft auch hier die Kurve vom dritten Quadranten aus und ins vierte hinein und es entstehen keine Schwierigkeiten[8]).

Da die Aussage unseres Satzes translationsinvariant ist, so kann man noch etwas allgemeiner behaupten:

Satz IIa. *Unter den Voraussetzungen von Satz* II *hat die Kurve*

$$x = A t f' - f + B, \qquad y = f' + C, \tag{19}$$

wo B *und* C *Konstanten sind, in bezug auf jeden Punkt ihrer Ebene eine nichtnegative Umlaufszahl.*

Bei allen Sätzen wurde natürlich vorausgesetzt, daß die Kurve nicht durch den Aufpunkt M hindurchgeht. Liegt aber M auf der Kurve, so bleibt die Behauptung $N_+ - N_- \geqq 0$ dem Beweis nach richtig, wenn bei N_- die absteigenden Zweige durch M mitgezählt werden, bei N_+ die aufsteigenden durch M aber nicht. Geometrisch bedeutet das, daß die Umlaufszahl nichtnegativ ist, wenn alle durch M gehenden Zweige links an M vorbeigeführt werden. Da dies der ungünstigste Fall ist, so ist die Umlaufszahl ebenfalls nichtnegativ, wenn die Zweige beliebig vorbeigeführt werden; gibt es welche die rechts vorbeigehen, so ist die Umlaufszahl sogar sicher positiv.

§ 3.

Beweis des Hauptsatzes im regulären Fall.

Wir gehen jetzt daran, den Hauptsatz zu beweisen, und zwar in der am Schluß von § 1 angegebenen Form. Wir führen dazu zunächst die Substitution durch:

$$u = \varrho\, e^{i\theta}, \quad v = \varrho\, e^{-i\theta}, \tag{20}$$

führen also in der u-Ebene Polarkoordinaten ein. Wir können dann unseren Umlauf beschreiben, indem wir ϱ festhalten und θ um 2π ansteigen lassen. (9) nimmt jetzt die Gestalt an:

$$w(\varrho, \theta) = \sum_{m=k}^{\infty} \varrho^m w_m(\theta); \qquad k \geqq 3. \tag{21}$$

Offenbar ist

$$\varrho_u = \frac{1}{2} e^{-i\theta}, \qquad \theta_u = -\frac{i}{2\varrho} e^{-i\theta},$$
$$\varrho_v = \frac{1}{2} e^{i\theta}, \qquad \theta_v = \frac{i}{2\varrho} e^{i\theta} \tag{22}$$

[8]) Daß die Nebenbedingung (16) notwendig ist, zeigt das Beispiel $f = -t^3 + t$, $A = 2$. Hier ist $x = t(1 - 5t^2)$, $y = 1 - 3t^2$ und die Kurve sieht aus wie in Fig. 4 und hat in bezug auf den Punkt $(0, \frac{1}{2})$ die Umlaufszahl -1.

und deshalb

$$w_u = \frac{1}{2\varrho} e^{-i\vartheta}\{\varrho w_\varrho - i w_\vartheta\}, \tag{23}$$

$$w_{uu} = \frac{1}{4\varrho^2} e^{-2i\vartheta}\{(\varrho^2 w_{\varrho\varrho} - \varrho w_\varrho - w_{\vartheta\vartheta}) + 2i(-\varrho w_{\varrho\vartheta} + w_\vartheta)\}. \tag{24}$$

Also

$$\Delta \arg w_{uu} = -4\pi + \Delta \arg\{(\varrho^2 w_{\varrho\varrho} - \varrho w_\varrho - w_{\vartheta\vartheta}) + 2i(-\varrho w_{\varrho\vartheta} + w_\vartheta)\}. \tag{25}$$

Betrachten wir demnach in der (x, y)-Ebene die Kurve

$$\begin{aligned} x &= -\varrho^2 w_{\varrho\varrho} + \varrho w_\varrho + w_{\vartheta\vartheta}, \\ y &= 2(\varrho w_{\varrho\vartheta} - w_\vartheta) \end{aligned} \tag{26}$$

und ist N_1 die Umlaufszahl dieser Kurve um den Nullpunkt, so wird

$$\Delta \arg w_{uu} = 2\pi(-2 + N_1). \tag{27}$$

Vergleicht man das mit (4), so sieht man, daß

$$N = -2 + N_1. \tag{28}$$

Der Hauptsatz besagt also, daß die Umlaufszahl der Kurve (26) um den Nullpunkt für jeden genügend kleinen Wert von ϱ nichtnegativ ausfällt. Daß die Kurve (26) für genügend kleine Werte von ϱ nicht durch den Nullpunkt geht, geht daraus hervor, daß nur in einem Nabel x und y gleichzeitig verschwinden können.

Setzt man in (26) die Reihenentwicklung (21) ein und dividiert durch ϱ^k, so entsteht die Kurve

$$\begin{aligned} x &= \sum_{m=k}^{\infty} \varrho^{m-k}\{w_m'' - m(m-2) w_m\}, \\ y &= \sum_{m=k}^{\infty} \varrho^{m-k}\{2(m-1) w_m'\}, \end{aligned} \tag{29}$$

die zu (26) ähnlich ist, also ebenfalls die Umlaufszahl N_1 hat. Wir nennen sie die „Kennlinie" des Nabels. Ihre Gestalt wird für kleine Werte von ϱ beliebig gut dargestellt durch

$$\begin{aligned} x &= w_k'' - k(k-2) w_k, \\ y &= 2(k-1) w_k'. \end{aligned} \tag{30}$$

Die Kurve (30) nennen wir die Hauptkennlinie des Nabels. Sie ist vor der Kennlinie (29) dadurch ausgezeichnet, daß ihre Gestalt nicht von ϱ abhängt.

Offenbar kann man ϱ so klein wählen, daß die Kennlinie (29) innerhalb eines Streifens von der vorgegebenen Breite 2ε um die Hauptkennlinie liegt.

Wenn die Hauptkennlinie (30) *nicht durch den Nullpunkt geht, so nennen wir unseren Nabel regulär.*

In diesem Falle können wir unseren Streifen so schmal wählen, daß er den Nullpunkt nicht enthält. Dann haben offenbar die beiden Kurven (29)

und (30) dieselbe Umlaufszahl. Nun ist aber die Umlaufszahl von (30) wegen Satz I nichtnegativ. Dasselbe gilt also für (29).

Damit ist der Hauptsatz für reguläre Nabelpunkte bewiesen[8a]).

Geht die Hauptkennlinie durch den Nullpunkt, so wird die Kennlinie (29) innerhalb des Streifens an den Nullpunkt vorbeiführen. Auch hier aber läßt sich der Schluß durchführen, wenn nur die Kennlinie keine geschlossene Schleife um den Nullpunkt beschreibt. Denn wenn man die Hauptkennlinie an derselben Seite wie die Kennlinie an dem Nullpunkt vorbeiführt, so ist ihre Umlaufszahl nach § 2 nichtnegativ; da die Kennlinie keine Schleifenbildung aufweist, hat sie aber dieselbe Umlaufszahl.

Nun ist eine Schleife sicher nicht vorhanden, wenn an der fraglichen Stelle der Hauptkennlinie x' oder y' von Null verschieden ist. Denn dann gilt dasselbe bei genügend kleinem ϱ für die Kennlinie (29) in der Nähe dieses Punktes, eine der beiden Koordinaten x und y ist monoton und eine Schleife kann nicht vorhanden sein.

Nur wenn x und y auf der Hauptkennlinie (30) *eine gemeinsame doppelte Nullstelle haben, ist eine besondere Untersuchung notwendig.*

In diesem Falle ist wegen (30) offenbar

$$w_k'' - k(k-2)\,w_k = w_k''' - k(k-2)\,w_k' = w_k' = w_k'' = 0,$$

also

$$w_k = w_k' = w_k'' = w_k''' = 0. \tag{31}$$

w_k hat also eine mindestens vierfache Nullstelle. Wir sprechen dann von einer wesentlichen Singularität der Kennlinie.

§ 4.

Analytische Vorbereitungen zur Untersuchung der singulären Stellen.

Sei jetzt für $\vartheta = \vartheta_0$ eine vierfache Nullstelle von w_k vorhanden. Durch eine Drehung der u-Ebene können wir $\vartheta_0 = 0$ erreichen. Da die Kennlinie (29) in einer Umgebung dieser Stelle näher untersucht werden muß, ist es zweckmäßig, jetzt w nach Potenzen von ϱ und ϑ zu entwickeln:

$$w = \sum_{m=k}^{\infty} \varrho^m\, w_m(\vartheta) = \sum_{m=k}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{m\,i}\, \varrho^m\, \vartheta^i. \tag{32}$$

Für x und y aus (29) erhält man daraus entsprechende Entwicklungen. Zur Bestimmung unserer Umlaufszahlen ist es nun offenbar zweckmäßig, die Null-

---

[8a]) Bei H. Fischer, a. a. O. [4]) ein ähnlicher Beweis, der für eine entsprechende Klasse von Nabelpunkten — also nicht wie behauptet, allgemein — gilt.

stellen von x und y heranzuziehen. Über die Nullstellen einer derartigen Funktion von zwei Veränderlichen aber gibt bekanntlich die Lehre der Puiseux-Entwicklungen Aufschluß.

Stellen wir deshalb zunächst einige der wichtigsten Tatsachen über diese Entwicklungen, soweit sie hier verwendet werden, zusammen[9]). Dabei lassen wir zunächst auch komplexe Entwicklungen zu, obwohl in unserem Falle nur die reellen eine Rolle spielen.

Sei

$$f(\varrho, \theta) = \sum_{0}^{\infty}{}_{i,k}\, \alpha_{ik}\, \varrho^i \theta^k \tag{33}$$

eine analytische Funktion der Veränderlichen ϱ und θ, die für $\varrho = \theta = 0$ verschwinden möge. Dann gibt es endlich viele „Nullstellen"

$$\theta = \sum_\mu \alpha_\mu \varrho^\mu \tag{34}$$

von $f(\varrho, \theta)$, die für $\varrho = 0$ in die Nullösung übergehen. Die μ sind dabei ansteigende positive rationale Zahlen, die sämtlich Vielfache eines Stammbruches $\frac{1}{p}$ sind. Der Einfachheit halber denken wir uns die Substitution

$$\varrho = r^p \tag{35}$$

durchgeführt. Dann werden sämtliche Lösungen (34) Potenzreihen in r.

Um zu untersuchen, welche Lösungen etwa mit einer q-ten Potenz von r anfangen:

$$\theta = \alpha \cdot r^q + \cdots, \tag{36}$$

kann man so vorgehen; man setzt in (33) ein

$$\theta = z \cdot r^q \tag{37}$$

und ordnet nach Potenzen von r, also

$$f(\varrho, \theta) = \sum_{\nu=k}^{\infty} r^\nu f_\nu(z) = \sum_{\nu=k}^{\infty} r^\nu f_\nu(\theta \cdot r^{-q}). \tag{38}$$

Die Ordnung des niedrigsten Polynoms $f_K(z)$ gibt dann an, wie viele Nullstellen (36) es gibt und die zugehörigen α lassen sich bestimmen aus der Gleichung

$$f_K(z) = 0. \tag{39}$$

Hat diese Gleichung Wurzeln 0, so bedeutet das, daß die entsprechenden Entwicklungen (36) mit höheren Potenzen von r als r^q anfangen.

---

[9]) Vgl. etwa A. Brill, Vorlesungen über ebene algebraische Kurven und algebraische Funktionen. Braunschweig 1925.

Für unsere Zwecke ist es auch nötig, feststellen zu können, wie viele Nullstellen mit bestimmten Anfangsgliedern:

$$\theta = \sum_{\sigma=q}^{\sigma=p-1} A_\sigma r^\sigma + \cdots = \varphi(r) + \cdots \tag{40}$$

anfangen.

Dazu führt man zuerst die Substitution

$$\begin{aligned} \varrho &= r^p, \\ \theta &= \varphi(r) + t \end{aligned} \tag{41}$$

durch, setzt dann $t = z \cdot r^q$ ein und geht weiter vor wie oben.

Sehen wir deshalb noch nach, wie sich die Substitution (41) auf die Gleichungen (26) auswirkt. Man erhält

$$\begin{aligned} r_\varrho &= \frac{1}{p} r^{1-p}, & t_\varrho &= -\frac{1}{p} r^{1-p} \varphi', \\ r_\theta &= 0, & t_\theta &= 1, \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} r_{\varrho\varrho} &= \frac{1-p}{p^2} r^{1-2p}, & t_{\varrho\varrho} &= -\frac{r^{-2p}}{p^2}\{(1-p) r \varphi' + r^2 \varphi''\}, \\ r_{\varrho\theta} &= 0, & t_{\varrho\theta} &= 0, \\ r_{\theta\theta} &= 0, & t_{\theta\theta} &= 0, \end{aligned} \tag{43}$$

und demnach wegen

$$\begin{aligned} w_\varrho &= w_r r_\varrho + w_t t_\varrho, \\ w_{\varrho\varrho} &= w_{rr} r_\varrho^2 + r\, w_{rt} r_\varrho t_\varrho + w_{tt} t_\varrho^2 + w_r r_{\varrho\varrho} + w_t t_{\varrho\varrho} \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

und wenn

$$r\varphi'(r) = \psi(r) \tag{44}$$

gesetzt wird

$$\begin{aligned} \varrho w_\varrho &= \frac{1}{p}(r w_r - \psi w_t), \\ w_\theta &= w_t, \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned} \varrho^2 w_{\varrho\varrho} &= \frac{1}{p^2}[r^2 w_{rr} - 2\psi r w_{rt} + \psi^2 w_{tt} + (1-p) r w_r + (p\psi - r\psi') w_t], \\ \varrho w_{\varrho\theta} &= \frac{1}{p}[r w_{rt} - \psi w_{tt}], \\ w_{\theta\theta} &= w_{tt}. \end{aligned} \tag{46}$$

Also:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{p^2}[-r^2 w_{rr} + 2 r \psi w_{rt} + (p^2 - \psi^2) w_{tt} + (2p-1) r w_r + \\ &\qquad + (r\psi' - 2p\psi) w_t], \\ y &= \frac{2}{p}[r w_{rt} - \psi w_{tt} - p w_t]. \end{aligned} \tag{47}$$

Wenn $\varphi(r) = \psi(r) = 0$ wird, ist insbesondere

$$x = \frac{1}{p^2}\,[-r^2 w_{rr} + (2p-1)\,r w_r + p^2 w_{tt}],$$
$$y = \frac{2}{p}\,[r w_{rt} - p w_t]. \tag{48}$$

Schließlich ist für uns noch wichtig, festzustellen, wie die Differentiation nach θ und r auf eine Entwicklung der Form (38) wirkt. Offenbar ist

$$\partial_\theta [r^\nu f_\nu(\theta r^{-q})] = r^{\nu-q} f'_\nu(\theta r^{-q}),$$
$$r\,\partial_r [r^\nu f_\nu(\theta r^{-q})] = \nu r^\nu f_\nu(\theta r^{-q}) - q\,\theta\, r^{\nu-q} f'_\nu(\theta r^{-q}).$$

Also

$$\partial_\theta [r^\nu f_\nu(z)] = r^{\nu-q} f'_\nu(z),$$
$$r\,\partial_r [r^\nu f_\nu(z)] = r^\nu [\nu f_\nu(z) - q z f'_\nu(z)]. \tag{49}$$

Bei Differentiation nach θ verringert sich also das Gewicht unseres Gliedes um q, bei Anwendung des Operators $r\partial_r$ bleibt es erhalten. Das soll später Verwendung finden.

§ 5.

Singuläre Stellen nullter Stufe.

Denken wir uns, daß die rechten Glieder in (30) für $\theta = \theta_0$ beide eine mindestens doppelte Nullstelle haben. Wir nennen dann θ_0 eine singuläre Stelle nullter Stufe der Kennlinie.

Zur Untersuchung können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\theta_0 = 0$ voraussetzen. Wir denken uns eine Substitution (35) ausgeführt, derart, daß sämtliche Nullstellen der durch (26) definierten Funktionen x und y sowie auch von $w_{\varrho\varrho}$, für die für $\varrho = 0$ auch $\theta = 0$ wird, durch Potenzreihen in r dargestellt werden, also die Form haben

$$\theta = \sum_{\nu=q}^{\infty} \alpha_\nu r^\nu. \tag{50}$$

r^q möge die niedrigste Potenz von r sein, die in den Entwicklungen für die Nullstellen von x und y vorkommt, M sei so bestimmt, daß für alle Koeffizienten von r^q in diesen Entwicklungen

$$|\alpha_q| < M \tag{51}$$

gilt.

Für genügend kleines r liegen dann alle Schnittpunkte der Kennlinie (29) mit den Achsen innerhalb des Intervalls

$$-M r^q < 0 < M r^q. \tag{52}$$

Insbesondere liegen etwa die Punkte A und A_1 von Kennlinie und Hauptkennlinie, die zum Parameterwert $0 = Mr^q$ gehören, im selben Quadranten und dasselbe gilt für die zum Parameterwert $-Mr^q$ gehörigen Punkte B und B_1. Verbinden wir jetzt (Fig. 5) die Punkte B und A durch einen einfachen Zug BCA, der links am Nullpunkt vorbeiläuft und die Kennlinie nicht trifft, und ebenso B_1 und A_1 durch den Zug $B_1 C_1 A_1$, der die Hauptkennlinie nicht trifft, so ist

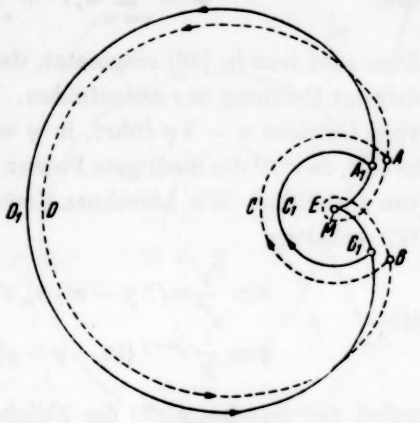

Fig. 5.

$$N_{ADBEA} = N_{ADBCA} + N_{ACBEA}, \tag{53}$$

weiter aber

$$N_{ADBCA} = N_{A_1 D_1 B_1 C_1 A_1} \geqq 0, \tag{54}$$

weil die Kurven $ADBCA$ und $A_1 D_1 B_1 C_1 A_1$ sich ineinander deformieren lassen, ohne den Nullpunkt zu durchschreiten und die rechte zur Hauptkennlinie topologisch gleichwertig ist.

Zeigt man also noch, daß

$$N_{ACBEA} \geqq 0, \tag{55}$$

so ist die Behauptung bewiesen. Es braucht also nur noch der Verlauf der Kennlinie im Intervall (52), also in der Umgegend jedes singulären Punktes untersucht zu werden. Die Kurve $ACBEA$ nennen wir den zur singulären Stelle gehörigen kritischen Ausschnitt der Kennlinie. Hierbei denken wir uns stets die Abschließung durch den Bogen BCA vorweggenommen[10]).

Um nun (55) zu beweisen, verschafft man sich eine bessere Annäherung dieser Kurve als sie die Hauptkennlinie darstellt. Nach der Substitution (35) geht (26) wie wir sahen über in (48), wobei noch $0 = t$ gesetzt ist. Setzen wir noch

$$t = z \cdot r^q, \tag{56}$$

so haben wir das Intervall

$$-M \leqq z \leqq M \tag{57}$$

der Kennlinie zu untersuchen.

---

[10]) In der Fig. 5 ist die Kennlinie (29) punktiert, die Hauptkennlinie (30) ausgezogen gezeichnet. Es ist angenommen, daß nur ein singulärer Punkt vorliegt, sind mehrere vorhanden, so muß man alle in derselben Weise behandeln. Geht die Hauptkennlinie noch an weiteren Stellen durch den Nullpunkt, ohne dort singulär zu werden, so muß man sie dort an derselben Seite wie die Kennlinie an den Nullpunkt vorbeiführen. Wie man sieht, kommt dann alles darauf an, daß für die Umgebung jeder singulären Stelle (55) gezeigt wird.

Wir denken uns nun die Funktion $w(\varrho, 0)$ nach r und z entwickelt und dabei die von z unabhängigen Glieder vorweggenommen:

$$w = \sum_{\nu=m}^{n-1} a_\nu r^\nu + \sum_{\nu=n}^{\infty} r^\nu f_\nu(z), \qquad m \geqq 3p. \tag{58}$$

Dies wird nun in (48) eingesetzt, dabei kommt es darauf an, die Glieder niedrigster Ordnung in r aufzufinden. In x kommt nun w_{tt} vor, was auf Glieder vom Gewicht $n-2q$ führt, in y wird aber nur einmal nach t differenziert, so daß, da r^{n-q} die niedrigste Potenz von r sein wird, deren Koeffizient wirklich von z abhängt. Wir berechnen deshalb $x \pmod{r^{n-2q+1}}$ und $y \pmod{r^{n-q+1}}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} x &\equiv \frac{1}{p^2} m(2p-m)\, a_m r^m + o(r^m) + r^{n-2q} f_n''(z) \pmod{r^{n-2q+1}}, \\ y &\equiv \frac{1}{p} r^{n-q} \{(n-p-q) f_n'(z) - qz f_n''(z)\} \pmod{r^{n-q+1}}, \end{aligned} \tag{59}$$

wobei das Symbol $o(r^m)$ die übliche Bedeutung hat, also Glieder darstellt, die r in höherer Potenz als der m-ten enthalten.

Nun muß aber x Nullstellen haben, deren Entwicklung mit r^q anfängt, das niedrigste Glied in der Entwicklung darf also nicht von z unabhängig sein. Also ist

$$m \geqq n - 2q \tag{60}$$

und es wird

$$o(r^m) \equiv 0 \pmod{r^{n-2q+1}}.$$

(59) nimmt dann die Gestalt an:

$$\begin{aligned} x &\equiv r^{n-2q} \{f_n'' + C\} \pmod{r^{n-2q+1}}, \\ y &\equiv r^{n-q} \{(n-p-q) f_n' - q f_n''\} \pmod{r^{n-q+1}}, \end{aligned} \tag{61}$$

wobei

$$C = \frac{1}{p^2} a_{n-2q} (n-2q)(2p-n+2q)$$

gesetzt ist.

Man sieht daraus, daß die Kennlinie in unserem Intervall (57) affin ist zu

$$\begin{aligned} x &= f_n'' + C + o(r), \\ y &= (n-p-q) f_n' - q f_n'' + o(r). \end{aligned} \tag{62}$$

Für genügend kleines r liegt die Kurve (62) in unserem Intervall in einem beliebig schmalen Streifen um die Kurve

$$\begin{aligned} x &= f_n'' + C, \\ y &= (n-p-q) f_n' - q f_n''. \end{aligned} \tag{63}$$

Wir wollen (63) die Kennlinie unserer singulären Stelle nennen. Zu den Parameterwerten $z = \pm M$ mögen auf ihr die Punkte B_2 und A_2 gehören, auf der Kurve (62) seien B und A die entsprechenden Punkte (Fig. 6).

Wir können in die Figur noch das affine Abbild des Bogens BCA eintragen, das wir wieder mit denselben Buchstaben bezeichnen; da dieser Bogen den Nullpunkt linkshalten muß, verbindet er B mit A im negativen Umlaufssinn. Der Bogen ACB läßt sich also in den positiv umlaufenen Kreisbogen $A_2 C_2 B_2$ stetig überführen, mit dem wir die Kennlinie (63) zu einer geschlossenen Kurve abschließen können. Es ist also

$$N_{ACBEA} = N_{A_2 C_2 B_2 E_2 A_2}.$$

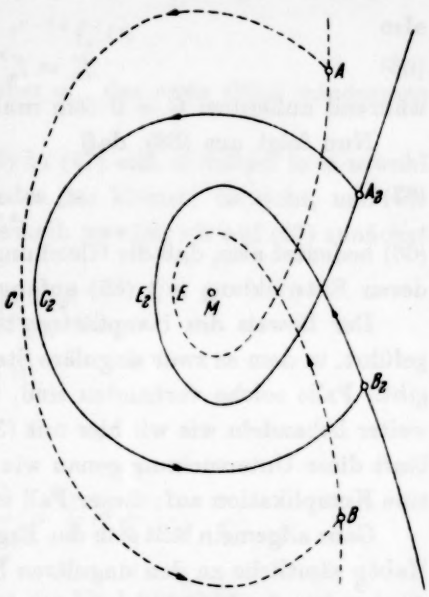

Fig. 6.

Diese letzte Umlaufszahl ist aber nicht negativ, denn auf die Kennlinie (63) läßt sich Satz IIa anwenden; durch die Drehung $y^* = x$, $x^* = -y$ nimmt (63) die Gestalt (19) an. Zu zeigen ist nur, daß die Nebenbedingung (16), die hier lautet

$$n - p - q - (k-1)\,q > 0, \tag{64}$$

erfüllt ist. Dabei soll k die Ordnung des Polynoms $f_n(z)$ bedeuten.

Sei nun

$$f_n(z) = b_0 z^k + b_1 z^{k-1} + \cdots + b_{k-1} z + b_k,$$

dann ist

$$r^n f_n(z) = b_0 r^{n-kq} \vartheta^k + \cdots.$$

Da nun in jedem Glied der Entwicklung von w nach ϱ und ϑ wegen (21) mindestens $\varrho^3 = r^{3p}$ vorkommt, ist

$$n - kq \geqq 3p.$$

Daraus folgt sofort (64).

Hiermit ist die Behauptung (55) bewiesen für den Fall, daß die Kennlinie (63) unserer singulären Stelle nicht durch den Nullpunkt geht. Dabei kann wieder nur dann die Kurve (62) neue Schleifen um den Nullpunkt besitzen, wenn für einen bestimmten Wert von z, etwa $z = \alpha$, in (63) nicht nur x und y, sondern auch x' und y' verschwinden. Wir nennen dann

$$\vartheta = \vartheta_0 + \alpha r^q \tag{65}$$

eine singuläre Stelle ler Stufe eins. An einer solchen Stelle ist offenbar

$$f_n'' + C = f_n''' = (n-p-q) f_n' - q f_n'' = (n-p-q) f_n'' - q f_n''' = 0,$$

also

$$f_n' = f_n'' = f_n''' = 0, \tag{66}$$

während außerdem $C = 0$ sein muß

Nun folgt aus (58), daß

$$w_\varrho = \sum_{\nu=n}^{\infty} r^{\nu-q} f_\nu'(z). \tag{67}$$

(66) bedeutet also, daß die Gleichung $w_\varrho = 0$ mindestens drei Nullstellen hat, deren Entwicklung mit (65) anfängt.

Der Beweis des Hauptsatzes ist jetzt offenbar in dem Falle zu Ende geführt, in dem es zwar singuläre Stellen nullter Stufe, aber keine erster Stufe gibt. Falls solche vorhanden sind, so muß man die Kennlinie (63) ähnlich weiter behandeln wie wir hier mit (30) vorgegangen sind. Ist $\alpha = 0$, so verläuft diese Untersuchung genau wie oben. Ist dagegen $\alpha \neq 0$, so tritt noch eine Komplikation auf; dieser Fall wird im nächsten Paragraphen behandelt.

Ganz allgemein läßt sich das Ergebnis dieses Paragraphen so formulieren: Haben sämtliche zu den singulären Stellen nullter Stufe gehörigen kritischen Ausschnitte der Kennlinie nichtnegative Umlaufszahl, so gilt dasselbe für die Kennlinie (29) des Nabels. Die Bedingung ist sicher erfüllt, wenn es keine singulären Stellen der Stufe eins gibt.

§ 6.

Singuläre Stellen höherer Stufe. Allgemeiner Beweis des Hauptsatzes.

Wenn x und y beide Nullstellen aufweisen, deren Entwicklung etwa mit (40) anfängt, so wird es notwendig, die Kennlinie in einer entsprechenden Umgebung dieser Stelle zu untersuchen. Dazu führen wir zunächst die Transformation (41) durch, wobei (26) die Gestalt (47) annimmt. $\varphi(r)$ wird dabei von Null verschieden, also auch von r wirklich abhängig vorausgesetzt.

Enthält $\varphi(r)$ nur ein Glied, so haben wir eben gesehen, daß auch w_ϱ an der Stelle (40) mindestens eine dreifache Nullstelle hat. Das gilt nicht allgemein; bei den Stellen, die wir zu betrachten haben, wird aber stets $w_{\varrho\varrho}$ eine mindestens doppelte Nullstelle haben. Das besagt offenbar etwas weniger.

Nehmen wir dies also für die zu untersuchende Stelle (40) als richtig an. Dann kann die Entwicklung für w an unserer Stelle (40) nach der Substitution

$$t = z \cdot r^\vartheta \tag{68}$$

in der Form angesetzt werden

$$w(\varrho, 0) = \sum_{\nu=l}^{m-1} a_\nu r^\nu + \sum_{\nu=m}^{n-1} (b_\nu z + c_\nu) r^\nu + \sum_{\nu=n}^{\infty} r^\nu f_\nu(z), \tag{69}$$

wobei die erste nichtlineare Funktion $f_n(z)$ mindestens von vierter Ordnung ist. Denn es ist

$$w_{\vartheta\vartheta} = w_{tt} = \sum_{\nu=n}^{\infty} r^{\nu-2s} f_\nu''(z) \tag{70}$$

und hier ist wegen der Voraussetzung über $w_{\vartheta\vartheta}$ das erste Glied mindestens quadratisch in z.

Setzt man nun die Entwicklung (69) in (47) ein, so haben in x sowohl wie in y die von w_{tt} herrührenden Glieder das kleinste Gewicht, und wir erhalten keine vernünftige Kennlinie. Deshalb wenden wir auf (47) zunächst die affine Transformation an:

$$\begin{aligned} x^* &= \psi x + \frac{p^2 - \psi^2}{2p} y, \\ y^* &= \frac{1}{2q A_q} y \text{ [11]}. \end{aligned} \tag{71}$$

Die Substitutionsdeterminante

$$\begin{vmatrix} \psi & \frac{p^2-\psi^2}{2p} \\ 0 & \frac{1}{2qA_q} \end{vmatrix} = \frac{\psi}{2qA_q} = \frac{1}{2} r^q + \cdots \tag{72}$$

ist für genügend kleine r positiv, also ist die Umlaufszahl in bezug auf die neuen Achsen dieselbe wie die in bezug auf die alten

Es wird jetzt

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{1}{p^3}[-\psi r^2 w_{rr} + (p^2+\psi^2) r w_{rt} + (2p-1)\psi r w_r + \\ &\qquad + (r\psi\psi' - p\psi^2 - p^3) w_t], \\ y^* &= \frac{1}{qpA_q}[r w_{rt} - \psi w_{tt} - p w_t]. \end{aligned} \tag{73}$$

Setzt man hier (69) ein, so erhält man in derselben Weise wie in § 5

$$\begin{aligned} x^* &\equiv F(r) + z \cdot o(r^{m+q-1}) + r^{n-s}[(n-p-s) f_n' - s z f_n''] \pmod{r^{n-s+1}}, \\ y^* &\equiv \frac{1}{qpA_q} r^{m-s}(m-s-p) p_m + o(r^{m-s}) - \frac{1}{p} r^{n-2s+q} f_n'' \pmod{r^{n-2s+q+1}}. \end{aligned} \tag{74}$$

Da y eine Nullstelle haben soll, darf das niedrigste Glied nicht konstant sein, also ist

$$m - s \geqq n - 2s + q, \qquad m \geqq n - s + q.$$

Daher ist das zweite Glied in x^* kongruent Null nach dem Modul.

Ist das niedrigste nichtverschwindende Glied in x^* konstant, enthält also $F(r)$ Glieder von kleinerem Gewicht als $n - s$, dann ist für genügend kleines r die Größe x^* im Intervall (57) definit, die Kennlinie kann also in

[11]) Hier ist $A_q \neq 0$ vorausgesetzt. Ist bei unserer Stelle erst ein höheres Glied etwa das q_1-te, als erstes von Null verschieden, so muß überall q_1 an die Stelle von q geschrieben werden.

diesem Intervall keine Schleife um den Nullpunkt bilden. Dieser Fall braucht also nicht weiter betrachtet zu werden.

Ist aber $n - s$ das niedrigste Gewicht in x^*, so wird

$$(75)\qquad \begin{aligned} x^* &\equiv r^{n-s}\,[(n-p-s)\,f_n'' - s\,z\,f_n' + a] \pmod{r^{n-s+1}},\\ y^* &\equiv -\frac{1}{p}\,r^{n-2s+q}\,[f_n''' + b] \pmod{r^{n-2s+q+1}} \end{aligned}$$

bei konstanten a und b. Die Kennlinie

$$(76)\qquad \begin{aligned} x^* &= (n-p-s)\,f_n'' - s z\,f_n' + a\\ y^* &= -(f_n''' + b) \end{aligned}$$

unserer Stelle hat hier wieder bis auf Vorzeichenwechsel von x und y die Gestalt (19). Sie hat also auf Grund von Satz IIa nichtnegative Umlaufszahl.

Wir wenden diese Betrachtungen jetzt an auf „singuläre Stellen k-ter Stufe", die wir rekursiv folgendermaßen definieren. Die singulären Stellen erster Stufe wurden in § 5 erklärt. Sei nun (40) eine singuläre Stelle k-ter Stufe. Haben dann x und y aus (76) für $z = \alpha$ je eine mindestens doppelte Nullstelle, so nennen wir

$$(77)\qquad 0 = \varphi(r) + \alpha r^s$$

eine singuläre Stelle der Stufe $k + 1$.

Wir zeigen jetzt zunächst, daß die Eigenschaften, die wir bei unserer Untersuchung für die Stelle (40) vorausgesetzt haben, für eine singuläre Stelle beliebiger Stufe erfüllt sind, also daß nicht nur x^* und y^* dort verschwinden, sondern auch x und y und w_{vv} dort eine mindestens doppelte Nullstelle hat.

Für singuläre Stellen der Stufe 1 sind diese Eigenschaften vorhanden. Nehmen wir also an, sie sind für die singuläre Stelle (40) der Stufe k erfüllt, so müssen wir sie nur für die singuläre Stelle (77) der Stufe $k + 1$ beweisen. Nun ist y bis auf einen konstanten Faktor mit y^* identisch, hat also eine Nullstelle. Weiter ist

$$\psi x \equiv \frac{p^2 - \psi^2}{p}\,y \pmod{r^{n-s}} \equiv -A_q(f_n''' + b) \pmod{r^{n-2s+q+1}}.$$

Also hat auch x eine Nullstelle, die mit (77) anfängt, das Polynom $f_n''' + b$ ist ja mit dem niedrigsten Glied in y^* identisch und verschwindet deshalb für $z = \alpha$.

Da schließlich x^* und y^* für $z = \alpha$ je eine doppelte Nullstelle haben sollen, so ist dort

$$\begin{aligned} (n-p-s)\,f_n' - s z\,f_n'' + a = 0, \quad & f_n''' + b = 0,\\ (n-p-s)\,f_n'' - s z\,f_n''' = 0, \quad & f_n'''' = 0 \end{aligned}$$

und deshalb

$$(78)\qquad f_n'' = f_n''' = 0, \quad b = 0.$$

Daraus folgt aber wegen (70) die Behauptung über w_{vv}.

Die obigen Untersuchungen lassen sich also auf jede singuläre Stelle anwenden.

Definieren wir jetzt wie in § 5 den zur singulären Stelle k-ter Stufe gehörigen kritischen Ausschnitt der Kennlinie des Nabels, der also aus dem Bogen

$$(79) \qquad -M \leqq z \leqq M, \quad \varphi(r) - Mr^3 \leqq 0 \leqq \varphi(r) + Mr^3$$

dieser Kennlinie durch Verbinden der Endpunkte im positiven Umlaufssinn entsteht, so sieht man genau wie dort ein:

Ein kritischer Ausschnitt k-ter Stufe der Kennlinie des Nabels hat stets dann nichtnegative Umlaufszahl, wenn dasselbe für die in ihm enthaltenen kritischen Ausschnitte der Stufe $k+1$ gilt, insbesondere also, wenn es auf ihm keine Singularitäten höherer Stufe gibt.

Nun kann es aber keine Singularitäten von beliebig hoher Stufe geben. Denn das würde heißen, daß x und y der Kurve (26) eine gemeinsame Nullstellenentwicklung hätten, dann aber ginge diese Kurve für jede Wahl von r durch den Nullpunkt, was ausgeschlossen worden war.

Die kritischen Ausschnitte höchster Stufe haben nach dem Vorangehenden nichtnegative Umlaufszahl; wenden wir vollständige Induktion nach abnehmender Stufenzahl an, so finden wir, daß jeder Ausschnitt nullter Stufe, und damit nach § 5, daß auch die Kennlinie des Nabels nichtnegative Umlaufszahl hat.

Damit ist der Hauptsatz allgemein bewiesen.

In § 1 wurde vorausgesetzt, daß $w(u, v)$ in einer Umgebung des Nabels eine analytische Funktion von u und v sein sollte. Diese Voraussetzung wurde nirgendwo voll benutzt, vielmehr genügt in jedem Fall das Vorhandensein einer Taylorformel mit genügend vielen Gliedern, wobei das Restglied in der üblichen Weise abgeschätzt werden kann. Für die Anzahl der benötigten Glieder läßt sich allerdings keine obere Schranke angeben.

Weiter sei vermerkt, daß die Reihenentwicklung (9) an keiner Stelle gebraucht wurde, sondern nur die aus ihr hergeleitete Reihe (21). Der Hauptsatz gilt also schon, wenn für w nur eine Entwicklung der Form (21) vorhanden ist. Diese Voraussetzung ist viel schwächer, denn wenn (21) aus (9) hervorgeht, so ist $w_m(\theta)$ ein trigonometrisches Polynom der Ordnung m.

Noch allgemeiner gilt aber:

Der Hauptsatz ist auch für jeden Nabel richtig, in dessen Umgebung sich w in eine Reihe

$$(80) \qquad w = \varrho^{\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho^{\beta\nu} f_\nu(\theta), \quad \alpha > 2, \ \beta > 0$$

entwickeln läßt, wobei die $f_\nu(\theta)$ analytische Funktionen der Periode 2π sein sollen. α und β brauchen dabei nicht einmal rational zu sein.

Der vorangehende Beweis läßt sich nämlich auf diesen Fall sofort übertragen.

Wenn (80) gilt, so ist w_{uu} im Nullpunkt nicht mehr erklärt, strebt aber für $u \to 0$ nach Null. Gilt jedoch eine Entwicklung (80) mit $\alpha < 2$, so hat w_{uu} für $u \to 0$ im allgemeinen keinen Grenzwert. Der Nullpunkt ist aber auch dann eine singuläre Stelle des Krümmungsliniennetzes und die Fläche hat für $\alpha > 1$ dort sogar eine stetige Tangentenebene.

Für solche „Nabel" gilt der Hauptsatz nicht mehr, so hat etwa der Nabel

$$w = \overset{3}{\varrho} (21 \cos 2\theta - 2 \cos 6\theta)$$

die Kennziffer -4. Hier versagt also der Ansatz, durch Betrachtung der Kennziffer allein kommt man nicht zum Ziel [12]).

§ 7.

Ausblick auf verwandte Fragen.

Es ist naheliegend, Verallgemeinerungen unseres Hauptsatzes zu suchen. Zunächst kann man versuchen, den Satz auf andere Ableitungen als die zweite zu übertragen; wenn die erste Ableitung unserer Funktion $w(u, v)$ im Nullpunkt eine isolierte Nullstelle hat, so wird man vermuten, daß bei einem Umlauf

$$\Delta \arg w_u \geqq -2\pi \tag{81}$$

ausfällt; gilt dasselbe für die n-te, $(n \geqq 3)$, so erwartet man

$$\Delta \arg \frac{\partial^n w}{\partial u^n} \geqq -2\pi n. \tag{82}$$

Über die letztere Vermutung ist nichts bekannt, nicht einmal für $n = 3$. Vermutlich würde man hier zum Ziel kommen, wenn man entsprechend Satz I beweisen könnte, daß die Umlaufszahl einer Kurve der Gestalt

$$\begin{aligned} x &= f''' - Af', \\ y &= f'' - Bf, \end{aligned} \tag{83}$$

wo f periodisch ist und A und B positive Konstanten sind, nichtnegativ ist. Mit der Methode von § 2 scheint man hier aber nicht durchzukommen.

Dagegen läßt sich (81) ähnlich wie der Hauptsatz beweisen. Der Satz läßt sich aber auch leicht direkt zeigen. Setzt man zunächst

$$\begin{aligned} u &= a + ib, \\ v &= a - ib, \end{aligned} \tag{84}$$

---

[12]) Das Beispiel ist einem Ansatz von H. FISCHER nachgebildet [a. a. O.[4]), S. 183, die Koeffizienten sind abgeändert worden, weil FISCHERs Beispiel einen Rechenfehler enthält].

so wird w eine reelle analytische Funktion von a und b und man hat:

$$w_u = w_a - i\, w_b. \tag{85}$$

$\arg w_u$ ist also nichts anderes als der Winkel ψ, den der Gradientvektor (w_a, w_b) mit der a-Achse einschließt, negativ genommen und man muß zeigen, daß

$$\Delta \psi \leqq 2\pi \tag{86}$$

gilt.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $w(0, 0) = 0$ voraussetzen. Die Niveaulinien der Funktion w sind dann entweder geschlossene Kurven, die den Nullpunkt umkreisen — wenn w im Nullpunkt ein Maximum oder Minimum hat —, oder es gibt endlich viele Kurven, die vom Nullpunkt ausgehen, auf denen w verschwindet.

Diese teilen die Umgebung des Nullpunktes in eine gerade Anzahl $2m$ von Sektoren ein, in denen w abwechselnd positives und negatives Vorzeichen hat.

Da der Gradientvektor einer Funktion stets senkrecht auf den Niveaulinien steht, ist im ersten Fall offenbar $\Delta \psi = 2\pi$. Im zweiten sei in der Fig. 7 einer der Sektoren gezeichnet. Wegen des hyperbelähnlichen Verlaufes der Niveaulinien ist für den Teil des Umlaufes, der im Sektor liegt,

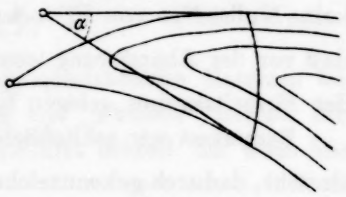

Fig. 7.

$$\Delta \psi = \alpha - \pi,$$

wo α den Winkel darstellt, den die Tangenten an die Begrenzungskurven des Sektors im Eintritts- und Austrittspunkt einschließen. Summiert man über alle Sektoren, so ergibt sich

$$\Delta \psi = 2\pi - 2m\pi.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Schließlich sei noch auf einen Satz über Polynome hingewiesen, der — wie W. Blaschke bemerkt hat — aus einem Sonderfall des Hauptsatzes leicht hervorgeht.

Sei nämlich $w(u, v)$ homogen von k-ter Ordnung:

$$w(u, v) = w_k(u, v) = \sum_{i=0}^{k} a_i u^i v^{k-i}, \qquad a_i = \bar{a}_{k-i}. \tag{87}$$

Setzen wir $u = vz$, so wird

$$w(u, v) = v^k \sum_{i=0}^{k} a_i z^i = v^k P_k(z), \tag{88}$$

$$v^k P_k''(z) = w_{zz} = v^2 w_{uu}. \tag{89}$$

Da bei einem Umlauf um den Nullpunkt

$$\Delta \arg v = -2\pi$$

gilt, ist also

$$\Delta \arg w_{uu} = -(k-2)\,2\pi + \Delta \arg P_k''(z)$$

und da das linke Glied nach dem Hauptsatz $\geqq -4\pi$ ist, findet man

$$\Delta \arg P_k''(z) \geqq 2\pi(k-4). \tag{90}$$

Durchläuft u einen Kreis vom Radius ϱ, so durchläuft z den Einheitskreis zweimal. Also:

Wenn z den Einheitskreis durchläuft, ist die Zunahme des Argumentes von $P_k''(z)$ mindestens $\left(\frac{k}{2}-2\right)2\pi$, $P_k''(z)$ hat also im Einheitskreis mindestens $\frac{k}{2}-2$ Nullstellen.

Bisher wurde stets vorausgesetzt, daß $P_k''(z)$ auf dem Einheitskreis keine Nullstelle hat. Ist eine solche vorhanden, so wird man die Koeffizienten von $P_k(z)$ unter Erhaltung der Bedingung $a_i = \bar{a}_{k-i}$ stetig so abändern, daß keine Nullstellen von P_k'' mehr auf dem Einheitskreis liegen. Dann sieht man, daß vor der Abänderung wenigstens $\frac{k}{2}-2$ im Innern oder auf dem Rande des Einheitskreises gelegen haben müssen.

Bemerken wir schließlich, daß unsere Polynome $P_k(z)$, wie man leicht einsieht, dadurch gekennzeichnet sind, daß mit α stets auch $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ eine Nullstelle ist, so finden wir:

Ist $P_k(z)$ ein Polynom k-ter Ordnung in z, dessen Nullstellenfigur bei Spiegelung am Einheitskreis in sich übergeht, so hat $P_k''(z)$ im Innern und auf dem Rande des Einheitskreises mindestens $\frac{k}{2}-2$ Nullstellen.

Dieser Satz wurde, wie mir Herr Blaschke mitteilt, zuerst von G. Bullig bewiesen (unveröffentlicht). Vermerkt sei, daß bei dem obigen Beweis der Hauptsatz nur im regulären Fall angewendet wird, man kommt also mit Satz I und § 3 aus.

Aus (81) folgt übrigens in derselben Weise, daß $P_k'(z)$ im Innern und auf dem Rande des Einheitskreises mindestens $\frac{k}{2}-1$ Nullstellen hat. In (82) wäre die entsprechende Aussage über die n-te Ableitung von $P(z)$ enthalten. Diese würde für $n=3$ übrigens auch schon aus der oben formulierten Vermutung über die Kurve (83) hervorgehen.

(Eingegangen am 10. März 1943.)

Neue Lösungen der Funktionalgleichung für Matrizen $\Phi(X)\,\Phi(Y) = \Phi(XY)$.

Von

Paul Reisch in München.

§ 1.

Einleitung.

Im Band 48 dieser Zeitschrift, S. 136—172, hat O. Perron in der Arbeit „Über eine für die Invariantentheorie wichtige Funktionalgleichung" die Funktionalgleichung

$$\Phi(X)\,\Phi(Y) = \Phi(XY) \tag{1}$$

behandelt, wo Φ eine ν-reihige, X, Y n-reihige quadratische Matrizen bedeuten. Diese Arbeit wird im folgenden kurz mit „Perron" zitiert; insbesondere verweisen wir auf ihren ersten Abschnitt betreff der auch hier gebrauchten Bezeichnungen.

Die Funktionalgleichung (1) war bereits früher Gegenstand der Untersuchungen von I. Schur[1]), der für den Fall, daß die Elemente von Φ Polynome in den Elementen x_{pq} von X sind, mit algebraischen Methoden eine Reihe von allgemeinen Sätzen über die Lösungen $\Phi(X)$ bewiesen hat.

Unseren Ausgangspunkt bildet folgender Satz, der die Sätze 7, 8, 9 bei Perron zusammenfaßt:

Die in der Umgebung von $X = E$ analytischen Lösungen der Gleichung (1) *mit $\Phi(E) = \mathsf{E}$ sind identisch mit den Lösungen eines Systems von partiellen Differentialgleichungen*

$$|X|\,\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{sq}} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}}\,\Phi(X)\,\mathsf{A}^{pq} \qquad (s, q = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

die dieselben Bedingungen erfüllen. Hier sind die A^{pq} gewisse konstante Matrizen, nämlich

$$\mathsf{A}^{pq} = \left\{\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{pq}}\right\}_{X=E}, \tag{3}$$

[1]) I. Schur, Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen. Diss. Berlin 1901; Über die rationalen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1927, S. 58—75.

die den Integrabilitätsbedingungen

$$\mathsf{A}^{pq}\mathsf{A}^{rs} - \mathsf{A}^{rs}\mathsf{A}^{pq} = e_{rq}\mathsf{A}^{ps} - e_{ps}\mathsf{A}^{rq} \tag{4}$$

$$(p, q, r, s = 1, \ldots, n)$$

genügen müssen[2]).

Sind für gegebene Matrizen A^{pq} die Bedingungen (4) erfüllt, so hat das Differentialgleichungssystem (2) genau eine Lösung der verlangten Art (PERRON, Satz 10).

Die Frage nach der expliziten Angabe von nichttrivialen, irreduziblen[3]) Lösungen wird von PERRON für die Fälle $n = 1$, wo die Matrix X sich auf ein Element x reduziert, und $\nu = 1, 2, 3$, wo also die Matrix Φ die betreffende Reihenzahl hat, vollständig erledigt.

In der vorliegenden Arbeit werden im § 2 für beliebiges ν in einem speziellen Fall alle Lösungen angegeben, nämlich wenn die nach (3) definierte Matrix $\mathsf{A}^{11} - \lambda\mathsf{E}$ (und damit, wie sich zeigen wird, alle Matrizen $\mathsf{A}^{pp} - \lambda\mathsf{E}$) lauter *lineare, verschiedene Elementarteiler* hat. Im § 3 wird für $\nu = 4$ noch eine Lösung $\Phi(X)$ gebracht, in der nicht alle Elemente Polynome in den x_{pq} sind.

§ 2.

Der Fall linearer, verschiedener Elementarteiler von $\mathsf{A}^{11} - \lambda\mathsf{E}$.

Wir nehmen an, die Matrix $\mathsf{A}^{11} - \lambda\mathsf{E}$ habe lauter verschiedene, lineare Elementarteiler. Durch Übergang zu einer äquivalenten Lösung kann man erreichen, daß

$$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2^1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_\nu^1 \end{pmatrix} \qquad (\alpha_\iota^1 \neq \alpha_\varkappa^1 \text{ für } \iota \neq \varkappa) \tag{5}$$

ist.

Aus (4) folgt für $q = p > 1$, $r = s = 1$

$$\mathsf{A}^{pp}\mathsf{A}^{11} - \mathsf{A}^{11}\mathsf{A}^{pp} = 0 \qquad (p = 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Sei

$$\mathsf{A}^{pp} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^p & \alpha_{12}^p & \ldots & \alpha_{1\nu}^p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\nu 1}^p & \alpha_{\nu 2}^p & \ldots & \alpha_{\nu\nu}^p \end{pmatrix}; \tag{7}$$

---

[2]) Die Differentialgleichungen (2) mit den Integrabilitätsbedingungen (4) kommen schon bei CARTAN vor gelegentlich der Theorie der Darstellung stetiger halbeinfacher Gruppen; vgl. E. CARTAN, Sur la structure des groupes de transformations finis et continus. Thèse, 2e édition, Paris 1933, S. 131–132.

[3]) Wegen der Begriffe: triviale, reduzible und irreduzible, äquivalente Lösungen, sowie wegen ihrer Eigenschaften vgl. PERRON, § 2 und § 6, S. 154.

dann lautet die Bedingung (6):

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}^{p}\alpha_1^1 & \alpha_{12}^{p}\alpha_2^1 & \dots & \alpha_{1\nu}^{p}\alpha_\nu^1 \\ \alpha_{21}^{p}\alpha_1^1 & \alpha_{22}^{p}\alpha_2^1 & \dots & \alpha_{2\nu}^{p}\alpha_\nu^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu 1}^{p}\alpha_1^1 & \alpha_{\nu 2}^{p}\alpha_2^1 & \dots & \alpha_{\nu\nu}^{p}\alpha_\nu^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{p}\alpha_1^1 & \alpha_{12}^{p}\alpha_1^1 & \dots & \alpha_{1\nu}^{p}\alpha_1^1 \\ \alpha_{21}^{p}\alpha_2^1 & \alpha_{22}^{p}\alpha_2^1 & \dots & \alpha_{2\nu}^{p}\alpha_2^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu 1}^{p}\alpha_\nu^1 & \alpha_{\nu 2}^{p}\alpha_\nu^1 & \dots & \alpha_{\nu\nu}^{p}\alpha_\nu^1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, daß wegen (5) auch A^{pp} die Gestalt hat

$$\mathsf{A}^{pp} = \begin{pmatrix} \alpha_1^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^p & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_\nu^p \end{pmatrix} \qquad (p = 2, \dots, n). \tag{8}$$

Indem wir eventuell wieder zu einer äquivalenten Lösung übergehen, können wir erreichen, daß A^{11} folgende Form annimmt:

$$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{B}_k \end{pmatrix}, \tag{9}$$

wobei

$$\mathfrak{B}_\varkappa = \begin{pmatrix} \beta_1^\varkappa & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2^\varkappa & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{\nu_\varkappa}^\varkappa \end{pmatrix} \quad (\varkappa = 1, \dots, k;\ \nu_1 + \dots + \nu_k = \nu)$$

und die $\beta_\iota^\varkappa$, die in ihrer Gesamtheit mit den α_ι^1 übereinstimmen, dabei so angeordnet sein sollen, daß

$$\beta_\iota^\varkappa - \beta_{\iota+1}^\varkappa = 1 \qquad (\iota = 1, \dots, \nu_\varkappa - 1), \tag{10}$$

$$\beta_\iota^\varkappa - \beta_\mu^\lambda \neq \pm 1 \quad (\varkappa \neq \lambda;\ \iota = 1, \dots, \nu_\varkappa;\ \mu = 1, \dots, \nu_\lambda). \tag{10 a}$$

Wegen (5) ist dies möglich. Unter Umständen ist nur eine Serie β_ι^1 $(\iota = 1, \dots, \nu)$ vorhanden, oder auch lauter einzelne $\beta_1^\varkappa$ $(\varkappa = 1, \dots, \nu)$.

Nach Perron, Satz 15, S. 156, haben dann die Matrizen A^{p1}, A^{1p} infolge der Bedingungen (4) das Aussehen

$$\mathsf{A}^{p1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_1^p & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{B}_k^p \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{1p} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}_1^p & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{C}_k^p \end{pmatrix}, \tag{11}$$

wobei

$$\mathfrak{B}_x^p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_2^{px} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_3^{px} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{\nu_x}^{px} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{C}_x^p = \begin{pmatrix} 0 & c_1^{px} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_2^{px} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{\nu_x-1}^{px} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad (p = 2, \dots, n).$$

Ist nun $k > 1$ und existieren für ein n Lösungen von (1)

$$\Phi_1(X), \Phi_2(X), \dots, \Phi_k(X),$$

wo Φ_x eine ν_x-reihige Matrix bedeutet, für die

$$\left\{\frac{\partial \Phi_x(X)}{\partial x_{11}}\right\}_{X=E} = \mathsf{A}_x^{11} = \mathfrak{B}_x,$$

$$\mathsf{A}_x^{p1} = \mathfrak{B}_x^p, \quad \mathsf{A}_x^{1p} = \mathfrak{C}_x^p,$$

so ist

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} \Phi_1(X) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Phi_2(X) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Phi_k(X) \end{pmatrix}$$

die Lösung des vorliegenden Differentialgleichungssystems mit demselben n. Denn die übrigen A^{rq} sind durch A^{11}, A^{1p}, A^{p1} $(p = 2, \dots, n)$ vollständig bestimmt, wie aus (4) mit $p = s = 1$ folgt. Für die angegebene Lösung aber stimmen die gemäß (3) gebildeten Matrizen A^{11}, A^{1p}, A^{p1} mit denen in (9) und (11) überein, und daher ist sie gerade die verlangte. Sie ist also *reduzibel*.

Daß die Φ_x tatsächlich vorhanden sind, wird sich in der Fortsetzung ergeben.

Um möglicherweise irreduzible Lösungen zu erhalten, können wir daher voraussetzen, daß A^{11}, A^{p1}, A^{1p} die Gestalt haben:

$$(12) \qquad \mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_\nu \end{pmatrix}, \quad \beta_\iota - \beta_{\iota+1} = 1 \qquad (\iota = 1, \dots, \nu - 1),$$

$$(12a) \qquad \mathsf{A}^{p1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_2^p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_\nu^p & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{1p} = \begin{pmatrix} 0 & c_1^p & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{\nu-1}^p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir dürfen weiter annehmen, daß keines der b_i^p verschwindet. Denn andernfalls wird man wieder auf reduzible Lösungen geführt, wie wir jetzt zeigen werden.

Es sei etwa, für ein bestimmtes p, $b_2^p = 0$. Aus den Integrabilitätsbedingungen (4) folgen die Formeln (PERRON, Satz 13, IV; VI, VII mit $q = p$):

$$\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{r1} = \mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{p1} \qquad (p, r > 1,\ p \neq r)$$

$$(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1p} - \mathsf{A}^{1p}\mathsf{A}^{p1})\mathsf{A}^{r1} - \mathsf{A}^{r1}(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1p} - \mathsf{A}^{1p}\mathsf{A}^{p1}) = e_{rp}\mathsf{A}^{p1} + \mathsf{A}^{r1},$$

$$\mathsf{A}^{1r}(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1p} - \mathsf{A}^{1p}\mathsf{A}^{p1}) - (\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1p} - \mathsf{A}^{1p}\mathsf{A}^{p1})\mathsf{A}^{1r} = e_{pr}\mathsf{A}^{1p} + \mathsf{A}^{1r},$$

$$(p, r > 1).$$

Setzen wir $\mathsf{T} = \mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1p} - \mathsf{A}^{1p}\mathsf{A}^{p1}$, so haben wegen $b_2^p = 0$ die nachfolgenden Matrizen die angegebene Gestalt, wobei nur die Elemente, auf die es ankommt, hingeschrieben sind:

$$\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{r1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 \dots \\ b_3^p b_2^r & 0 \dots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{p1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 \dots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{T}\mathsf{A}^{r1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \dots \\ -b_2^r b_3^p c_2^p & 0 \dots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{A}^{r1}\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 \dots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{A}^{1r}\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 0 & -c_1^r b_3^p c_2^p \dots \\ 0 & 0 \quad \dots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{T}\mathsf{A}^{1r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 \dots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Aus den obigen Formeln folgt demnach

$$b_3^p b_2^r = 0 \qquad (p \neq r),$$

$$-b_2^r b_3^p c_2^p = b_2^r, \quad -c_1^r b_3^\nu c_2^p = e_{pr} c_1^p + c_1^r.$$

Nun ist *entweder*

$$b_3^p = 0;$$

dann ergibt sich sogleich, daß

$$b_2^r = c_1^r = 0 \qquad \text{für alle } r > 1;$$

oder es ist $b_3^p \neq 0$; dann kommt aus der ersten Gleichung

$$b_2^r = 0 \qquad \text{(schließlich für alle } r > 1) \tag{13}$$

und die letzte wird für $p = r$, bzw. für $p \neq r$

$$-c_1^p b_3^\nu c_2^p = 2c_1^p, \quad -c_1^r b_3^\nu c_2^p = c_1^r.$$

Danach muß mindestens ein $c_1^r (r > 1)$ verschwinden, da sich sonst ein Widerspruch ergeben würde. Aus Symmetriegründen aber ist dann entsprechend (13) auch

$$c_1^r = 0 \quad \text{für alle } r > 1.$$

In jedem Fall ergibt sich, daß in den Matrizen $\mathfrak{A}^{1r}$, $\mathfrak{A}^{r1}$ $(r > 1)$ die erste Zeile und Spalte nur aus Nullen besteht.

Bezeichnen wir mit $\bar{\mathfrak{A}}^{pq}$ die $(\nu - 1)$-reihigen Matrizen, die aus $\mathfrak{A}^{pq}$ durch Weglassen der ersten Zeile und Spalte hervorgehen, und ist $\bar{\Phi}(X)$ eine Lösung von (2), die zu den Matrizen $\bar{\mathfrak{A}}^{pq}$ gehört, so sind für die Matrix

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} |X|^{\beta_1} & 0 \\ 0 & \bar{\Phi}(X) \end{pmatrix}$$

die Matrizen $\mathfrak{A}^{11}$, $\mathfrak{A}^{1r}$, $\mathfrak{A}^{r1}$ gerade die vorliegenden. Wie oben schließen wir, daß $\Phi(X)$ die Lösung des betrachteten Differentialgleichungssystems darstellt. Sie ist, wie behauptet, reduzibel.

Analog läßt sich zeigen: Wenn ein gewisses b_ι^p (oder ein $c_{\iota-1}^p$) gleich Null ist, so bestehen in allen Matrizen $\mathfrak{A}^{1r}$, $\mathfrak{A}^{r1}$ die $(\iota - 1)$-te Zeile und Spalte aus lauter Nullen, was auf eine reduzible Lösung führt.

Wir setzen also voraus, daß kein b_ι^p Null ist. Nun folgt aus (4) für $p = q = r \neq 1$, $s = 1$

$$\mathfrak{A}^{pp}\,\mathfrak{A}^{p1} - \mathfrak{A}^{p1}\,\mathfrak{A}^{pp} = \mathfrak{A}^{p1}. \tag{14}$$

Man hat nach (8) und (12 a)

$$\mathfrak{A}^{pp}\,\mathfrak{A}^{p1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_2^p b_2^p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3^p b_3^p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_\nu^p b_\nu^p & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{A}^{p1}\,\mathfrak{A}^{pp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1^p b_2^p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^p b_3^p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{\nu-1}^p b_\nu^p & 0 \end{pmatrix}.$$

Auf Grund dieser Darstellungen und von (12 a) folgt aus (14), daß $\mathfrak{A}^{pp}$ ebenfalls dargestellt ist in der Gestalt

$$\mathfrak{A}^{pp} = \begin{pmatrix} \gamma_1^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2^p & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_\nu^p \end{pmatrix} \qquad (p = 2, \dots, n), \tag{15}$$

wo aber jetzt

$$\gamma_{\iota+1}^{p} - \gamma_{\iota}^{p} = 1 \qquad (\iota = 1, \ldots, \nu - 1) \tag{16}$$

ist. Danach kann z. B. $\mathfrak{A}^{22}$ vollständig die Rolle übernehmen, die $\mathfrak{A}^{11}$ von Anfang an gespielt hat, und hieraus erkennen wir, daß n *nicht größer als* 2 sein kann. Denn für jedes $p > 2$ müßte (16) gleichzeitig mit

$$\gamma_{\iota}^{p} - \gamma_{\iota+1}^{p} = 1 \qquad (\iota = 1, \ldots, \nu - 1)$$

bestehen, was unmöglich ist.

Nach den bisherigen Überlegungen können wir uns bei der Suche nach nichttrivialen, irreduziblen Lösungen auf folgenden Fall beschränken: Es ist $n = 2$ und die Matrizen $\mathfrak{A}^{11}$, $\mathfrak{A}^{21}$, $\mathfrak{A}^{12}$ sind gegeben durch (12) und

$$\mathfrak{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_\nu & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & c_{\nu-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$(b_{\iota+1} \neq 0, \; c_\iota \neq 0).$$

Betrachtet man die Lösung $|X|^{-\beta_\nu}\Phi(X)$ an Stelle von $\Phi(X)$, so erkennt man, daß $\mathfrak{A}^{11}$ auch in der Form angenommen werden darf

$$\mathfrak{A}^{11} = \begin{pmatrix} \nu-1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \nu-2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Aus (4) für $p = s = 2$, $q = r = 1$ ergibt sich nun

$$\mathfrak{A}^{22} = \mathfrak{A}^{21}\mathfrak{A}^{12} - \mathfrak{A}^{12}\mathfrak{A}^{21} + \mathfrak{A}^{11}.$$

Nach (17) und (18) wird die rechte Seite

$$\begin{pmatrix} -b_2 c_1 + \nu - 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 c_1 - b_3 c_2 + \nu - 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{\nu-1} c_{\nu-2} - b_\nu c_{\nu-1} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_\nu c_{\nu-1} \end{pmatrix}; \tag{19}$$

daher kommt nach Vergleich mit (15)

$$\sum_{\varkappa=1}^{\nu} \gamma_\varkappa^2 = \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} \varkappa.$$

Somit zeigt sich wegen (16), daß

$$\mathbf{A}^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \nu-2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \nu-1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

ist. Weiter ergeben sich aus (19) und (20) die Gleichungen

$$b_{\varkappa+1}\, c_{\varkappa} = \varkappa\,(\nu-\varkappa) \qquad (\varkappa = 1, \dots, \nu-1). \tag{21}$$

Wir definieren jetzt zwei Matrizen Γ, Δ folgendermaßen:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{\nu-1} \end{pmatrix}, \qquad \Delta = \begin{pmatrix} \delta_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \delta_{\nu-1} \end{pmatrix},$$

$$\gamma_0 = 1, \qquad \gamma_k = \frac{(\nu-k-1)!}{(\nu-1)!} \prod_{\varkappa=1}^{k} c_{\varkappa}, \qquad (k = 1, \dots, \nu-1).$$

$$\delta_0 = 1, \qquad \delta_k = \frac{1}{k!} \prod_{\varkappa=1}^{k} b_{\varkappa+1}.$$

Wegen (21) ist dann

$$\gamma_k\, \delta_k = 1 \qquad (k = 0, 1, \dots, \nu-1),$$

d. h. $\Delta = \Gamma^{-1}$. Gehen wir zu der äquivalenten Lösung

$$\Gamma\, \Phi(X)\, \Gamma^{-1}$$

über, so ergibt die Ausrechnung mit Hilfe von (21), daß

$$\mathbf{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \nu-1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & \nu-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \nu-2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

wird, wogegen $\mathbf{A}^{11}$, $\mathbf{A}^{22}$ unverändert bleiben.

Das Differentialgleichungssystem (2) hat nun die Form

$$\begin{aligned} |X|\frac{\partial \Phi}{\partial x_{s1}} &= \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}} \Phi \begin{pmatrix} \nu-1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}} \Phi \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \nu-1 & 0 \end{pmatrix}, \\ |X|\frac{\partial \Phi}{\partial x_{s2}} &= \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}} \Phi \begin{pmatrix} 0 & \nu-1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}} \Phi \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \nu-1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{22}$$

$$(s = 1, 2).$$

Für dieses System sind alle Integrabilitätsbedingungen erfüllt, was in der Herleitung eigentlich schon enthalten ist; wir werden dies aber auch direkt dadurch bestätigen, daß wir die Lösung des Systems mit $\Phi(E) = \mathsf{E}$ angeben.

Durch Multiplikation des ersten Paares der Gleichungen (22) mit x_{s1} $(s = 1, 2)$, des anderen mit x_{s2} und Addition kommt

$$\sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2} x_{st}\frac{\partial \Phi}{\partial x_{st}} = \Phi\cdot(\nu-1)\,\mathsf{E} = (\nu-1)\,\Phi,$$

d. h. die Elemente $\varphi_{\varrho\sigma}$ von Φ sind homogene Funktionen der x_{st} vom Grad $(\nu - 1)$.

Geht man zu den $\varphi_{\varrho\sigma}$ über, so ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi_{\varrho\nu}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s2}} = 0,$$

(23)
$$|X|\frac{\partial \varphi_{\varrho\sigma}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}}(\nu-\sigma)\,\varphi_{\varrho\sigma} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}}\sigma\,\varphi_{\varrho,\sigma+1} = |X|\frac{\partial \varphi_{\varrho,\sigma+1}}{\partial x_{s2}},$$

$$(\varrho = 1, \ldots, \nu;\ \sigma = 1, \ldots, \nu-1).$$

Da die $\varphi_{\varrho\sigma}$ homogen vom Grad $(\nu - 1)$ sein sollen, legt die Betrachtung von Spezialfällen nahe, den Ansatz zu versuchen:

(24)
$$\varphi_{\varrho 1} = x_{11}^{\nu-\varrho}\, x_{21}^{\varrho-1}.$$

Die rekursive Behandlung der Gleichungen (23) führt dann zu dem Ergebnis

(25)
$$\varphi_{\varrho\sigma} = \sum_{\mu_1 \leqq i \leqq \mu_2} \binom{\varrho-1}{i-1}\binom{\nu-\varrho}{\sigma-i}\, x_{11}^{\nu-\varrho-\sigma+i}\, x_{21}^{\varrho-i}\, x_{12}^{\sigma-i}\, x_{22}^{i-1}$$

$$(\varrho, \sigma = 1, \ldots, \nu).$$

Hierbei haben wir

$$\mu_1 = \mathrm{Max}\,(1, \varrho + \sigma - \nu),\quad \mu_2 = \mathrm{Min}\,(\varrho, \sigma)$$

gesetzt.

Daß diese Gleichungen in der Tat die gewünschte Lösung von (23) darstellen, läßt sich folgendermaßen bestätigen. Zunächst erkennt man unmittelbar, daß

$$\varphi_{\varrho\sigma}(E) = \varepsilon_{\varrho\sigma}.$$

Für $\sigma = 1$ bzw. ν reduzieren sich die Lösungen auf (24), bzw.

$$\varphi_{\varrho,} = x_{12}^{\nu-\varrho}\, x_{22}^{\varrho-1},$$

also sind die ersten Gleichungen (23) erfüllt. Daß dies auch für die übrigen zutrifft, läßt sich etwa auf folgende Weise sehen. Wir betrachten das Polynom von z

$$\begin{aligned}\psi_\sigma(X;z) &= \binom{\nu-1}{\sigma-1}(x_{11}+x_{21}z)^{\nu-\sigma}(x_{12}+x_{22}z)^{\sigma-1}\\ &= \binom{\nu-1}{\sigma-1}\sum_{\varrho=1}^{\nu} z^{\varrho-1}\sum_{\mu_1\leqq i\leqq\mu_2}\binom{\nu-\sigma}{\varrho-i}\binom{\sigma-1}{i-1}x_{11}^{\nu-\varrho-\sigma+i}x_{21}^{\varrho-i}x_{12}^{\sigma-i}x_{22}^{i-1}\\ &= \sum_{\varrho=1}^{\nu}\binom{\nu-1}{\varrho-1}\varphi_{\varrho\sigma}z^{\varrho-1}.\end{aligned}$$

Danach haben wir, wenn wir z. B. die partielle Ableitung nach x_{11} bilden:

$$\begin{aligned}|X|\frac{\partial\psi_\sigma}{\partial x_{11}} &= |X|\sum_{\varrho=1}^{\nu}\binom{\nu-1}{\varrho-1}\frac{\partial\varphi_{\varrho\sigma}}{\partial x_{11}}z^{\varrho-1}\\ &= |X|\binom{\nu-1}{\sigma-1}(\nu-\sigma)(x_{11}+x_{21}z)^{\nu-\sigma-1}(x_{12}+x_{22}z)^{\sigma-1}\\ &= \binom{\nu-1}{\sigma-1}(\nu-\sigma)(x_{11}+x_{21}z)^{\nu-\sigma-1}(x_{12}+x_{22}z)^{\sigma-1}[x_{22}(x_{11}+x_{21}z)-\\ &\qquad -x_{21}(x_{12}+x_{22}z)]\\ &= x_{22}(\nu-\sigma)\psi_\sigma - x_{21}\sigma\psi_{\sigma+1},\end{aligned}$$

und damit ist ein Teil der zweiten Zeile von (23) bestätigt. Entsprechend verifiziert man den Rest von (23).

Die Polynome (25) haben ersichtlich die Eigenschaften

$$\begin{aligned}\varphi_{\varrho,\nu-\sigma+1}(x_{12},x_{22},x_{11},x_{21}) &= \varphi_{\varrho\sigma}(x_{11},x_{21},x_{12},x_{22}),\\ \varphi_{\nu-\varrho+1,\sigma}(x_{21},x_{22},x_{11},x_{12}) &= \varphi_{\varrho\sigma}(x_{11},x_{21},x_{12},x_{22}),\end{aligned}$$

die man auch aus den Gleichungen (23) direkt hätte herleiten können.

Die Determinante der so gefundenen Lösung von (1) und (2), die wir mit $\Phi_\nu(X)$ bezeichnen wollen, ist[4])

$$|\Phi_\nu(X)| = |X|^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}.$$

Diese Lösung ist irreduzibel. Denn angenommen, $\Phi_\nu(X)$ wäre einer Matrix der Form

$$\overline{\Phi}(X) = \begin{pmatrix}\Phi'(X) & 0\\ 0 & \Phi''(X)\end{pmatrix}$$

äquivalent, wo die Summe der Reihenzahlen ν' und ν'' von Φ' und Φ'' gleich ν wäre. Dann könnte $\overline{\Phi}(X)$, eventuell durch Transformation mit einer Matrix

$$\Gamma = \begin{pmatrix}\Gamma' & 0\\ 0 & \Gamma''\end{pmatrix},$$

---

[4]) SCHUR, Diss. S. 8; vgl. Fußnote 1.

wo $|\Gamma| \neq 0$ und Γ', Γ'' wieder die Reihenzahlen ν', ν'' haben, so gewählt werden, daß die Matrix $\bar{\mathfrak{A}}^{11}$ die Gestalt hätte

$$\bar{\mathfrak{A}}^{11} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{\nu'} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \mu_{\nu''} \end{pmatrix},$$

wobei die λ_i, μ_k in ihrer Gesamtheit mit den Zahlen $0, 1, \dots, \nu - 1$ [vgl. (18)] übereinstimmten und überdies nach abnehmenden λ_i, μ_k geordnet wären. Dann hätte $\bar{\mathfrak{A}}^{21}$ die Form (17), wobei aber wegen der Reduzibilität von $\bar{\Phi}$ mindestens das Element $b_{\nu'+1}$ gleich 0 wäre. Die Matrizen $\bar{\mathfrak{A}}^{21}$ und $\mathfrak{A}^{21}$ hätten also verschiedenen Rang und könnten daher nicht äquivalent sein, womit die Irreduzibilität von $\Phi_\nu(X)$ bewiesen ist.

Fassen wir alle Resultate dieses Paragraphen zusammen, so ergibt sich der

Satz. *Hat die Matrix* $\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E}$ *im System* (2) *lauter verschiedene, lineare Elementarteiler, so ergeben sich in der Umgebung von* $X = E$ *analytische, nichttriviale, irreduzible Lösungen nur für* $n = 2$, *und zwar sind es die Lösungen*

$$|X|^\alpha \Phi_\nu(X)$$

und die damit äquivalenten. Die Elemente von $\Phi_\nu(X)$ *sind homogene Polynome vom Grad* $(\nu - 1)$ *in* $x_{11}, \dots, x_{22}$, *die gegeben sind durch die Formeln*

$$\varphi_{\varrho\sigma}(X) = \sum_{\mu_1 \leqq i \leqq \mu_2} \binom{\varrho - 1}{i - 1} \binom{\nu - \varrho}{\sigma - i} x_{11}^{\nu-\varrho-\sigma+i}\, x_{21}^{\varrho-i}\, x_{12}^{\sigma-i}\, x_{22}^{i-1}$$

$$(\mu_1 = \operatorname{Max}(1, \varrho + \sigma - \nu),\ \mu_2 = \operatorname{Min}(\varrho, \sigma);\ \varrho, \sigma = 1, \dots, \nu).$$

Es ist

$$|\Phi_\nu(X)| = |X|^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}.$$

Beispielsweise ist für $\nu = 4$:

$$\Phi_4(X) = \begin{pmatrix} x_{11}^3 & 3\,x_{11}^2\,x_{12} & 3\,x_{11}\,x_{12}^2 & x_{12}^3 \\ x_{11}^2\,x_{21} & 2\,x_{11}\,x_{21}\,x_{12} + x_{11}^2\,x_{22} & 2\,x_{11}\,x_{12}\,x_{22} + x_{21}\,x_{12}^2 & x_{12}^2\,x_{22} \\ x_{11}\,x_{21}^2 & 2\,x_{11}\,x_{21}\,x_{22} + x_{21}^2\,x_{12} & 2\,x_{12}\,x_{21}\,x_{22} + x_{11}\,x_{22}^2 & x_{12}\,x_{22}^2 \\ x_{21}^3 & 3\,x_{21}^2\,x_{22} & 3\,x_{21}\,x_{22}^2 & x_{22}^3 \end{pmatrix}.$$

§ 3.

Spezielle Lösungen für $\nu = 4$.

Wir setzen voraus, es sei $\nu = 4$ und die Matrix $\mathsf{A}^{11} - \lambda\,\mathsf{E}$ besitze zwei quadratische Elementarteiler $(\lambda - \alpha_1)^2$, $(\lambda - \alpha_2)^2$. Nach PERRON, Satz 16, S. 157, muß, wenn nichttriviale Lösungen vorhanden sein sollen, etwa

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 1$$

sein, und auch dann kann n nur die Werte 3 oder 2 haben. Wiederum läßt sich durch Übergang zu der Lösung $|X|^{-\alpha_1}\,\Phi(X)$ erreichen, daß die eine Wurzel Null wird. Nehmen wir noch A^{11} in Kästchenform an, so können wir setzen

$$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Aus PERRON, Satz 15, ergibt sich jetzt, daß die Matrizen A^{p1}, A^{1p} die Gestalt haben müssen

$$\mathsf{A}^{p1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_0^p & 0 & 0 & 0 \\ b_1^p & b_0^p & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{1p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_0^p & 0 \\ 0 & 0 & c_1^p & c_0^p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (p > 1). \tag{27}$$

Aus den Bedingungen (4) kann die nachstehende abgeleitet werden (PERRON, Satz 13, VI für $r = p$):

$$(\mathsf{A}^{p1}\,\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\,\mathsf{A}^{p1})\,\mathsf{A}^{p1} - \mathsf{A}^{p1}\,(\mathsf{A}^{p1}\,\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\,\mathsf{A}^{p1}) = 2\,e_{pq}\,\mathsf{A}^{p1}$$
$$(p, q > 1).$$

Die Ausrechnung gemäß (27) führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} (b_0^p)^2\,c_0^q &= e_{pq}\,b_0^p, \\ b_0^p(b_0^p\,c_1^q + b_1^p\,c_0^q) + b_0^p\,b_1^p\,c_0^q &= e_{pq}\,b_1^p. \end{aligned} \tag{28}$$

Nun kann b_0^p nicht gleich Null sein; denn dann würde aus der zweiten Gleichung für $q = p$ folgen $b_1^p = 0$, also $\mathsf{A}^{p1} = 0$, was bei einer nichttrivialen Lösung nicht eintreten kann[5]). Daher kommt

$$b_0^p\,c_0^q = e_{pq}.$$

Daraus folgt aber, daß der Fall $n = 3$ unmöglich ist. Denn wäre $n = 3$, so könnte man $p = 2$, $q = 3$ setzen, also

$$b_0^2\,c_0^3 = 0.$$

[5]) PERRON, Satz 14.

Ebenso wäre aber

$$b_0^2 c_0^2 = 1, \quad b_0^3 c_0^3 = 1,$$

was auf einen Widerspruch führt. Daher kann n nur gleich 2 sein und die Gleichungen (28) lauten dann, wenn man die überflüssigen oberen Indizes wegläßt, wegen $b_0 \neq 0$:

$$b_0 c_0 = 1, \quad b_0 c_1 + b_1 c_0 = 0. \tag{29}$$

Wir definieren nun eine Matrix Γ folgendermaßen

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b_0 c_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_0 \end{pmatrix}.$$

Wegen (29) ist $|\Gamma| = c_0^2 \neq 0$ und man hat

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 c_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir fortan die äquivalente Lösung $\Gamma\Phi(X)\Gamma^{-1}$, so ergibt sich für diese wegen (26), (27) und (29):

$$\mathfrak{A}^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach (4) haben wir schließlich

$$\mathfrak{A}^{22} = \mathfrak{A}^{21}\mathfrak{A}^{12} - \mathfrak{A}^{12}\mathfrak{A}^{21} + \mathfrak{A}^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Differentialgleichungssystem (2) lautet jetzt:

$$\begin{aligned} |X| \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{s1}} &= \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}} \Phi(X) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}} \Phi(X) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ |X| \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{s2}} &= \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}} \Phi(X) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}} \Phi(X) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{30}$$

$$(s = 1, 2).$$

Für dieses System sind alle Integrabilitätsbedingungen erfüllt, wie wir wieder direkt durch Angabe der Lösung zeigen werden.

Multipliziert man die Gleichungen (30) mit x_{s1}, bzw. x_{s2}, addiert und summiert über s, so kommt nach Division mit $|X|$:

$$\sum_{s=1}^{2}\left(X_{s1}\frac{\partial\Phi(X)}{\partial x_{s1}}+x_{s2}\frac{\partial\Phi(X)}{\partial x_{s2}}\right)=\Phi(X)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&2&1\end{pmatrix}. \tag{31}$$

Hieraus erkennt man, daß die Elemente $\varphi_{\varrho 2}$, $\varphi_{\varrho 4}$ von Φ ($\varrho = 1, \ldots, 4$) homogene Funktionen ersten Grades in den x_{pq} sind.

Die Gleichungen (30) ergeben im einzelnen:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\varphi_{\varrho 4}}{\partial x_{s1}}=\frac{\partial\varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s2}}=0,\\ |X|\frac{\partial\varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s1}}=|X|\frac{\partial\varphi_{\varrho 4}}{\partial x_{s2}}=\frac{\partial|X|}{\partial x_{s1}}\varphi_{\varrho 2}+\frac{\partial|X|}{\partial x_{s2}}\varphi_{\varrho 4};\end{gathered} \tag{32}$$

$$\begin{gathered}|X|\frac{\partial\varphi_{\varrho 3}}{\partial x_{s1}}=\frac{\partial|X|}{\partial x_{s1}}\varphi_{\varrho 4},\qquad |X|\frac{\partial\varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s2}}=\frac{\partial|X|}{\partial x_{s2}}\varphi_{\varrho 2},\\ |X|\frac{\partial\varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}}=\frac{\partial|X|}{\partial x_{s1}}(\varphi_{\varrho 1}+\varphi_{\varrho 2})+\frac{\partial|X|}{\partial x_{s2}}\varphi_{\varrho 3},\qquad (s=1,2).\\ |X|\frac{\partial\varphi_{\varrho 3}}{\partial x_{s2}}=\frac{\partial|X|}{\partial x_{s1}}\varphi_{\varrho 1}+\frac{\partial|X|}{\partial x_{s2}}(\varphi_{\varrho 3}+\varphi_{\varrho 4}),\end{gathered} \tag{33}$$

Die Gleichungen (32) können für sich allein behandelt werden. Setzt man versuchsweise für $\varphi_{\varrho 2}$, $\varphi_{\varrho 4}$ homogene lineare Polynome, so ergibt sich in der Tat wegen der Anfangsbedingungen

$$\varphi_{\varrho 2}(E)=\varepsilon_{\varrho 2},\quad \varphi_{\varrho 4}(E)=\varepsilon_{\varrho 4}$$

leicht

$$\begin{aligned}\varphi_{\varrho 2}&=\varepsilon_{\varrho 2}x_{11}+\varepsilon_{\varrho 4}x_{21},\\ \varphi_{\varrho 4}&=\varepsilon_{\varrho 2}x_{12}+\varepsilon_{\varrho 4}x_{22},\end{aligned}\qquad (\varrho=1,\ \ldots,\ 4). \tag{34}$$

Da dies für $\varrho = 1, 3$ Null wird, so ergeben sich aus den Gleichungen (33) die folgenden

$$\begin{gathered}\frac{\partial\varphi_{\varrho 3}}{\partial x_{s1}}=\frac{\partial\varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s2}}=0,\\ |X|\frac{\partial\varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}}=|X|\frac{\partial\varphi_{\varrho 3}}{\partial x_{s2}}=\frac{\partial|X|}{\partial x_{s1}}\varphi_{\varrho 1}+\frac{\partial|X|}{\partial x_{s2}}\varphi_{\varrho 3},\end{gathered}\qquad (\varrho=1,3;\ s=1,2).$$

Da wegen (31) und (34) auch $\varphi_{\varrho 1}$, $\varphi_{\varrho 3}$ ($\varrho = 1, 3$) homogene Funktionen ersten Grades sind, bekommt man hieraus unmittelbar

$$\varphi_{11}=x_{11},\quad \varphi_{13}=x_{12},\quad \varphi_{31}=x_{21},\quad \varphi_{33}=x_{22}. \tag{35}$$

Es bleiben noch die Gleichungen (33) für $\varrho = 2, 4$. Für $\varrho = 2$ etwa bekommen wir mit Rücksicht auf (34):

$$|X|\frac{\partial \varphi_{21}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}}(\varphi_{21} + x_{11}) + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}}\varphi_{23},$$

$$|X|\frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_{s2}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}}\varphi_{21} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}}(\varphi_{23} + x_{12}), \qquad (s = 1, 2).$$

$$|X|\frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}}x_{12}, \qquad |X|\frac{\partial \varphi_{21}}{\partial x_{s2}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}}x_{11},$$

Die beiden letzten Gleichungspaare ergeben

$$\begin{aligned} \varphi_{21} &= x_{11}\log|X| + \bar{\varphi}_{21}(x_{11}, x_{21}), \\ \varphi_{23} &= x_{12}\log|X| + \bar{\varphi}_{23}(x_{12}, x_{22}). \end{aligned} \tag{36}$$

Durch Einsetzen in die beiden ersten Gleichungspaare reduzieren sich diese auf

$$|X|\frac{\partial \bar{\varphi}_{21}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}}\bar{\varphi}_{21} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}}\bar{\varphi}_{23},$$

$$|X|\frac{\partial \bar{\varphi}_{23}}{\partial x_{s2}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}}\bar{\varphi}_{21} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}}\bar{\varphi}_{23}, \qquad (s = 1, 2).$$

Wegen (36) hat man die Anfangsbedingungen

$$\bar{\varphi}_{21}(E) = \bar{\varphi}_{23}(E) = 0$$

und daraus folgt

$$\bar{\varphi}_{21} = \bar{\varphi}_{23} = 0.$$

Also ist

$$\varphi_{21} = x_{11}\log|X|, \quad \varphi_{23} = x_{12}\log|X| \tag{37}$$

und analog erhält man

$$\varphi_{41} = x_{21}\log|X|, \quad \varphi_{43} = x_{22}\log|X|. \tag{38}$$

Nach (34), (35), (37) und (38) können wir die Lösung der Differentialgleichungen (30) folgendermaßen schreiben:

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{12} & 0 \\ x_{11}\log|X| & x_{11} & x_{12}\log|X| & x_{12} \\ x_{21} & 0 & x_{22} & 0 \\ x_{21}\log|X| & x_{21} & x_{22}\log|X| & x_{22} \end{pmatrix}.$$

Da eine Matrix, deren Elemente alle Polynome sind, nur einer ebensolchen äquivalent sein kann, ist die vorliegende Lösung keiner Polynommatrix äquivalent.

Wir vertauschen noch in $\Phi(X)$ die 2. und 3. Zeile und die 2. und 3. Spalte, gehen also zu einer äquivalenten Lösung über. Dann lassen sich die Ergebnisse dieses Paragraphen zusammenfassen in dem

Satz: *Hat für $\nu = 4$ die Matrix $\mathsf{A}^{11} - \lambda\,\mathsf{E}$ zwei quadratische Elementarteiler, so gibt es in der Umgebung von $X = E$ analytische, nichttriviale, irreduzible Lösungen der Funktionalgleichung* (1) *nur für $n = 2$. Es sind die der folgenden äquivalenten:*

$$\Phi(X) = |X|^{\alpha} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 \\ x_{11}\log|X| & x_{12}\log|X| & x_{11} & x_{12} \\ x_{21}\log|X| & x_{22}\log|X| & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Es fehlt noch der Beweis der Irreduzibilität. Wäre aber die Matrix in (39) einer Lösung der Form

$$\begin{pmatrix} \Phi_1(X) & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \Phi_2(X) \end{pmatrix}$$

äquivalent, so müßte in mindestens einer der Matrizen Φ_1, Φ_2, die beide Lösungen der Gleichung (1) für $\nu = 2$ darstellten, der $\log|X|$ in rationaler Verbindung mit den $x_{\varrho\sigma}$ vorkommen. Solche Lösungen gibt es aber nicht (Perron, Satz 18).

Analog zeigt man, daß die Matrix in (39) auch keiner Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_{24} \\ 0 & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \varphi_{34} \\ 0 & \varphi_{42} & \varphi_{43} & \varphi_{44} \end{pmatrix}$$

äquivalent sein kann, womit der Beweis der Irreduzibilität beendet ist.

(Eingegangen am 21. März 1943.)

Zur Theorie der Flächenabbildungen.

Von

Frank Löbell in München.

Herrn Prof. Dr. Friedrich Pfeiffer zu seinem 60. Geburtstag gewidmet.

In einer kürzlich an anderer Stelle[1]) veröffentlichten Arbeit wurden die allgemeinen Eigenschaften einer reellen regulären Abbildung zweier reeller Flächen aufeinander, soweit sie von deren gegenseitiger Lage unabhängig sind, entwickelt und die für die Untersuchung einer gegebenen Flächenabbildung wichtigsten Formeln aufgestellt. In diesen traten unter der Voraussetzung, daß gleiche Parameterpaare auf beiden Flächen entsprechende Punkte kennzeichnen, im wesentlichen nur die sechs Fundamentalgrößen erster Ordnung der beiden Flächen auf.

Es gibt aber auf diesem Gebiete Fragen, die nur behandelt werden können, wenn außerdem noch die *gemischten Fundamentalgrößen* des Flächenpaares herangezogen werden. In manchen weiteren Fällen ist zwar die Berücksichtigung dieser Funktionen nicht unbedingt nötig, aber zweckmäßig, ja sogar durch die Natur der Fragestellung nahegelegt.

Die folgenden Ausführungen möchten die bisherigen Arbeiten in den angedeuteten Richtungen ergänzen und die theoretische Grundlage für beabsichtigte weitere Untersuchungen geben.

I.

1. *Vorbemerkung.* Wir betrachten im euklidischen Raum die beiden Flächenstücke $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, die wir erhalten, wenn wir die stetig differenzierbaren, reellen Vektorfunktionen $\mathfrak{x}(u, v)$ und $\mathfrak{y}(u, v)$ der unabhängigen, reellen Veränderlichen u und v des Bereiches $\mathfrak{B}$ der u-v-Ebene als Ortsvektoren von einem Bezugspunkt O abtragen; die Flächenstücke seien im Definitionsbereich $\mathfrak{B}$ der Funktionen überall regulär, d. h. es sei dort überall $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v \neq 0$ und $\mathfrak{y}_u \times \mathfrak{y}_v \neq 0$. Dem Punkte (u, v) der Fläche $\mathfrak{x}$ sei der Punkt (u, v) der Fläche $\mathfrak{y}$ zugeordnet, der *dieselben Koordinaten* u, v hat; dadurch ist, wie als bekannt vorausgesetzt werde[2]), auf allgemeinste Weise eine umkehrbar eindeutige, überall reguläre *Abbildung* $\mathfrak{x} \rightleftarrows \mathfrak{y}$ der beiden Flächen aufeinander definiert.

---

[1]) Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst, Jahrgang 1942, S. 299ff.

[2]) A. a. O., S. 300.

Die Einheitsvektoren der Normalen der beiden Flächen, die somit als orientiert gedacht werden, seien mit $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}'$ bezeichnet, so daß

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v : \mathfrak{c}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v \quad \text{und} \quad \mathfrak{c}' = \mathfrak{y}_u \times \mathfrak{y}_v : \mathfrak{c}'\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}_v$$

wird. Die Größen

$$\mathfrak{c}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v = W \quad \text{und} \quad \mathfrak{c}'\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}_v = W'$$

stehen wegen $(\mathfrak{c}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v)^2 = (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)^2 = \mathfrak{x}_u^2\mathfrak{x}_v^2 - (\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v)^2$ mit den Fundamentalgrößen 1. 0. E, F, G und E', F', G' der beiden Flächen in dem Zusammenhang

$$W^2 = EG - F^2, \quad W'^2 = E'G' - F'^2;$$

sie sind bekanntlich Invarianten vom Gewicht 1 gegenüber der Gruppe Γ der gemeinsamen Parametertransformationen der beiden Flächen.

2. *Gegenseitige Lage entsprechender Flächenelemente.* Den Winkel ϑ zweier einander zugeordneter Flächenelemente kann man als *Winkel ihrer Normalenvektoren* berechnen:

$$\cos\vartheta = \mathfrak{c}\mathfrak{c}' = \frac{(\mathfrak{x}_u\times\mathfrak{x}_v)\,(\mathfrak{y}_u\times\mathfrak{y}_v)}{\mathfrak{c}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v\cdot\mathfrak{c}'\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}_v} = \frac{((\mathfrak{x}_u\times\mathfrak{x}_v)\times\mathfrak{y}_u)\mathfrak{y}_v}{\mathfrak{c}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v\cdot\mathfrak{c}'\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}_v} = \frac{\mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_u\cdot\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v\cdot\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u}{\mathfrak{c}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v\cdot\mathfrak{c}'\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}_v}.$$

Wenn wir die „*gemischten Fundamentalgrößen* 1. 0" *des Flächenpaares* $\mathfrak{x}(u,v) \rightleftarrows \mathfrak{y}(u.v)$

$$(1) \qquad \bar{E} = \mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_u, \quad \bar{F}_1 = \mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v, \quad \bar{F}_2 = \mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u, \quad \bar{G} = \mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_v$$

einführen, wird

$$(2) \qquad \cos\vartheta = (\bar{E}\bar{G} - \bar{F}_1\bar{F}_2) : WW'.$$

Unmittelbar aus der Bedeutung der zehn Fundamentalgrößen erkennt man die Richtigkeit folgender Ungleichungen:

$$F^2 < EG, \quad \bar{E}^2 \leqq EE', \quad \bar{F}_1^2 \leqq EG', \quad \bar{F}_2^2 \leqq GE', \quad \bar{G}^2 \leqq GG', \quad F'^2 < E'G';$$

aus (2) fließt die Ungleichung

$$(EG - F^2)\,(E'G' - F'^2) - (\bar{E}\bar{G} - \bar{F}_1\bar{F}_2)^2 \geqq 0,$$

in der die links stehende Funktion ihr Minimum 0 für $\vartheta = 0$ oder 180^0, d. h. bei parallelen Flächenelementen, ihr Maximum $W^2W'^2$ für $\vartheta = \pm 90^0$, d. h. bei orthogonalen Flächenelementen annimmt.

Auch die *Schnittgerade der beiden Berührebenen* ε und ε' der Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in den entsprechenden Punkten (u, v) kann uns interessieren; wir erhalten als ihre Richtung die des gemeinsamen Lotes der Flächennormalen. Ist $\mathfrak{s}$ einer der Einheitsvektoren der Schnittrichtung, so gilt:

$$\mathfrak{s}\cdot\sin\vartheta = \mathfrak{c}\times\mathfrak{c}' = (\mathfrak{x}_u\times\mathfrak{x}_v)\times(\mathfrak{y}_u\times\mathfrak{y}_v) : \mathfrak{c}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v\cdot\mathfrak{c}'\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}_v$$

oder

$$(3) \qquad \mathfrak{s}\cdot WW'\sin\vartheta = -\mathfrak{x}_u\cdot\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}_v + \mathfrak{x}_v\cdot\mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}_v = \mathfrak{y}_u\cdot\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_v - \mathfrak{y}_v\cdot\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u.$$

Da allgemein (wie man bei Benutzung rechtwinkliger Koordinaten für die Vektoren und Anwendung des Multiplikationssatzes der Determinantentheorie erkennt) für sechs beliebige Vektoren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$ gilt:

$$\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{u}'\mathfrak{v}'\mathfrak{w}' = \begin{vmatrix} \mathfrak{u}\mathfrak{u}' & \mathfrak{u}\mathfrak{v}' & \mathfrak{u}\mathfrak{w}' \\ \mathfrak{v}\mathfrak{u}' & \mathfrak{v}\mathfrak{v}' & \mathfrak{v}\mathfrak{w}' \\ \mathfrak{w}\mathfrak{u}' & \mathfrak{w}\mathfrak{v}' & \mathfrak{w}\mathfrak{w}' \end{vmatrix},$$

so stehen die in (3) vorkommenden dreifachen Produkte mit den Fundamentalgrößen in folgendem Zusammenhang:

$$(\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_u)^2 = \begin{vmatrix} E & F & \overline{E} \\ F & G & \overline{F}_2 \\ \overline{E} & \overline{F}_2 & E' \end{vmatrix}, \quad (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_v)^2 = \begin{vmatrix} E & F & \overline{F}_1 \\ F & G & \overline{G} \\ \overline{F}_1 & \overline{G} & G' \end{vmatrix},$$

$$(\mathfrak{x}_u \mathfrak{y}_u \mathfrak{y}_v)^2 = \begin{vmatrix} E & \overline{E} & \overline{F}_1 \\ \overline{E} & E' & F' \\ \overline{F}_1 & F' & G' \end{vmatrix}, \quad (\mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_u \mathfrak{y}_v)^2 = \begin{vmatrix} G & \overline{F}_2 & \overline{G} \\ \overline{F}_2 & E' & F' \\ \overline{G} & F' & G' \end{vmatrix};$$

hierbei ist zu beachten, daß, wenn man aus diesen Determinanten die dreifachen Produkte selbst berechnen wollte, die den vier Quadratwurzeln zu gebenden Vorzeichen durch eines von ihnen schon bestimmt sind, da gilt:

$$(\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_u)\,(\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_v) = \begin{vmatrix} E & F & \overline{F}_1 \\ F & G & \overline{G} \\ \overline{E} & \overline{F}_2 & F' \end{vmatrix} \text{ usw.}$$

3. *Gegenseitige Lage entsprechender Linienelemente.* In $d\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_u du + \mathfrak{x}_v dv$ und $d\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_u du + \mathfrak{y}_v dv$ haben wir zwei einander zugeordnete *Tangentenvektoren* in den Punkten (u, v) der beiden Flächen. Ihren *Winkel* ζ kann man aus

$$\cos\zeta = \frac{(\mathfrak{x}_u du + \mathfrak{x}_v dv)\,(\mathfrak{y}_u du + \mathfrak{y}_v dv)}{|\,\mathfrak{x}_u du + \mathfrak{x}_v dv\,|\,|\,\mathfrak{y}_u du + \mathfrak{y}_v dv\,|}$$

oder

$$\cos\zeta = \frac{\overline{E}\,du^2 + (\overline{F}_1 + \overline{F}_2)\,du\,dv + \overline{G}\,dv^2}{\sqrt{(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)\,(E'\,du^2 + 2F'\,du\,dv + G'\,dv^2)}} \tag{4}$$

berechnen. Hieraus kann wie aus (2) eine Ungleichung abgeleitet werden, die für alle Werte von du, dv gilt; es sei darauf verzichtet, sie anzuschreiben.

Das Verschwinden der „*gemischten Grundform*“ *des Flächenpaares*

$$d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} = \overline{E}\,du^2 + (\overline{F}_1 + \overline{F}_2)\,du\,dv + \overline{G}\,dv^2 \tag{5}$$

ist nach (4) die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die einander entsprechenden *Flächenrichtungen* $d\mathfrak{x}$ *und* $d\mathfrak{y}$ *orthogonal* sind. Im allgemeinen gibt es also in jedem Paar entsprechender Punkte zwei solche Richtungspaare, die reell getrennt, reell zusammenfallend oder konjugiert imaginär sind, je nachdem gilt:

$$4\,\overline{E}\,\overline{G} - (\overline{F}_1 + \overline{F}_2)^2 = 4\,(\overline{E}\,\overline{G} - \overline{F}_1\overline{F}_2) - (\overline{F}_1 - \overline{F}_2)^2 \gtreqless 0.$$

4. *Die gemeinsamen Lote zusammengehöriger Tangentenpaare.* Den Winkel ζ kann man auch aus

$$\mathfrak{e}\sin\zeta = \frac{(\mathfrak{x}_u\,du + \mathfrak{x}_v\,dv)\times(\mathfrak{y}_u\,du + \mathfrak{y}_v\,dv)}{|\mathfrak{x}_u\,du + \mathfrak{x}_v\,dv|\cdot|\mathfrak{y}_u\,du + \mathfrak{y}_v\,dv|}$$

oder

$$\mathfrak{e}\sin\zeta = \frac{\mathfrak{x}_u\times\mathfrak{y}_u\,du + (\mathfrak{x}_u\times\mathfrak{y}_v + \mathfrak{x}_v\times\mathfrak{y}_u)\,du\,dv + \mathfrak{x}_v\times\mathfrak{y}_v\,dv^2}{\sqrt{(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)\,(E'\,du^2 + 2F'\,du\,dv + G'\,dv^2)}} \tag{6}$$

berechnen, wo $\mathfrak{e}$ einen der Einheitsvektoren des gemeinsamen Lotes der Linienelemente $d\mathfrak{x} \rightleftarrows d\mathfrak{y}$ bedeutet, über deren Lage im Raum man dadurch zugleich etwas erfährt; man sieht nämlich:

Wenn man von dem Ausnahmefall, daß je zwei entsprechende Linienelemente einander parallel sind (vgl. später Nr. 13), absieht, so bilden die durch einen festen Punkt O gelegten *gemeinsamen Lote je zweier entsprechender Berührvektoren* der Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in den Punkten (u, v) *einen Kegel 2. O.*

Dieser Kegel kann zerfallen; wann dies geschieht, kann man unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}'$ nicht parallel sind ($\mathfrak{c}\times\mathfrak{c}' \neq 0$), folgendermaßen entscheiden: Die zum Punkt O parallel verschobenen Linienelemente $d\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{y}$ bilden *projektive Strahlenbüschel*; diese liegen dann und nur dann *perspektiv*, wenn die Schnittrichtung der beiden Berührebenen, die durch den in (3) auf zwei Arten ausgedrückten und (wegen $W \neq 0$, $W' \neq 0$, $\sin\vartheta \neq 0$) nicht verschwindenden Vektor dargestellt wird, sich selbst entspricht, wofür notwendig und hinreichend ist, daß gilt:

$$-\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}_v : \mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}_v = \mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_v : -\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u$$

oder

$$\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u\cdot\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}_v\mathfrak{x}_v = \mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_v\cdot\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}_v\mathfrak{x}_u$$

oder

$$\begin{vmatrix} \bar{E} & \bar{F}_1 & F \\ \bar{F}_2 & \bar{G} & G \\ E' & F' & \bar{F}_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bar{E} & \bar{F}_1 & E \\ \bar{F}_2 & \bar{G} & F \\ F' & G' & \bar{F}_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Diese Bedingung[3]) ist, wie man bei genauerem Zusehen erkennt, vollkommen symmetrisch in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gebaut[4]). Ist aber $\mathfrak{c} \parallel \mathfrak{c}'$, so wird (3) der Nullvektor, also verschwinden (wegen $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v \neq 0$ und $\mathfrak{y}_u \times \mathfrak{y}_v \neq 0$) alle dreifachen Produkte in (3), und (7) ist mithin erst recht erfüllt. Hiernach ist (7) *das Kriterium für das Zerfallen des oben betrachteten Kegels.*

---

[3]) In einer in den Sitz.-ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Jahrgang 1943, erscheinenden Arbeit werden die Flächenabbildungen mit Hilfe von Differentialvarianten $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_2$, $\mathfrak{j}$, j behandelt, die die Bedingung (7) in der Form auszudrücken gestatten: $\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2\mathfrak{j} = 0$.

[4]) Die Richtung der *Perspektivitätsachse* läßt sich mittels der in der vorstehenden Fußnote erwähnten Invarianten durch den Vektor darstellen:

$(\mathfrak{i}_1\times\mathfrak{i}_2\times\mathfrak{i}_1)\cdot\mathfrak{j}\,(\mathfrak{i}_2\times\mathfrak{i}_1\times\mathfrak{i}_2) + (\mathfrak{i}_2\times\mathfrak{i}_1\times\mathfrak{i}_2)\cdot\mathfrak{j}\,(\mathfrak{i}_1\times\mathfrak{i}_2\times\mathfrak{i}_1) + j\,(\mathfrak{i}_1\times\mathfrak{i}_2)^2\cdot\mathfrak{i}_1\times\mathfrak{i}_2$,

der im vorliegenden Fall ($\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2\mathfrak{j} = 0$, $\mathfrak{j}_1\times\mathfrak{j}_2 \neq 0$) nicht verschwinden kann.

5. *Geometrische Bedeutung der Fundamentalgrößen.* Ebenso wie durch die Größen $E = \mathfrak{x}_u^2$ und $G = \mathfrak{x}_v^2$ die Länge jedes der Vektoren $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ und alsdann durch $F = \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v$ der Betrag ihres Winkels bestimmt ist, so legen die Fundamentalgrößen E', F', G' Gestalt und Größe des Vektorenpaares $\mathfrak{y}_u$, $\mathfrak{y}_v$ fest. Wie eine geometrische Überlegung zeigt, sind danach allein durch $\overline{E} = \mathfrak{x}_u \mathfrak{y}_u$ und $\overline{F}_2 = \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_u$ die Winkel von $\mathfrak{y}_u$ gegen $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ bestimmt, ebenso ist allein durch $\overline{F}_1 = \mathfrak{x}_u \mathfrak{y}_v$ und $\overline{G} = \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_v$ die Lage von $\mathfrak{y}_v$ gegen das Zweibein $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$ bis auf eine Spiegelung an der Ebene ε festgelegt. Durch F' wird vollends die Entscheidung für den Winkel zwischen $\mathfrak{y}_u$ und $\mathfrak{y}_v$ gefällt. Die zehn Fundamentalgrößen 1. 0 des Flächenpaares bilden also ein *vollständiges System von Invarianten des Vektorenquadrupels* $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$, $\mathfrak{y}_u$, $\mathfrak{y}_v$ gegenüber der Gruppe der kongruenten Raumtransformationen, d. h. der Bewegungen *und* Umlegungen. Da jedoch der Winkel $(\mathfrak{y}_u, \mathfrak{y}_v)$, wie wir sahen, auch ohne die Kenntnis von F', wenn auch nicht eindeutig, berechenbar ist, so muß F' von den übrigen Fundamentalgrößen 1. 0. abhängen. [Die auf (2) folgenden Ungleichungen sind hier selbstverständlich als erfüllt vorauszusetzen.]

6. *Zusammenhang zwischen den Fundamentalgrößen.* Die vier Vektoren $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$, $\mathfrak{y}_u$, $\mathfrak{y}_v$ müssen in der Tat linear abhängig sein:

$$\alpha \mathfrak{x}_u + \beta \mathfrak{x}_v + \gamma \mathfrak{y}_u + \delta \mathfrak{y}_v = 0$$

mit nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten α, β, γ, δ. Multipliziert man diese Beziehung nacheinander mit $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$, $\mathfrak{y}_u$, $\mathfrak{y}_v$, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\alpha E &+ \beta F &+ \gamma \overline{E} &+ \delta \overline{F}_1 = 0,\\
\alpha F &+ \beta G &+ \gamma \overline{F}_2 &+ \delta \overline{G} = 0,\\
\alpha \overline{E} &+ \beta \overline{F}_2 &+ \gamma E' &+ \delta F' = 0,\\
\alpha \overline{F}_1 &+ \beta \overline{G} &+ \gamma F' &+ \delta G' = 0,
\end{aligned}$$

folglich durch Elimination der Skalare α, β, γ, δ:

$$\begin{vmatrix} E & F & \overline{E} & \overline{F}_1 \\ F & G & \overline{F}_2 & \overline{G} \\ \overline{E} & \overline{F}_2 & E' & F' \\ \overline{F}_1 & G & F' & G' \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

(Setzt man beispielsweise $E = G = E' = G' = 1$, $F = 0{,}5$, $\overline{E} = \overline{G} = 0$, $\overline{F}_1 = \overline{F}_2 = 0{,}5$, so findet man $12 F'^2 + 4 F' - 5 = 0$, also tatsächlich eine quadratische Bestimmungsgleichung für F', und es ist $E'G' - F'^2 > 0$.)

7. *Flächenpaare, bei denen je zwei entsprechende Flächennormalen aufeinander senkrecht stehen.* Dafür, daß die *Normalen* der Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in zugeordneten Punkten *orthogonal* sind, ist nach (2) notwendig und hinreichend, daß gilt:

$$\overline{E}\overline{G} - \overline{F}_1 \overline{F}_2 = 0. \tag{9}$$

Zu einer gegebenen Fläche $\mathfrak{x}$ erhält man eine derart entsprechende Fläche $\mathfrak{y}$, wenn man zunächst deren Berührebene durch den Vektor $\mathfrak{v} = -\mathfrak{c}' : p$ darstellt, wo p ihren Abstand von 0, die Stützfunktion des Vektors $\mathfrak{c}'$, bedeutet — es darf also keine der betrachteten Ebenen durch 0 gehen —, worauf sich für $\mathfrak{y}$ ergibt:

$$\mathfrak{y}\mathfrak{v} + 1 = 0, \quad \mathfrak{y}\mathfrak{v}_u = 0, \quad \mathfrak{y}\mathfrak{v}_v = 0; \tag{10}$$

die erste dieser Gleichungen ist die Inzidenzbedingung für den Punkt $\mathfrak{y}$ und die Ebene $\mathfrak{v}$. Hiernach muß $\mathfrak{y} = \lambda\, \mathfrak{v}_u \times \mathfrak{v}_v$ sein mit $\lambda\, \mathfrak{v}\mathfrak{v}_u\mathfrak{v}_v + 1 = 0$, also

$$\mathfrak{y} = -\mathfrak{v}_u \times \mathfrak{v}_v : \mathfrak{v}\mathfrak{v}_u\mathfrak{v}_v. \tag{10'}$$

Nun setzen wir $\mathfrak{v}$ mit Hilfe zweier gegebener, stetig differenzierbarer, skalarer Funktionen $\varphi(u, v)$ und $\chi(u, v)$ in der Form an:

$$\mathfrak{v} = \varphi\, \mathfrak{x}_u + \chi\, \mathfrak{x}_v;$$

hierbei muß wegen $\mathfrak{v}^2 = (-\mathfrak{c}' : p)^2 = 1 : p^2$ sein:

$$(E\,\varphi^2 + 2F\,\varphi\chi + G\,\chi^2) \cdot p^2 = 1.$$

An $\mathfrak{x}(u, v)$ sind für die Durchführbarkeit dieses Verfahrens, wie zu bemerken war, höhere Differenzierbarkeitsanforderungen zu stellen.

8. *Flächenpaare, bei denen je zwei entsprechende Linienelemente senkrecht sind.* Gemäß (4) ist das identische Verschwinden der gemischten Grundform (5), also das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen

$$\bar{E} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \bar{G} \equiv 0 \tag{11}$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich die Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in dem Punktepaar (u, v) „durch *Orthogonalität der Linienelemente*" entsprechen.

Der Fall, daß dies für alle Punktepaare der beiden Flächen gilt, spielt bekanntlich in der Theorie der infinitesimalen Verbiegungen eine Rolle; es braucht hier nur darauf hingewiesen zu werden, daß man zu einer gegebenen Fläche $\mathfrak{x}$ sämtliche ihr auf die genannte Weise zugehörigen Flächen $\mathfrak{y}$ durch Integration der partiellen Differentialgleichung von Weingarten für eine später von Volterra kinematisch gedeutete skalare Hilfsfunktion finden kann. Es handelt sich hier um einen Spezialfall der Auffindung aller infinitesimalen Deformationen einer gegebenen Fläche aus den gegeben gedachten Hauptverzerrungen[5]).

II.

9. *Flächenpaare, bei denen je zwei entsprechende Flächennormalen parallel sind.* Der Fall, daß sich zwei Flächen „durch parallele Flächenelemente"

[5]) Hierzu vergleiche man eine Arbeit d. V. über Deformationen von Membranen in der Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 7 (1927), S. 464 f. u. 468 f.

entsprechen, erfordert eine etwas ausführlichere Behandlung, einesteils, weil dabei einige allgemein für Flächenabbildungen gültige Tatsachen eine neue Formulierung erfordern, die der hier vorliegenden natürlichen Koppelung der Orientierungen der beiden Flächen Rechnung trägt, andernteils, weil dadurch neue Begriffsbildungen nötig werden und auch neue Bedingungen zu berücksichtigen sind. Besonders muß auch betont werden, daß diese Abbildungsweise der sogenannten relativen Differentialgeometrie[6]) zugrunde liegt, in der allerdings mehr die Eigenschaften, Gebilde und Größen, die gegenüber der Gruppe Π der affinen Raumtransformationen invariant sind, im Vordergrund des Interesses stehen.

10. *Das Kriterium für den Parallelismus der Normalen* in zwei einander entsprechenden Punkten (u, v) der Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ($\mathfrak{c} = \pm \mathfrak{c}'$) ist entweder nach (3)

$$\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_u = \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_v = \mathfrak{x}_u \mathfrak{y}_u \mathfrak{y}_v = \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_u \mathfrak{y}_v = 0, \tag{12'}$$

wobei geometrisch evident ist, daß irgend zwei dieser Gleichungen aus den beiden anderen folgen, oder nach (2)

$$(\overline{E}\,\overline{G} - \overline{F}_1 \overline{F}_2)^2 = (E G - F^2)(E' G' - F'^2). \tag{12}$$

Um zu einer gegebenen Fläche $\mathfrak{x}$ alle ihr durch parallele Normalen entsprechenden Flächen $\mathfrak{y}$ zu finden, pflegt man die Formel (10') zu benutzen, in der nur $\mathfrak{v}$ eine andere Bedeutung hat, nämlich $\mathfrak{v} = -\mathfrak{c} : p$ mit einer Abstandsfunktion $p(u, v)$, die willkürlich gewählt werden darf, wenn sie nur zweimal stetig differenzierbar ist, während man bei $\mathfrak{x}$ die Existenz sämtlicher Ableitungen 3. 0. und ihre Stetigkeit voraussetzen muß, sofern man wünscht, daß $\mathfrak{y}$ stetig differenzierbar sei.

11. *Flächenmaßstab.* Es gibt einen Ausdruck für den Flächenmaßstab M der Abbildung an der Stelle (u, v), der nur für den Fall paralleler Normalen in den Punkten $\mathfrak{x}(u, v)$ und $\mathfrak{y}(u, v)$ gilt, dafür aber, im Gegensatz zu der allgemein gültigen Formel, M als rationale Funktion der Fundamentalgrößen 1. 0. der Fläche $\mathfrak{x}$ und der gemischten Fundamentalgrößen 1. 0. der beiden Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gibt: Definiert ist M als der Quotient $\mathfrak{c}' \mathfrak{y}_u \mathfrak{y}_v : \mathfrak{c} \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v$; daraus folgt, wenn wir jetzt durch die Forderung $\mathfrak{c}' = \mathfrak{c}$ gleiche Drehsinne in den beiden Berührebenen einführen:

$$M \cdot \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v = \mathfrak{y}_u \times \mathfrak{y}_v;$$

hieraus fließt

$$M (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)^2 = (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)(\mathfrak{y}_u \times \mathfrak{y}_v) = \big((\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) \times \mathfrak{y}_u\big)\mathfrak{y}_v$$
$$= (\mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_u - \mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_u)\mathfrak{y}_v,$$

[6]) Inauguriert von H. MINKOWSKI und EMIL MÜLLER, hauptsächlich weiter bearbeitet von A. DUSCHEK und W. SÜSS; vgl. die Literaturzusammenstellung in BONNESEN-FENCHEL, Theorie der konvexen Körper, Berlin 1934, S. 64f.

also

$$M = (\bar{E}\bar{G} - \bar{F}_1\bar{F}_2) : (EG - F^2). \tag{13}$$

M ist leicht als der Quotient der Krümmungmaße der beiden Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zu erkennen — vorausgesetzt, daß diese Größen existieren (vgl. später Nr. 19); dies ist im Zusammenhang mit der Deutung der Funktion M als Relativkrümmung von $\mathfrak{x}$ bezüglich $\mathfrak{y}$ wohlbekannt.

12. *Fixrichtungen.* Da in dem jetzt betrachteten Falle die Tangenten beider Flächen in entsprechenden Punkten sämtlich einer Ebene parallel sind, so ist das Parallelwerden entsprechender Berührvektoren keine Ausnahme mehr (wie im letzten Abschnitt von Nr. 4); die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist das Verschwinden des Ausdruckes (6) oder, da hier keines der Linienelemente $d\mathfrak{y}$ zu $\mathfrak{c}$ parallel sein kann[7]):

$$(14') \quad \mathfrak{c}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} = \mathfrak{c}\mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_u\, du^2 + (\mathfrak{c}\mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v + \mathfrak{c}\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u)\, du\, dv + \mathfrak{c}\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_v dv^2 = 0.$$

Ersetzt man $\mathfrak{c}$ überall durch $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v$, so erhält man hieraus nach dem Muster

$$\begin{aligned}(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_u) &= (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_u)\,\mathfrak{y}_u = (\mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{x}_u^2 - \mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v)\mathfrak{y}_u \\ &= \mathfrak{x}_u^2 \cdot \mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u - \mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(14) \quad W \cdot \mathfrak{c}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} = {} & (E\bar{F}_2 - F\bar{E})\, du^2 + (E\bar{G} - F(\bar{F}_1 - \bar{F}_2) - \\ & - G\bar{E})\, du\, dv + (F\bar{G} - G\bar{F}_1)\, dv^2 = 0.\end{aligned}$$

Der Vollständigkeit halber mögen auch die Abbildungsmaßstäbe für die Fixrichtungen μ_1 und μ_2 berechnet werden; man erhält sie aus dem Ansatz:

$$\mu\,(\mathfrak{x}_u du + \mathfrak{x}_v dv) = \mathfrak{y}_u du + \mathfrak{y}_v dv,$$

oder, nach skalarer Multiplikation mit $\mathfrak{x}_u$ und mit $\mathfrak{x}_v$, aus

$$\begin{aligned}(\mu E - \bar{E})\, du + (\mu F - \bar{F}_1)\, dv &= 0, \\ (\mu F - \bar{F}_2)\, du + (\mu G - \bar{G})\, dv &= 0,\end{aligned}$$

also aus der quadratischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} \mu E - \bar{E} & \mu F - \bar{F}_1 \\ \mu F - \bar{F}_2 & \mu G - \bar{G} \end{vmatrix} = 0,$$

nach deren Auflösung eine der beiden vorhergehenden Gleichungen den zu jedem Wert von μ gehörenden Wert von $du : dv$ liefert.

Wie man sieht, ist

$$\mu_1 \mu_2 = M.$$

---

[7]) Imaginär können die beiden im allgemeinen vorhandenen Fixrichtungen nur sein, wenn beide Flächen in den Punkten (u, v) hyperbolische Krümmung besitzen, und sie sind es dann auch nur, wenn die beiden Haupttangentenpaare sich trennen. — Es handelt sich hier, wenn eine der beiden Flächen die „Eichfläche" ist, um die „Relativkrümmungsrichtungen".

13. *Flächenpaare, bei denen je zwei einander entsprechende Linienelemente parallel sind.* Ist stets $d\mathfrak{x} \parallel d\mathfrak{y}$, so ist die durch die Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ induzierte Affinität $\varepsilon \to \varepsilon'$ eine Ähnlichkeit, und es muß sein: $\mathfrak{y}_u = \lambda \mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{y}_v = \lambda \mathfrak{x}_v$. Soll dies für alle Punkte der beiden Flächen gelten, so muß — falls sämtliche Ableitungen 2. 0. von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ existieren und stetig sind, woraus auch die stetige Differenzierbarkeit von λ folgt — sein: $\mathfrak{y}_{uv} = \lambda \mathfrak{x}_{uv} + \lambda_v \mathfrak{x}_u = \mathfrak{y}_{vu} = \lambda \mathfrak{x}_{vu} + \lambda_u \mathfrak{x}_v$, also $\lambda_v \mathfrak{x}_u = \lambda_u \mathfrak{x}_v$, mithin wegen der linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$: $\lambda_u = \lambda_v = 0$, somit $\lambda = \text{const}$. Daher fließt aus $d\mathfrak{y} = \lambda\, d\mathfrak{x}$ $\mathfrak{y} = \lambda \mathfrak{x} + \text{const}$. Die *Flächen* $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sind also ähnlich und *ähnlich gelegen*. Ein Nachteil dieser Beweisführung ist, daß sie mehr Voraussetzungen bezüglich der Differenzierbarkeit erforderlich macht, als dem Wesen der Fragestellung angemessen ist.

Die Bedingung für die ähnliche Lage von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ist somit nach (14):

$$(14'') \qquad E\bar{F}_2 - F\bar{E} = E\bar{G} - F(\bar{F}_1 - \bar{F}_2) - G\bar{E} = F\bar{G} - G\bar{F}_1 \equiv 0.$$

14. *Hauptrichtungen und Hauptmaßstäbe.* Allgemeine Überlegungen sicherten schon früher[8]) die Realität mindestens, im allgemeinen aber auch nur eines Paares orthogonaler Vektoren $a\mathfrak{x}_u + b\mathfrak{x}_v$, $c\mathfrak{x}_u + d\mathfrak{x}_v$, dem wieder ein Paar orthogonaler Vektoren entspricht; dies sind die sogenannten Hauptrichtungen in den Punkten $\mathfrak{x}(u, v)$, $\mathfrak{y}(u, v)$. a, b, c, d seien so gewählt, daß $a\mathfrak{x}_u + b\mathfrak{x}_v$ und $c\mathfrak{x}_u + d\mathfrak{x}_v$ Einheitsvektoren sind; dann haben die zugeordneten Vektoren $a\mathfrak{y}_u + b\mathfrak{y}_v$ und $c\mathfrak{y}_u + d\mathfrak{y}_v$ die Längen m_1 und m_2 der sogenannten Hauptmaßstäbe.

Es sei δ der Winkel, um den $m_1\,(a\mathfrak{x}_u + b\mathfrak{x}_v)$ gedreht werden muß, um mit $a\mathfrak{y}_u + b\mathfrak{y}_v$ zusammenzufallen; dann kommt, bei passender Wahl des Vorzeichens von m_2, $m_2(c\mathfrak{x}_u + d\mathfrak{x}_v)$ nach Drehung um δ mit $c\mathfrak{y}_u + d\mathfrak{y}_v$ zur Deckung. Von den verschiedenen Beziehungen, die dann gelten, brauchen wir nur einige, zunächst:

$$(a\mathfrak{x}_u + b\mathfrak{x}_v) \times (c\mathfrak{x}_u + d\mathfrak{x}_v) = \mathfrak{c},$$

also

$$(ad - bc)\, \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v = \mathfrak{c},$$

folglich nach skalarer Multiplikation mit $\mathfrak{c}$:

$$(15a) \qquad (ad - bc) \cdot W = 1.$$

Ferner:

$$(a\mathfrak{x}_u + b\mathfrak{x}_v)(c\mathfrak{y}_u + d\mathfrak{y}_v) = m_2 \cos(\delta + 90^0),$$
$$(c\mathfrak{x}_u + d\mathfrak{x}_v)(a\mathfrak{y}_u + b\mathfrak{y}_v) = m_1 \cos(\delta - 90^0),$$

folglich durch Subtraktion der oberen von der unteren Gleichung

$$(ad - bc)(\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u - \mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v) = (m_1 + m_2) \sin\delta$$

---

[8]) Siehe die in Fußnote 1 zitierte Arbeit. S. 302.

oder

(15b) $$W(m_1 + m_2)\sin\delta = \overline{F}_2 - \overline{F}_1.$$

Schließlich:

$$(a\mathfrak{x}_u + b\mathfrak{x}_v) \times (c\mathfrak{y}_u + d\mathfrak{y}_v) = cm_2 \sin(\delta + 90^0),$$
$$(c\mathfrak{x}_u + d\mathfrak{x}_v) \times (a\mathfrak{y}_u + b\mathfrak{y}_v) = cm_1 \sin(\delta - 90^0),$$

woraus folgt

$$(ad - bc)(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{y}_u) = c(m_1 + m_2)\cos\delta;$$

hieraus ergibt sich nach skalarer Multiplikation mit $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v$ und Anwendung der Zerlegungsformel [wie beim Übergang von (14′) zu (14)]

$$(ad - bc)(\mathfrak{x}_u^2 \cdot \mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u + \mathfrak{x}_v^2 \cdot \mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_u) = W(m_1 + m_2)\cos\delta$$

oder

(15c) $$(EG - F^2)(m_1 + m_2)\cos\delta = E\overline{G} - F(\overline{F}_1 + \overline{F}_2) + G\overline{E}.$$

Aus (15b) und (15c) ist $m_1 + m_2$ bis aufs Vorzeichen berechenbar, nach Wahl dieses Zeichens ist δ eindeutig bestimmt; mit Hilfe von (13) können dann wegen $M = m_1 m_2$ die Hauptmaßstäbe eindeutig berechnet werden.

Der Vergeich mit der in Nr. 12 abgeleiteten Gleichung für μ_1 und μ_2 zeigt, daß gilt:

$$\mu_1 + \mu_2 = (m_1 + m_2)\cos\delta.$$

15. *Die Verdrehung.* Der Winkel δ ist offenbar in dem Falle paralleler Normalen in entsprechenden Punkten eine für die Abbildung ebenso charakteristische Größe wie etwa die Hauptmaßstäbe; wir nennen δ die *Verdrehung der Abbildung* $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ an der Stelle (u, v) und führen noch das „*Verdrehungsmaß*" ein:

(16) $$\operatorname{tg}\delta = W(\overline{F}_2 - \overline{F}_1) : (E\overline{G} - F(\overline{F}_1 + \overline{F}_2) + G\overline{E}).$$

Es gibt einen einzigen *Ausnahmefall*, in dem der Begriff des Verdrehungswinkels seinen eindeutigen Sinn verliert, den der *indirekten Winkeltreue*: $m_1 = -m_2$; in diesem Fall kann sich, wie eine geometrische Überlegung zeigt, für δ jede Größe ergeben, in Übereinstimmung damit, daß infolge $m_1 + m_2 = 0$ aus (15b) und (15c) folgt, daß sowohl der Zähler als auch der Nenner des Ausdrucks (16) für das Verdrehungsmaß Null wird.

16. *Verzerrungsmaß.* Neben dem schon bei früherer Gelegenheit[9]) für die allgemeine Flächenabbildung eingeführten Maß der Verzerrung

$$V = \left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{2m_1 m_2}\right)^2$$

können wir für die Abbildung mit parallelen Normalen in entsprechenden Punkten ein „*modifiziertes Verzerrungsmaß*" einführen:

$$V' = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1}\right),$$

[9]) A. a. O., S. 304 u. 306.

eine Funktion, die zwar nicht verschwinden kann, aber, was für eine den Drehsinn umkehrende Abbildung charakteristisch ist, auch negativer Werte fähig ist und durch Annahme eines ihrer Extremwerte 1 bzw. -1 das Vorliegen direkter bzw. indirekter Winkeltreue anzeigt; übrigens gilt $V'^2 = V + 1$. Da — vgl. (15b), (15c) sowie (13) —

$$V' = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2\,m_1\,m_2} = \frac{(m_1 + m_2)^2}{2\,m_1\,m_2} - 1 = \frac{(\bar{F}_1 - \bar{F}_2)^2}{W^2\,2M} + \frac{(E\bar{G} - F(\bar{F}_1 + \bar{F}_2) + G\bar{E})^2}{(E\bar{G} - F^2)^2\,2M} - 1$$

ist, so finden wir

$$(17) \qquad V' = \frac{(E\bar{G} - F(\bar{F}_1 + \bar{F}_2) + G\bar{E})^2 - (EG - F^2)(2\bar{E}\bar{G} - \bar{F}_1^2 - \bar{F}_2^2)}{2\,(EG - F^2)(\bar{E}\bar{G} - \bar{F}_1\bar{F}_2)}.$$

17. *Zusammenhang zwischen den Grundformen.* In Teil II traten von Nr. 11 an bis jetzt die Fundamentalgrößen der Fläche $\mathfrak{y}$ nirgends auf; das steht im Einklang damit, daß sie, wie folgende Überlegung zeigt, durch die übrigen sieben Fundamentalgrößen 1. 0. bestimmt sind, sobald sich die Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ mit parallelen Flächenelementen entsprechen: Wenn die vier Vektoren $\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{y}_u, \mathfrak{y}_v$ nämlich komplanar sind, so bestimmen $\bar{E} = \mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_u$ und $\bar{F}_2 = \mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u$ die Lage des Vektors $\mathfrak{y}_u$ gegen $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ eindeutig, ebenso $\bar{F}_1 = \mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v$ und $\bar{G} = \mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_v$ die von $\mathfrak{y}_v$ gegen $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ vollständig (vgl. Nr. 5); folglich müssen E', F', G' eindeutig aus $E, F, G, \bar{E}, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{G}$ berechenbar sein, wobei die vier gemischten Fundamentalgrößen im einzelnen Punktepaar (u, v), abgesehen davon, daß $\bar{E}\bar{G} - \bar{F}_1\bar{F}_2 \neq 0$ sein muß (vgl. Nr. 7), auch dann noch frei gewählt werden können, wenn E, F, G gegeben sind. In der Tat folgt aus

$$W \cdot \mathfrak{c} \times \mathfrak{y}_u = (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) \times \mathfrak{y}_u = \mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_u - \mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u$$

und

$$W \cdot \mathfrak{c} \times \mathfrak{y}_v = (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) \times \mathfrak{y}_v = \mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_v$$

oder

$$W \cdot \mathfrak{c} \times \mathfrak{y}_u = \bar{E}\mathfrak{x}_v - \bar{F}_2\mathfrak{x}_u \quad \text{und} \quad W \cdot \mathfrak{c} \times \mathfrak{y}_v = \bar{F}_1\mathfrak{x}_v - \bar{G}\mathfrak{x}_u,$$

da, wenn $\mathfrak{u}$ irgendeinen Vektor der Berührebene ε bedeutet, $\mathfrak{c} \times \mathfrak{u}$ der aus $\mathfrak{u}$ durch Drehen um $+90^0$ in ε hervorgehende Vektor ist, also $(\mathfrak{c} \times \mathfrak{u})^2 = \mathfrak{u}^2$ wird:

$$(18) \qquad \begin{aligned} (EG - F^2) \cdot E' &= E \cdot \bar{F}_2^2 - 2F \cdot \bar{E}\bar{F}_2 + G \cdot \bar{E}^2, \\ (EG - F^2) \cdot F' &= E \cdot \bar{F}_2\bar{G} - F(\bar{E}\bar{G} + \bar{F}_1\bar{F}_2) + G \cdot \bar{E}\bar{F}_1, \\ (EG - F^2) \cdot G' &= E \cdot \bar{G}^2 - 2F \cdot \bar{F}_1\bar{G} + G \cdot \bar{F}_1^2. \end{aligned}$$

Diese Beziehungen kann man in einer Gleichung zusammenfassen: Bezeichnen wir nämlich mit $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2$ ein Paar von in Hauptrichtungen fallenden Einheitsvektoren und mit $\mathfrak{t}_1', \mathfrak{t}_2'$ das aus ihm durch Drehung um δ hervorgehende Paar, so können wir einander zugeordnete Linienelemente $d\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{y}$ folgendermaßen ausdrücken:

$$d\mathfrak{x} = \xi\mathfrak{t}_1 + \eta\mathfrak{t}_2, \quad d\mathfrak{y} = m_1\xi\mathfrak{t}_1' + m_2\eta\mathfrak{t}_2',$$

wo ξ und η beliebige Zahlen bedeuten, die nicht beide zugleich Null sind. Daraus ergeben sich folgende Ausdrücke für die vier quadratischen Differentialformen, die sich aus $d\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{y}$ bilden lassen:

$$\begin{aligned} d\mathfrak{x}^2 &= \xi^2 + \eta^2, \\ d\mathfrak{y}^2 &= m_1^2\xi^2 + m_2^2\eta^2, \\ d\mathfrak{x}d\mathfrak{y} &= m_1 \cos\delta \cdot \xi^2 + m_2 \cos\delta \cdot \eta^2 + (m_1 - m_2)\sin\delta \cdot \xi\eta, \\ \mathfrak{c}d\mathfrak{x}d\mathfrak{y} &= m_1 \sin\delta \cdot \xi^2 + m_2 \sin\delta \cdot \eta^2 - (m_1 - m_2)\cos\delta \cdot \xi\eta. \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit $m_1 m_2$, die zweite mit 1, die dritte mit $-(m_1 + m_2)\cos\delta$, die vierte mit $-(m_1 + m_2)\sin\delta$ und addiert sie dann, so ergibt sich:

$$m_1 m_2\, d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2 - (m_1 + m_2)(\cos\delta \cdot d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} + \sin\delta \cdot \mathfrak{c}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}) = 0,$$

oder mit Rücksicht auf (13), (15b) und (15c):

$$\begin{aligned} (18') \quad & (\overline{E}\overline{G} - \overline{F}_1\overline{F}_2)\, d\mathfrak{x}^2 + (EG - F^2)\, d\mathfrak{y}^2 - (E\overline{G} - F(\overline{F}_1 + \overline{F}_2) + \\ & + G\overline{E})\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} + (\overline{F}_1 - \overline{F}_2)(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} = 0. \end{aligned}$$

Führt man hierin du und dv ein, so bekommt man wegen der Willkürlichkeit von du und dv drei Gleichungen, die sich als mit (18) gleichbedeutend herausstellen.

Man könnte auch allgemein ansetzen:

$$d\mathfrak{y} = \mathfrak{c} \times d\mathfrak{y} \times \mathfrak{c} + \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}\, d\mathfrak{y}$$

oder

$$W^2 d\mathfrak{y} = (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) \times d\mathfrak{y} \times (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) + (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)(\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v d\mathfrak{y}),$$

woraus nach Multiplikation mit $d\mathfrak{y}$ folgt:

$$W^2 d\mathfrak{y}^2 = ((\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) \times d\mathfrak{y})^2 + (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v d\mathfrak{y})^2;$$

dies erweist sich wegen $(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) \times d\mathfrak{y} = \mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{x}_u d\mathfrak{y} - \mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_v d\mathfrak{y}$ in dem Falle $\mathfrak{c} \parallel \mathfrak{c}'$ oder $\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v d\mathfrak{y} = 0$ als äquivalent mit den Gleichungen (18), im Fall $\mathfrak{c} \times \mathfrak{c}' \neq 0$ aber als Identität.

18. *Möglichkeit der Koppelung zweier Flächen durch parallele Normalen.* Können zwei beliebige gegebene Flächen $\mathfrak{x}(u, v)$ und $\bar{\mathfrak{y}}(\bar{u}, \bar{v})$ so aufeinander abgebildet werden, daß sie in entsprechenden Punkten parallele Berührebenen haben? Bei geeigneter Festsetzung der Flächenorientierungen muß dann gelten:

$$(19) \qquad \mathfrak{c}(u, v) = \bar{\mathfrak{c}}(\bar{u}, \bar{v}).$$

Diese Vektorgleichung vertritt wegen $\mathfrak{c}^2 = \bar{\mathfrak{c}}^2 = 1$ nur zwei skalare Gleichungen; stellen diese Abbildungsformeln dar? Diese Frage können wir nur unter der Annahme der Existenz wenigstens einer Lösung $(u, v; \bar{u}, \bar{v})$ von (19) weiter behandeln, und zwar in der Weise, daß wir untersuchen, ob es Umgebungen von (u, v) auf $\mathfrak{x}$ und von $(\bar{u}, \bar{v})$ auf $\bar{\mathfrak{y}}$ gibt, in denen die Funktional-

determinante $\bar{u}_u \bar{v}_v - \bar{u}_v \bar{v}_u$ von Null verschieden ist. Wir müssen also die Gleichung (19) differenzieren können, müssen also fordern, daß die Funktionen $\mathfrak{x}(u, v)$ und $\bar{\mathfrak{y}}(\bar{u}, \bar{v})$ sämtliche zweiten Ableitungen besitzen und daß diese stetig sind; unter dieser Voraussetzung gilt:

$$\mathfrak{c}_u = \bar{\mathfrak{c}}_{\bar{u}} \bar{u}_u + \bar{\mathfrak{c}}_{\bar{v}} \bar{v}_u, \qquad \mathfrak{c}_v = \bar{\mathfrak{c}}_{\bar{u}} \bar{u}_v + \bar{\mathfrak{c}}_{\bar{v}} \bar{v}_v,$$

folglich

$$\mathfrak{c}_u \times \mathfrak{c}_v = \bar{\mathfrak{c}}_{\bar{u}} \times \bar{\mathfrak{c}}_{\bar{v}} \cdot (\bar{u}_u \bar{v}_v - \bar{u}_v \bar{v}_u).$$

Hieraus erkennen wir: Wenn für die angenommene Lösungsstelle $(u, v; \bar{u}, \bar{v})$ von (19) sowohl $\mathfrak{c}_u \times \mathfrak{c}_v \neq 0$ als auch $\bar{\mathfrak{c}}_{\bar{u}} \times \bar{\mathfrak{c}}_{\bar{v}} \neq 0$ ist, so ist dort sicher auch $\bar{u}_u \bar{v}_v - \bar{u}_v \bar{v}_u \neq 0$; es gibt dann also zufolge der Stetigkeit von $\mathfrak{c}(u, v)$ und $\bar{\mathfrak{c}}(\bar{u}, \bar{v})$ Umgebungen von (u, v) auf $\mathfrak{x}$ und von $(\bar{u}, \bar{v})$ auf $\bar{\mathfrak{y}}$, innerhalb deren (19) eine reguläre Abbildung $\mathfrak{x} \to \bar{\mathfrak{y}}$ definiert. Ist aber an der Stelle einer der Vektoren $\mathfrak{c}_u \times \mathfrak{c}_v$ oder $\bar{\mathfrak{c}}_{\bar{u}} \times \bar{\mathfrak{c}}_{\bar{v}}$ der Nullvektor, so ist entweder $\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)}$ oder $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$ Null; verschwinden beide Vektoren $\mathfrak{c}_u \times \mathfrak{c}_v$, $\bar{\mathfrak{c}}_{\bar{u}} \times \bar{\mathfrak{c}}_{\bar{v}}$, so ist eine besondere Untersuchung erforderlich.

Natürlich kann auch dann, wenn nicht alle Differentialquotienten 2. 0. von $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{y}}$ existieren, eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung durch parallele Normalen von $\mathfrak{x}$ auf $\bar{\mathfrak{y}}$ möglich sein; doch ist dafür kein allgemeines Kriterium bekannt.

19. *Abbildung einer Fläche auf eine Kugel.* Immer ist es möglich, eine beliebige Fläche auf die Einheitskugel derart abzubilden, daß die Berührebenen in entsprechenden Punkten gleiche Stellung haben; man braucht zu dem Zweck ja nur dem Punkte $\mathfrak{x}(u, v)$ den Punkt $\mathfrak{c}(u, v)$ zuzuweisen. Diese von Gauss in die Flächentheorie eingeführte Abbildung „nach dem Prinzip gleichgerichteter Normalen" spielt bekanntlich eine wichtige Rolle. Da $\mathfrak{y} = \mathfrak{c}$ sich durch die Ableitungen von $\mathfrak{x}$ ausdrückt, so muß jetzt $\mathfrak{x}(u, v)$ stetige zweite Differentialquotienten besitzen, damit die gemischten Fundamentalgrößen existieren; es werden dann

$$(20) \qquad \bar{E} = \mathfrak{x}_u \mathfrak{c}_u = -\mathfrak{c}\mathfrak{x}_{uu} = -L, \quad \bar{F}_1 = \mathfrak{x}_u \mathfrak{c}_v = -\mathfrak{c}\mathfrak{x}_{uv} = -M,$$
$$\bar{F}_2 = -M, \quad \bar{G} = -N$$

im wesentlichen die Fundamentalgrößen 2. 0. der Fläche $\mathfrak{x}$. Da hier $\bar{F}_1 = \bar{F}_2$ ist, so gilt wegen (15b) — und zwar auch, wenn $\mathfrak{x}$ eine Minimalfläche $(m_1 + m_2 = 0)$ ist, weil dann jeder Wert von δ sinnvoll ist — der Satz:

Die Abbildung einer Fläche auf eine Kugel nach dem Prinzip paralleler Normalen ist verdrehungsfrei.

20. *Einige affininvariante Eigenschaften.* Alle unsere Betrachtungen gehörten der euklidischen Geometrie an. Da aber jede Abbildung einer Fläche auf eine andere, bei der die Berührebenen in entsprechenden Punkten

parallel sind, durch eine affine Transformation des Raumes wieder in eine solche übergeht, so empfinden wir es als geboten, unter den im II. Teil aufgetretenen Begriffen und Eigenschaften diejenigen hervorzuheben, die invariant sind gegenüber der Gruppe Π der affinen Raumtransformationen.

Daß jede Fixrichtung und der für sie geltende Abbildungsmaßstab μ, ferner die ähnliche Lage zweier räumlicher Figuren affininvariant sind, sei nur der Vollständigkeit halber erwähnt.

Auch daß der Flächenmaßstab $M = m_1 m_2 = \mu_1 \mu_2$ bei einer Abbildung durch parallele Berührebenen eine affine Invariante ist, liegt auf der Hand.

Merkwürdig aber ist, daß die Größe $(m_1 + m_2) \cos \delta$ eine Affininvariante ist. In der Tat: Die Affinität $\varepsilon \to \varepsilon'$ führt $\mathfrak{x}_u$ in $\mathfrak{y}_u = A\,\mathfrak{x}_u + B\,\mathfrak{x}_v$, $\mathfrak{x}_v$ in $\mathfrak{y}_v = C\,\mathfrak{x}_u + D\,\mathfrak{x}_v$ über. Es ist bekannt, daß die Summe der Hauptdiagonalglieder der Koeffizientenmatrix, ihre Spur $A + D$, eine Invariante gegenüber der Gruppe Π ist; die andere Invariante ist die Determinante der Matrix $AD - BC = M$. Die Koeffizienten A, B, C, D könnte man nun nach den beiden (18) vorausgehenden, vektoriell mit $\mathfrak{c}$ multiplizierten Formeln durch die Fundamentalgrößen 1. 0. ausdrücken; einfacher aber ist es, wenn wir uns in die auf (15 c) führende Entwicklung einschalten und ausrechnen:

$$(m_1 + m_2) \cos \delta = (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)\,(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{y}_u) : (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)^2$$
$$= (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)\,(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v D - \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_u A) : (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)^2$$

oder

$$(m_1 + m_2) \cos \delta = A + D.$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen, die übrigens auch unmittelbar aus der am Schluß von Nr. 14 nachgewiesenen Formel folgt.

Ist im besonderen $\delta = \pm 90^0$, also $A + D = 0$, so ändert sich dies sonach bei einer Transformation der Gruppe Π nicht[10]; es gilt folglich der Satz:

Die Eigenschaft einer Flächenabbildung, unendlich großes Verdrehungsmaß zu besitzen, ist affininvariant; in diesem Zusammenhang muß die indirekte Winkeltreue ($m_1 + m_2 = 0$) unter die Abbildungen mit unendlich starker Verdrehung gerechnet werden.

Wir haben bisher die Flächenabbildungen hauptsächlich nur in den Umgebungen eines einzelnen Paares entsprechender Punkte untersucht. Deshalb bot sich bis jetzt keine Gelegenheit, auf die Integrabilitätsbedingungen einzugehen, denen die Fundamentalgrößen unterliegen; bei weitergehenden Untersuchungen müssen diese jedoch notwendig berücksichtigt werden.

[10]) In diesem Fall stehen die Flächen gegenseitig in der Beziehung „relativer Minimalflächen" zueinander.

(Eingegangen am 2. Mai 1943.)

Ein Summationsverfahren für die Poincaréschen Reihen von der Dimension −2 zu den hyperbolischen Fixpunktepaaren.

Von

Hans Petersson in Straßburg.

Herrn C. CARATHÉODORY zum siebzigsten Geburtstag am 13. September 1943.

Einleitung.

Die vorliegende Abhandlung schließt sich eng an die zwei letzten von vier Arbeiten an, in denen der Zusammenhang der POINCARÉschen Reihen mit der algebraischen Struktur der automorphen Funktionenscharen aufgedeckt und systematisch erforscht wurde[1]). Den Kern dieser Zusammenhänge bilden die zum ersten Male in [J IV] in vollem Umfange hergestellten und einheitlich begründeten wechselseitigen Beziehungen zwischen den Entwicklungen der automorphen Formen einerseits und den POINCARÉschen Reihen andererseits. Es wurde dort gezeigt, wie man durch das Prinzip der *transversalen Summation* aus den Entwicklungen der automorphen Formen den Konstruktionsansatz für die drei Typen der POINCARÉschen Reihen gewinnt, und wie man umgekehrt von diesen Reihen durch das Prinzip der *Metrisierung* zu den Koeffizienten jener Entwicklungen zurückgelangt.

Zur Formulierung der Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung bedienen wir uns einer abkürzenden Terminologie. Eine POINCARÉsche Reihe nennen wir mit Rücksicht auf ihre Entstehung durch transversale Summation nunmehr kurz eine *Quersumme*; wir sprechen von einer Quersumme vom parabolischen Typ oder kurz einer parabolischen Quersumme, wenn es sich

[1]) Die linearen Relationen zwischen den ganzen POINCARÉschen Reihen von reeller Dimension zur Modulgruppe (J I), Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hansischen Universität **12** (1938); Über eine Metrisierung der ganzen Modulformen (J II), Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **49** (1939); Über eine Metrisierung der automorphen Formen und die Theorie der POINCARÉschen Reihen (J III), Math. Annalen **117** (1940); Einheitliche Begründung der Vollständigkeitssätze für die POINCARÉschen Reihen von reeller Dimension bei beliebigen Grenzkreisgruppen von erster Art (J IV), Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hansischen Universität **14** (1941). — Daneben werden in Einzelheiten noch Ergebnisse aus zwei weiteren Arbeiten verwendet: Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen I (G I) und V (G V), Math. Annalen **115** (1938); Math. Zeitschr. **44** (1938).

um eine Poincaré-Reihe zu den parabolischen Fixpunkten handelt [(J IV), (5)]. Analog werden die elliptischen und hyperbolischen Quersummen erklärt [(J IV), (8), (11)]. Im übrigen wird an der Terminologie von (J III) und (J IV) wenig geändert; die wichtigsten Bezeichnungen und Grundlagen der Theorie stellen wir im Anschluß an diese Einleitung in einem besonderen Abschnitt zusammen.

Das allgemeine Ziel dieserArbeit ist, an einigen für die Theorie vordringlichen Beispielen die *Beziehungen* zu diskutieren, welche *zwischen den Quersummen der drei Typen* bestehen. Es sei Γ eine Grenzkreisgruppe von erster Art (die wir uns wie bisher als Gruppe von unimodularen reellen Matrizen gegeben denken), $r > 2$, v ein Multiplikatorsystem des Betrages 1 zur Gruppe Γ und zur Dimension $-r$, τ eine komplexe Variable mit positivem Imaginärteil. Den Ausgangspunkt für die Herstellung dieser Beziehungen bildet die (spezialisierte) elliptische Quersumme

$$(1) \qquad \mathsf{P}_{-r}(\tau, z) = \sum_{L \subset \Gamma} \frac{1}{v(L)\,(\gamma\tau + \delta)^r\,(L\tau - \bar{z})^r} \quad \left(L\tau = L(\tau),\ L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right),$$

in der z einen Parameter mit positivem Imaginärteil bezeichnet. $\mathsf{P}_{-r}(\tau, z)$ gestattet bekanntlich [(J III), (128)], falls $\tau = \infty$ parabolischer Fixpunkt von Γ ist, eine Entwicklung

$$\mathsf{P}_{-r}(\tau, z) = C(\Gamma, r, v) \sum_{\nu + \varkappa > 0} (\nu + \varkappa)^{r-1}\, e^{-2\pi i(\nu+\varkappa)\frac{\bar{z}}{N}}\, G_{-r}(\tau, v, I, \Gamma, \nu),$$

in der $C(\Gamma, r, v)$ eine Konstante elementaren Charakters, U^N die normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_\infty$, $v(U^N) = e^{2\pi i \varkappa}$, $0 \leqq \varkappa < 1$ ist, und vermöge deren man die parabolische Quersumme $G_{-r}(\tau, v, I, \Gamma, \nu)$ mit Hilfe einer Integration nach dz durch $\mathsf{P}_{-r}(\tau, z)$ ausdrücken kann.

Ein analoger Zusammenhang besteht nun, wie im folgenden zunächst gezeigt wird, zwischen $\mathsf{P}_{-r}(\tau, z)$ und den hyperbolischen Quersummen $\Xi_{-r}(\tau, v, \mathsf{H}, \Gamma, \nu)$ [(J IV), (11)] in Gestalt einer Gleichung

$$(2) \qquad \mathsf{P}_{-r}(\tau, z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} Q_{r,\nu}(v, \mathsf{H}, \Gamma, z)\, \Xi_{-r}(\tau, v, \mathsf{H}, \Gamma, \nu)$$

mit Koeffizienten von (verhältnismäßig) elementarer Bauart. Aus dieser Formel gewinnt man eine Darstellung von $\Xi_{-r}(\tau, v, \mathsf{H}, \Gamma, \nu)$ durch ein Integral nach dz, dessen Integrand, abgesehen von elementaren Faktoren, mit der elliptischen Quersumme $\mathsf{P}_{-r}(\tau, z)$ übereinstimmt.

Diese insgesamt vier hier angedeuteten Formeln vermitteln also — nicht auf dem Umwege über die linearen Relationen, die zwischen Quersummen als automorphen Formen bestehen können, sondern *explizit analytisch* —

den Zusammenhang zwischen den Quersummen der drei Typen. Dabei nehmen die elliptischen Quersummen eine zentrale Stellung ein. Man kann demgemäß, wie hier an einem Beispiel aus der Metrisierung gezeigt werden wird, Aufgaben über Quersummen des einen Typus auf solche über Quersummen eines anderen Typus zurückführen. Bei der Beurteilung der hier angedeuteten Zusammenhänge ist aber auf die oben in Paranthese gesetzte Kennzeichnung das Hauptgewicht zu legen. Sie besagt, daß es sich um *analytische Identitäten* handelt, die identisch nicht nur in τ, sondern auch in r, v, und insbesondere in Γ bestehen.

Den Hauptgegenstand der Arbeit bilden nun die Probleme, die durch die Übertragung der bei (2) angedeuteten Beziehungen zwischen elliptischen und hyperbolischen Quersummen auf den Fall der *Differentialklasse* ($r = 2$, $v = 1$) entstehen, in welchem bekanntlich mit absoluter Konvergenz der Quersummen nicht mehr gerechnet werden kann. Hier muß man zur bloßen Definition der Quersummen ein Summationsverfahren heranziehen, das sich bisher bei den parabolischen Quersummen $\{\Gamma, -2, 1\}$, wenn Γ mit der Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(N)$ von N-ter Stufe der Modulgruppe zusammenfällt, umfassend bewährt hat [(J III), § 3, 4, 5; (J IV), § 3, 4]. Durch die Zurückführung der elliptischen auf die parabolischen Quersummen gelang es, die entsprechenden Aussagen auch für die elliptischen Quersummen zu erhalten. Insgesamt erwies sich nach erfolgter Anwendung des Summationsverfahrens auf die parabolischen und elliptischen Quersummen mit $\Gamma = \Gamma(N)$, $r = 2$, $v = 1$ diejenige Theorie als gültig, welche aus der allgemeinen Theorie $\{\Gamma, -r, v\}$ $(r > 2)$ durch formales Spezialisieren auf $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ entsteht. Über die hyperbolischen Quersummen der Differentialklasse wurden dagegen keine Resultate erzielt.

Die einzige wesentliche Schwierigkeit, Zusammenhänge von der unter (2) angegebenen Art in der Differentialklasse zu realisieren, liegt in dem Erfordernis, nunmehr auch — wenigstens für die speziellen Gruppen $\Gamma = \Gamma(N)$ — eine befriedigende *Definition der hyperbolischen Quersummen* $\{\Gamma, -2, 1\}$ aufzustellen. Der naheliegende Versuch, eine solche Definition auf ein direktes, dem Vorgehen im parabolischen Fall [(J III), § 3] analoges Verfahren zu stützen, führt nicht auf einen erfolgversprechenden Ansatz. Statt dessen erweist es sich in der vorliegenden Arbeit als zweckdienlich und als *verhältnismäßig* einfach, zur Konstruktion der hyperbolischen Quersummen der Differentialklasse die früher entwickelte Theorie der elliptischen und parabolischen Quersummen dieser Klasse heranzuziehen und sie mit Hilfe einer der Gleichung (2) analogen Beziehung zum Tragen zu bringen. Man gelangt zu einer solchen Beziehung durch dieselben Umformungen, die für $r > 2$ die Gleichung (2) zur Folge haben; die Beziehung besteht in einer Identität vom Typus (2) zwischen denjenigen Quersummen, die aus den formalen

Quersummen der Differentialklasse dadurch hervorgehen, daß man im einzelnen Glied, analog zum parabolischen Fall, passend gewählte, von einem komplexen Parameter s abhängige konvergenzerzeugende Faktoren anbringt. Von dieser Beziehung ausgehend können wir in grober Näherung die Methode unserer Untersuchung kurz andeutend wie folgt umschreiben: Es werden die hyperbolischen Quersummen durch eine Integration aus den elliptischen Quersummen extrahiert, und es wird dadurch sowohl die Anwendung des Summationsverfahrens als auch der Beweis der Grundformeln auf die bereits gewonnenen Ergebnisse über elliptische Quersummen zurückgeführt.

Allerdings erfordert die exakte Ausgestaltung dieses Ansatzes einen umfangreichen analytischen Apparat. Dieser dient zunächst der Untersuchung einer Funktion von sechs komplexen Variablen

$$\mathsf{P}(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0) = \sum_{L \subset \Gamma} \frac{1}{(\gamma\tau + \delta)^2 |\gamma\tau_0 + \delta|^s (L\tau - z)^2 |L\tau_0 - z_0|^{s'}},$$

die hier an die Stelle der elliptischen Quersummen tritt. Über sie kann nach (J III) und (J IV) als bekannt vorausgesetzt werden, was das wesentliche Ergebnis des dort auf die elliptischen Quersummen der Differentialklasse angewendeten Summationsverfahrens ausmacht. Zusammen mit dem, was in der vorliegenden Abhandlung über die durch jene Gleichung dargestellte Funktion P bewiesen wird, ergibt dies folgenden Sachverhalt: Die Reihe auf der rechten Seite konvergiert absolut für $\sigma = \Re e\, s > 0$, $\sigma' = \Re e\, s' > 0$, $y = \Im m\, \tau > 0$ und stellt in dem genannten Gebiet eine reguläre analytische Funktion von s, s' und τ dar. Als solche ist sie in das Gebiet $\sigma > -\frac{1}{3}$, $\sigma' > -1$, $y > 0$ regulär-analytisch fortsetzbar. Der Nullwert $\mathsf{P}(0, 0, \tau, \tau_0, z, z_0)$ hängt weder von τ_0 noch von z_0 ab. In seiner Abhängigkeit von τ aber hat man ihn nach seinen analytischen Eigenschaften und seinem metrischen Verhalten als eine wohlbestimmte der elliptischen Quersummen der Differentialklasse aufzufassen. Von der Funktion $\mathsf{P}(s, s, \tau, \tau, z, z)$ $(s = s', \tau = \tau_0, z = z_0)$ aus gelangt man nicht unmittelbar, sondern erst auf dem Umwege über eine etwas komplizierte Approximation zu den Reihen

$$\Xi_{-2}(s, \tau, \mathsf{H}, N, \nu) = \sum_{\mathsf{B} \subset \mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)} \frac{(\mathsf{B}\tau)^{\frac{\pi i \nu}{\log \mu'}}}{(\beta_1\tau + \beta_2)(\beta_1'\tau + \beta_2')|\beta_1\tau + \beta_2|^{\frac{s}{2}} |\beta_1'\tau + \beta_2'|^{\frac{s}{2}}} \left(\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_1' & \beta_2' \end{pmatrix}\right),$$

die den eigentlichen Untersuchungsgegenstand bilden. Das Ziel der Untersuchung wird mit dem Nachweis der folgenden Sätze erreicht:

Die Reihen $\Xi_{-2}(s, \tau, \mathsf{H}, N, \nu)$, die für $\Re e\, s > 0$ und $\Im m\, \tau > 0$ offenbar reguläre analytische Funktionen von s darstellen, lassen sich in eine volle Um-

gebung des Punktes $s = 0$ regulär-analytisch fortsetzen. Die Nullwerte $\Xi_{-2}(0, \tau, \mathsf{H}, N, \nu)$ sind als Funktionen von τ *ganze Spitzenformen von der Dimension* -2, *deren metrisches Verhalten dem der hyperbolischen Quersummen in den Fällen absoluter Konvergenz* ($r > 2$) *genau entspricht.*

Von den *Anwendungen*, die den großen Aufwand dieses Verfahrens vielleicht zu rechtfertigen vermögen, erwähne ich zwei. Zuvor seien einige grundlegende Tatsachen zusammengestellt.

Ist η, η' ein Paar hyperbolischer Fixpunkte von $\Gamma = \Gamma(N)$, H eine reelle unimodulare Matrix mit $\mathsf{H}\eta = 0$, $\mathsf{H}\eta' = \infty$, so haben die Matrizen L von Γ mit den Fixpunkten η, η' die Gestalt

$$L = \pm H^k, \quad H = \mathsf{H}^{-1} \begin{pmatrix} \mu' & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \mathsf{H} \qquad (\mu\mu' = 1), \tag{3}$$

wo μ' eine gewisse feste Zahl > 1 bezeichnet und k die ganzen Zahlen durchläuft. Jede solche Matrix L bestimmt daher das Fixpunktepaar η, η' eindeutig, und wir wollen sagen, daß sie auch eine der zugehörigen Matrizen H bestimmt.

Im Falle $r = 2$, $v = 1$ hängen die ganzen Spitzenformen $\{\Gamma, -2, 1\}$ bei allgemeinem Γ von erster Art aufs engste mit den Abelschen Differentialen des Γ zugeordneten algebraischen Gebildes zusammen. Führt man in einem solchen Differential als lokalen Parameter an der Stelle $\tau = \tau_0$ die Variable $\tau - \tau_0$ ein, so entsteht als Funktion von τ_0 eine ganze Spitzenform $\{\Gamma, -2, 1\}$; umgekehrt entsteht jede solche Form auf diese Weise.

Wir betrachten eine kanonische Zerschneidung der Riemannschen Fläche $\mathfrak{F}$ von Γ durch p geordnete Rückkehrschnittpaare. Der Überschreitung eines Rückkehrschnittes entspricht eine hyperbolische Substitution von Γ. Bei der üblichen Anordnung nennen wir einen Schnitt eines Paares primär oder sekundär, je nachdem man ihn bei Umlaufen des Kreuzungspunktes im positiven Sinne an erster oder zweiter Stelle trifft.

Wir formulieren nun als erste der genannten Anwendungen einen neuen, für $\Gamma = \Gamma(N)$ gültigen, von allen früher bewiesenen prinzipiell verschiedenen Vollständigkeitssatz wie folgt:

Den p primären oder den p sekundären Rückkehrschnitten auf der Riemannschen Fläche $\mathfrak{F}$ von Γ mögen die hyperbolischen Matrizen K_m ($1 \leqq m \leqq p$) etwa bei Überschreitung der Schnitte bei einem positiven Umlauf entsprechen. Jede Matrix K_m bestimme eine der den Fixpunkten von K_m zugeordneten Matrizen H_m. Dann bilden die p Funktionen

$$\Xi_{-2}(0, \tau, \mathsf{H}_m, N, 0) \qquad (1 \leqq m \leqq p) \tag{4}$$

eine *Basis der Schar der ganzen Spitzenformen* $\{\Gamma(N), -2, 1\}$.

Der Beweis dieses Satzes stützt sich wesentlich auf zwei Sachverhalte, die wir hier gesondert hervorheben. Sei in den Bezeichnungen unter (3): $H = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \eta_1' & \eta_2' \end{pmatrix}$. Eine ganze Spitzenform $\varphi(\tau) \subset \{\Gamma, -2, 1\}$ gestattet eine Entwicklung von der Gestalt

$$\varphi(\tau) = (\eta_1 \tau + \eta_2)^{-1} (\eta_1' \tau + \eta_2')^{-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(H, \varphi) (H\tau)^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}}$$

Dann weiß man *erstens*: Die Periode $\omega(H, \varphi)$, die das Integral von erster Gattung

$$w(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \varphi(\tau)\, d\tau$$

bei Anwendung von H aufnimmt [kurz H-Periode von $\varphi(\tau)$ genannt] hat den Wert $2 \log \mu' \cdot b_0(H, \varphi)$. *Zweitens* aber gibt die Grundformel (J IV), (27):

$$(\varphi(\tau), \Xi_{-2}(0, \tau, H, N, 0)) = 4\pi \log \mu' \cdot b_0(H, \varphi) = 2\pi \omega(H, \varphi).$$

Auf diesen beiden Tatsachen beruht auch die zweite Anwendung der Reihen $\Xi_{-2}(s, \tau, H, N, 0)$, indem die zwischen den Skalarprodukten und den Perioden hergestellte Beziehung auf einen Ansatz zur *Berechnung der Integralperioden von* $\Gamma(N)$ führt. Setzt man in der letzten Gleichung für $\varphi(\tau)$ eine parabolische Quersumme, etwa $G(\tau, \nu) = G_{-2}(\tau, I, N, \nu)$ ein, so erhält man einerseits 2π mal der H-Periode von $G(\tau, \nu)$, andererseits nach Vertauschung der Faktoren im Skalarprodukt den Wert $\frac{N^2}{2\pi} \overline{b_\nu(I, \Xi(\tau, H))}$, insgesamt also

$$\omega(H, G(\tau, \nu)) = \left(\frac{N}{2\pi}\right)^2 \overline{b_\nu(I, \Xi(\tau, H))}. \tag{5}$$

Dabei steht $\Xi(\tau, H)$ für $\Xi_{-2}(0, \tau, H, N, 0)$, und $b_\nu(I, \varphi)$ bezeichnet den ν-ten Fourierkoeffizienten von $\varphi(\tau)$ (in der Entwicklung nach Potenzen von $e^{2\pi i \frac{\tau}{N}}$).

Man hat also zur Bestimmung der H-Periode von $G(\tau, \nu)$ nur den ν-ten Fourierkoeffizienten von $\Xi(\tau, H)$ zu berechnen. Insbesondere erhält man nach (J. III), Satz 18 die H-Perioden einer Basis der Schar der ganzen Spitzenformen, indem man in (5) für ν geeignete p natürliche Zahlen einsetzt; hier bezeichnet $p = p(N)$ das Geschlecht von $\Gamma(N)$, und es ist in dem zitierten Satz $\Gamma = \Gamma(N), r = 2, v = 1$ und $\mu = p = p(N)$ einzutragen. Ein zugleich funktionentheoretisch wie arithmetisch ausgezeichnetes System solcher Zahlen ν wird durch $\nu = m_i + 1$ $(1 \leqq i \leqq p)$ gegeben; dabei bilden die m_i

die Weierstrassischen Lückenzahlen des Punktes $\tau = \infty$ auf dem algebraischen Gebilde von $\Gamma(N)$. — Wenn es schließlich noch auf irgendeine Weise gelingt. zu einer passenden kanonischen Zerschneidung der Riemannschen Fläche $\mathfrak{F}$ von $\Gamma(N)$ ein System von Matrizen H_m $(1 \leqq m \leqq p)$ im Sinne von (4) sowohl für die primären als auch für die sekundären Rückkehrschnitte explizit zu bestimmen, so ergibt sich nach dem angedeuteten Verfahren ein vollständiges Periodengitter der $\Gamma(N)$ in expliziter Darstellung.

Zweifellos wird es zur Ausgestaltung und Durchführung dieses Ansatzes noch erheblicher Vorarbeiten bedürfen; immerhin aber scheint hier eine Möglichkeit vorzuliegen, um neuartige strukturelle Zusammenhänge zu erschließen.

Die vorliegende Untersuchung zerfällt in fünf Paragraphen. § 1 enthält die Darstellung der unter (2) angedeuteten Zusammenhänge. Die §§ 2, 3, 4 dienen der Herleitung der Hauptergebnisse über die Quersummen Ξ_{-2}. Im Schlußparagraphen der Arbeit werden neben dem zitierten neuen Vollständigkeitssatz über die Funktionen $\Xi_{-2}(0, \tau, \mathsf{H}, N, 0)$ noch einige neue Sätze über die in (J III). § 1 erklärten *Hauptsysteme* bewiesen. Mit Hilfe einer Aussage über das Verhalten ganzer Spitzenformen $\{\Gamma, -r, v\}$ $(r > 0, |v| = 1)$ bei Annäherung an die reelle Achse wird gezeigt, daß es stets, auch unter verschärfenden Nebenbedingungen, unendlich viele Hauptsysteme gibt.

Mit der gegenwärtigen Abhandlung wird die allgemeine Theorie der strukturellen Beziehungen zwischen Poincaréschen Reihen und Scharen automorpher Formen zu einem gewissen Abschluß gebracht, insofern als nunmehr Resultate gleicher Art und Entwicklungen gleicher Tragweite für die Poincaréschen Reihen aller drei Typen in den Formenklassen $\{\Gamma, -r, v\}$ mit $r > 2$, $|v| = 1$ und — nach Anwendung der dargestellten Summationsverfahren — auch mit $r = 2$, $v = 1$ vorliegen.

Bezeichnungen und Grundlagen.

Im folgenden treten nur quadratische zweireihige Matrizen auf. Eine solche Matrix heißt reell, wenn ihre Elemente reell sind, unimodular, wenn ihre Determinante gleich 1 ist. Eine reelle unimodulare Matrix nennen wir *normiert*.

Eine Grenzkreisgruppe wird zunächst so erklärt, daß die reelle Achse als Grenzkreis, die obere Halbebene als sein Inneres fungiert. Ferner gehen wir nicht von den Substitutionen der Gruppe, sondern von deren Koeffizientenschemata aus. Es wird demnach eine Gruppe Γ von normierten Matrizen zugrunde gelegt. Die Einheitsmatrix nennen wir I; da man bei Gruppen eines gewissen Typus das Auftreten der Matrix $-I$ nicht verhindern kann,

nehmen wir stets an, daß $-I$ in Γ liegt, was die Allgemeinheit der Substitutionsgruppen nicht beeinträchtigt. Γ sei diskret, d. h. Γ enthalte keine Folge von paarweise verschiedenen Matrizen, die elementweise gegen I konvergiert.

Jeder normierten Matrix $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ordnen wir die lineare Transformation

$$\tau' = S(\tau) = S\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

in der komplexen Variablen τ zu. Die Bezeichnung $S\tau$ stellt die einzige Inkonsequenz gegenüber der sonst verbindlichen Matrizenschreibweise dar. Vermöge dieser Zuordnung entspricht die Substitution $\tau' = S\tau$ eineindeutig dem normierten Matrizenpaar $\pm S$; die Zuordnung bleibt erhalten, wenn man einerseits zwei Matrizen multipliziert, andererseits die zugehörigen Substitutionen in funktionaler Schreibweise hintereinander anwendet. Zwei Punkte τ, τ' der oberen Halbebene heißen einander nach Γ äquivalent, in Zeichen $\tau' \sim \tau\,(\Gamma)$, wenn ein L in Γ existiert, so daß $\tau' = L\tau$. Die obere Halbebene der komplexen Variablen τ bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}$.

Nach bekannten Sätzen von Poincaré ist eine diskrete Gruppe in der oberen Halbebene eigentlich diskontinuierlich, d. h. die zu einem festen Punkte äquivalenten Punkte häufen sich in $\mathfrak{H}$ nicht, und jeder Punkt von $\mathfrak{H}$ hat von den zu ihm äquivalenten Punkten, soweit sie von ihm verschieden sind, einen positiven Minimalabstand. Die bekannte Konstruktion eines Normalpolygons $\mathfrak{N}$ von Γ liefert in $\mathfrak{N}$ einen Fundamentalbereich von Γ. Γ heißt eine Grenzkreisgruppe, wenn das Parkett der zu $\mathfrak{N}$ äquivalenten Bereiche $L\mathfrak{N}$ $(L \subset \Gamma)$ sich gegen die ganze reelle Achse verdichtet. Die durch Einbeziehung der elliptischen und parabolischen Fixpunkte und durch Ränderzuordnung aus dem Normalpolygon $\mathfrak{N}$ entstehende Riemannsche Fläche $\mathfrak{F}$ kann offen oder geschlossen sein. Sie ist dann und nur dann geschlossen, wenn Γ ein endliches Erzeugendensystem besitzt, oder wenn $\mathfrak{N}$ einen endlichen hyperbolischen Flächeninhalt hat, oder wenn Γ ein algebraisches Gebilde mit endlich vielen durch die Fixpunkte vorgeschriebenen Relativverzweigungen uniformisiert; diese drei Bedingungen sind sämtlich miteinander gleichbedeutend. Werden sie von der Gruppe Γ erfüllt, so heißt Γ eine Grenzkreisgruppe von erster Art, im anderen Falle eine solche von zweiter Art. Es sei Γ von erster Art. Der kanonischen Zerschneidung von $\mathfrak{F}$ und dem Aufbau der universellen, in vorgeschriebener Art verzweigten Überlagerungsfläche aus Blättern der zerschnittenen Fläche entspricht genau die Aufteilung der oberen Halbebene in kanonische Fundamentalbereiche. Insbesondere enthält ein kanonischer Fundamentalbereich $\mathfrak{K}$ von Γ von jedem System untereinander äquivalenter elliptischer oder parabolischer Fixpunkte genau einen Vertreter und zu diesem in dessen Nähe eine volle Umgebung von nach Γ in-

äquivalenten Punkten. Demnach treten neben das Geschlecht p_0 von Γ als formale Daten der Gruppe die Anzahlen σ_0 der parabolischen, e_0 der elliptischen Fixpunkte, sowie die Ordnungen dieser e_0 elliptischen Fixpunkte, d. h. jeweils die Ordnung l_k $(1 \leqq k \leqq e_0)$ der zyklischen Substitutionsgruppe in Γ mit dem betreffenden Fixpunkt.

Wir schreiben für beliebiges reelles ξ und für reelles $\lambda \neq 0$

$$U^{\xi} = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

und bezeichnen für beliebiges $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\underline{S} = \{c, d\}$ die zweite Zeile von S. Ein parabolischer Fixpunkt $\tau = \zeta$ von Γ liegt entweder auf der reellen Achse oder im Unendlichen. Bestimmt man eine normierte Matrix A mit $A\,\zeta = \infty$, so erhält man alle Matrizen L aus Γ mit dem Fixpunkt ζ in der Gestalt

$$L = \pm A^{-1} U^{kN} A = \pm P^k, \quad P = A^{-1} U^N A,$$

wo k die ganzen Zahlen durchläuft und N eine gewisse feste positive Zahl angibt. Die von diesen Matrizen $L = \pm P^k$ gebildete Gruppe nennen wir $\mathfrak{Z}_{\zeta}$; P heißt die normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_{\zeta}$. N hängt nicht nur von ζ, sondern auch von A ab. Zwei Matrizen M und M^* aus der Nebengruppe $A\,\Gamma$ haben dann und nur dann die gleiche zweite Zeile, wenn $M^* = U^{kN} M$ mit ganzem k. Ein volles System von Matrizen M aus $A\,\Gamma$ mit verschiedenen zweiten Zeilen bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$.

Jede Komponente eines Paares hyperbolischer Fixpunkte η, η' von Γ liegt gleichfalls auf der reellen Achse oder im Unendlichen. Es ist aber niemals ein Punkt zugleich parabolischer und hyperbolischer Fixpunkt einer diskreten Gruppe von normierten Matrizen. Bestimmt man eine normierte Matrix H mit $\mathsf{H}\,\eta = 0$, $\mathsf{H}\,\eta' = \infty$, so erhält man alle Matrizen L aus Γ mit dem Fixpunktepaar η, η' in der Gestalt

$$L = \pm \mathsf{H}^{-1} D_{\mu'}^k \mathsf{H} = \pm H^k, \quad H = \mathsf{H}^{-1} D_{\mu'} \mathsf{H},$$

wo k die ganzen Zahlen durchläuft und μ' eine gewisse feste Zahl > 1 angibt. Die von diesen Matrizen $L = \pm H^k$ gebildete Gruppe nennen wir $\mathfrak{Z}_{\eta, \eta'}$; H heißt die normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_{\eta, \eta'}$. Zwei Matrizen B und B^* aus der Nebengruppe $\mathsf{H}\,\Gamma$ unterscheiden sich dann und nur dann um einen linken Faktor D_{λ} mit positivem λ, wenn $\mathsf{B}^* = D_{\mu'}^k \mathsf{B}$ mit ganzem k. Ein volles System von Matrizen B aus $\mathsf{H}\,\Gamma$, die sich nicht zu je zweien um einen linken Faktor $D_{\lambda} (\lambda > 0)$ unterscheiden, bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)$.

Für festes μ mit $\Im\mathfrak{m}\,\mu \leqq 0$ und τ in $\mathfrak{H}$ sei

$$0 < \arg(\tau - \mu) < \pi.$$

Für feste m_1, m_2, die nicht beide verschwinden, und τ in $\mathfrak{H}$ setzen wir

$$\arg(m_1\tau + m_2) = \arg\left(\tau + \frac{m_2}{m_1}\right) + \frac{\pi}{2}(\operatorname{sgn} m_1 - 1) \qquad (m_1 \neq 0),$$

$$\arg m_2 = -\frac{\pi}{2}(\operatorname{sgn} m_2 - 1).$$

Sei S eine normierte Matrix, $\underline{S} = \{c, d\}$. Wir ergänzen die Zeile $\{m_1, m_2\}$ zu einer weiteren normierten Matrix M mit $\underline{M} = \{m_1, m_2\}$ und schreiben $M' = MS$, $\underline{M'} = \{m_1', m_2'\}$. Dann gilt für τ in $\mathfrak{H}$

$$\arg(m_1 S\tau + m_2) = \arg(m_1'\tau + m_2') - \arg(c\tau + d) + 2\pi w(M, S)$$

mit ganzem $w(M, S) = 0$ oder ± 1. Für komplexes r und für τ in $\mathfrak{H}$ erklären wir ferner

$$(m_1\tau + m_2)^r = e^{r\log(m_1\tau + m_2)},$$

$$\log(m_1\tau + m_2) = \log|m_1\tau + m_2| + i\arg(m_1\tau + m_2).$$

Wird hier

$$\sigma(M, S) = \sigma^r(M, S) = e^{2\pi i r w(M,S)}$$

gesetzt, so gilt

$$(m_1 S\tau + m_2)^r = \sigma^r(M, S)(m_1'\tau + m_2')^r(c\tau + d)^{-r}.$$

Von den Rechenregeln für die Symbole $w(M, S)$ und $\sigma(M, S)$ nennen wir die beiden Assoziativgesetze: Es seien M_1, M_2, M_3 drei normierte Matrizen. Dann bestehen die Formeln

$$w(M_1, M_2) + w(M_1M_2, M_3) = w(M_1, M_2M_3) + w(M_2, M_3),$$

$$\sigma^r(M_1, M_2)\sigma^r(M_1M_2, M_3) = \sigma^r(M_1, M_2M_3)\sigma^r(M_2, M_3).$$

Zur genaueren Orientierung über die genannten Symbole verweisen wir auf (G I), § 1. Dort finden sich auch die Definitionen und die Darstellung der Grundeigenschaften der zur Gruppe Γ und zur Dimension $-r$ gehörigen Multiplikatorsysteme sowie der automorphen Formen $\{\Gamma, -r, v\}$.

Die Begriffe der hyperbolischen Geometrie kennzeichnen wir durch Vorsetzen des Buchstabens H, die der euklidischen Geometrie durch Vorsetzen des Buchstabens E vor den Begriffsnamen (z. B. H-Kreis, H-Radius, E-Mittelpunkt, H-Abstand, H-Inhalt, E-Gerade, H-Gerade usw.).

Es sei N eine natürliche Zahl. Die Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(N)$ der Stufe N besteht aus den ganzzahligen Matrizen L mit

$$||L|| = 1, \quad L \equiv \pm I \pmod{N}.$$

$\Gamma(N)$ ist eine Grenzkreisgruppe von erster Art, Untergruppe von endlichem Index der Modulgruppe $\Gamma(1)$ und enthält für $N > 1$ keine elliptischen Matrizen. Ein parabolischer Fixpunkt ζ von $\Gamma(N)$ ist eine rationale Zahl oder liegt im Unendlichen. Bestimmt man eine Matrix A aus $\Gamma(1)$ mit $A\zeta = \infty$, so ist $P = A^{-1} U^N A$ normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_\zeta$. Bei Grenzkreisgruppen werden die parabolischen Fixpunkte auch (parabolische) Spitzen genannt.

Hinweise auf bereits zitierte, mit Abkürzungen eingeführte frühere Darstellungen werden in eckigen Klammern gegeben. Ausführliche Erläuterungen zu den Gegenständen der vorliegenden Untersuchungen findet man in (GV).

Mit $C_1, C_2, C_3, \ldots$ werden Konstante bezeichnet; dabei werden gelegentlich die Größen, von denen eines dieser C_i abhängen darf, diesem als Argumente in Klammern beigefügt.

§ 1.

Entwicklung einer elliptischen Quersumme in eine unendliche Reihe nach hyperbolischen Quersummen.

Es sei Γ eine beliebige Grenzkreisgruppe von erster Art, $r > 2$, v ein Multiplikatorsystem zu Γ und $-r$, $|v| \equiv 1$, $\tau = x + iy$ (x reell, $y > 0$) $z = a + ib$ (a reell, $b > 0$); ferner η, η' ein Paar hyperbolischer Fixpunkte von Γ, $\mathsf{H} = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \eta_1' & \eta_2' \end{pmatrix}$ eine normierte Matrix mit $\mathsf{H}\eta = 0$, $\mathsf{H}\eta' = \infty$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, also $\mathsf{H}' = -T\mathsf{H} = \begin{pmatrix} -\eta_1 & -\eta_2' \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}$, und schließlich

$$H = \mathsf{H}^{-1} D_{\mu'} \mathsf{H} = \mathsf{H}'^{-1} D_\mu \mathsf{H}' \quad \text{mit} \quad D_{\mu'} = \begin{pmatrix} \mu' & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (\mu\mu' = 1,\ \mu' > 1)$$

normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_{\eta,\eta'}$.

Bezeichnet $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine normierte Matrix, so erklären wir, wenn $z \subset \mathfrak{H}$,

$$\arg(c\bar{z} + d) = \arg\left(\bar{z} + \frac{d}{c}\right) - \frac{\pi}{2}(\operatorname{sgn} c - 1) \qquad (c \neq 0),$$

$$\arg d = \frac{\pi}{2}(\operatorname{sgn} d - 1) \qquad (c = 0), \tag{6}$$

$$-\pi < \arg\left(\bar{z} + \frac{d}{c}\right) < 0 \qquad (c \neq 0),$$

[vgl. (G I), (9)]; $\arg d$ hängt also davon ab, in welcher Halbebene operiert wird, und es gilt allgemein

$$\arg(cz + d) + \arg(c\bar{z} + d) = 0.$$

Bei komplexem r wird nun

$$(S\tau - S\bar{z})^r = \varepsilon_r(S)\frac{(\tau-\bar{z})^r}{(c\tau+d)^r(c\bar{z}+d)^r}, \quad \varepsilon_r(S) = e^{2\pi i r u(S)},$$

$$\arg(S\tau - S\bar{z}) = \arg(\tau-\bar{z}) - \arg(c\tau+d) - \arg(c\bar{z}+d) + 2\pi u(S).$$

Für $c = 0$ ergibt sich

$$S\tau - S\bar{z} = \frac{a}{d}(\tau-\bar{z}) = a^2(\tau-\bar{z}), \quad u(S) = 0.$$

Für $c \neq 0$ berücksichtigen wir $0 < \arg(S\tau - S\bar{z}) < \pi, 0 < \arg(\tau-\bar{z}) < \pi$, setzen $\tau = z$ und erhalten $u(S) = 0$, so daß

$$(7) \qquad (S\tau - S\bar{z})^r = \frac{(\tau-\bar{z})^r}{(c\tau+d)^r(c\bar{z}+d)^r}.$$

Wir untersuchen die absolut konvergente elliptische Quersumme

$$\mathsf{P}(\tau, z) \equiv \Phi_{-r}(\tau, v, z, \Gamma) = \sum_{L \subset \Gamma} \frac{1}{v(L)(\gamma\tau+\delta)^r(L\tau-\bar{z})^r},$$

in der $r > 2$, $\underline{L} = \{\gamma, \delta\}$ [(J IV), (8)]. Es durchlaufe $\mathsf{B} = \mathsf{H}L = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_1' & \beta_2' \end{pmatrix}$ die Nebengruppe $\mathsf{H}\Gamma$, und es sei

$$\mathsf{B}' = -T\mathsf{B} = \mathsf{H}'L = \begin{pmatrix} -\beta_1' & -\beta_2' \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad u = \mathsf{H}z.$$

Dann finden wir vermöge (7)

$$\frac{1}{(L\tau-\bar{z})^r} = \frac{1}{(\mathsf{H}^{-1}\mathsf{B}\tau - \mathsf{H}^{-1}\bar{u})^r} = \frac{(-\eta_1'\mathsf{B}\tau+\eta_1)^r(-\eta_1'\bar{u}+\eta_1)^r}{(\mathsf{B}\tau-\bar{u})^r},$$

$$(-\eta_1'\mathsf{B}\tau+\eta_1)^r = \sigma(\mathsf{H}^{-1}, \mathsf{B})\frac{(\gamma\tau+\delta)^r}{(\beta_1'\tau+\beta_2')^r}, \quad \sigma(\mathsf{H}^{-1}, \mathsf{B}) = \frac{\sigma(\mathsf{H}^{-1}, \mathsf{H})}{\sigma(\mathsf{H}, L)},$$

$$\frac{1}{v(L)(\gamma\tau+\delta)^r(L\tau-\bar{z})^r}$$

$$= \sigma(\mathsf{H}^{-1}, \mathsf{H})(-\eta_1'\bar{u}+\eta_1)^r \frac{1}{\sigma(\mathsf{H}, L)v(L)(\beta_1'\tau+\beta_2')^r(\mathsf{B}\tau-\bar{u})^r}$$

$$= \frac{\sigma(\mathsf{H}^{-1}, \mathsf{H})}{\sigma^*(-T, \mathsf{H})}v(\mathsf{H})(-\eta_1'\bar{u}+\eta_1)^r \frac{(\mathsf{B}\tau)^{\frac{r}{2}}}{v(\mathsf{B})(\beta_1\tau+\beta_2)^{\frac{r}{2}}(\beta_1'\tau+\beta_2')^{\frac{r}{2}}(\mathsf{B}\tau-\bar{u})^r}.$$

Hier steht σ für σ^r, σ^* für $\sigma^{\frac{r}{2}}$. Die letzte Gleichung beruht auf

$$(\mathsf{B}\tau)^{\frac{r}{2}} = \sigma^*(-T, \mathsf{B})\frac{(\beta_1\tau+\beta_2)^{\frac{r}{2}}}{(\beta_1'\tau+\beta_2')^{\frac{r}{2}}}$$

sowie bei willkürlichem $v(\mathsf{H})$ des Betrages 1 auf der Erklärung von $v(\mathsf{B})$ in (G V), § 1, 3.

Wir bestimmen einen willkürlichen Punkt $\tau = \tau^0$ in $\mathfrak{H}$, für den die Ungleichung $\mu'^{-1} < |\tau^0| < \mu'^{+1}$ zutrifft, und sodann ein System $\mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)$ durch

$$\mathsf{B} \subset \mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma): \qquad \mu'^{-1} \leqq |\mathsf{B}\tau^0| < \mu'^{+1}. \tag{8}$$

Wir erhalten mit $e^{2\pi i \varkappa} = v(H)$ $(0 \leqq \varkappa < 1)$ nach (G V), (11)

$$\mathsf{P}(\tau, z) = \frac{\sigma(\mathsf{H}^{-1}, \mathsf{H})}{\sigma^*(-T, \mathsf{H})} v(\mathsf{H}) (-\eta_1' \bar{u} + \eta_1)^r \sum_{\mathsf{B} \subset \mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)} \frac{(\mathsf{B}\tau)^{\frac{r}{2}} f(\mathsf{B}\tau, u)}{v(\mathsf{B}) (\beta_1 \tau + \beta_2)^{\frac{r}{2}} (\beta_1' \tau + \beta_2')^{\frac{r}{2}}}, \tag{9}$$

$$f(\tau, u) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i \varkappa h}}{(\mu'^h \tau - \mu'^{-h} \bar{u})^r}.$$

Wir setzen

$$\tau = R e^{i\vartheta} \ (R > 0, \ 0 < \vartheta < \pi), \quad u = \varrho e^{i\omega} \ (\varrho > 0, \ 0 < \omega < \pi),$$

$$\sqrt{\tau \bar{u}} = \sqrt{R\varrho}\, e^{i \frac{\vartheta - \omega}{2}}, \quad \zeta = \sqrt{\frac{\tau}{\bar{u}}} = \lambda e^{i\chi}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{R}{\varrho}}, \quad \chi = \frac{\vartheta + \omega}{2},$$

und beschränken τ und u auf eine H-Kreisscheibe. Dann liegt auch ζ auf einer H-Kreisscheibe $\mathfrak{k}$, und man findet zunächst

$$\mu'^h \tau - \mu'^{-h} \bar{u} = \sqrt{\tau \bar{u}} \, (\mu'^h \zeta - \mu'^{-h} \zeta^{-1}),$$
$$(\mu'^h \tau - \mu'^{-h} \bar{u})^r = \sqrt{\tau \bar{u}}^{\,r} \, (\mu'^h \zeta - \mu'^{-h} \zeta^{-1})^r.$$

wo $\arg \sqrt{\tau \bar{u}} = \frac{\vartheta - \omega}{2}$ und die Argumente der beiden letzten Klammern zwischen 0 und π liegen. Da außerdem $\sqrt{\tau \bar{u}}^{\,r} = \tau^{\frac{r}{2}} \bar{u}^{\frac{r}{2}}$, so wird

$$\tau^{\frac{r}{2}} f(\tau, u) = \bar{u}^{-\frac{r}{2}} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i \varkappa h}}{(\mu'^h \zeta - \mu'^{-h} \zeta^{-1})^r}. \tag{10}$$

Mit der komplexen Variablen $w = w_1 + i w_2$ (w_1, w_2 reell) bilden wir die neue Funktion

$$\varphi(\zeta, w) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i \varkappa (h+w)}}{(\mu'^{h+w} \zeta - \mu'^{-h-w} \zeta^{-1})^r}, \tag{11}$$

wo $\mu'^w = e^{w \log \mu'}$, $\log \mu' > 0$. Da

$$\mathfrak{Im}(\mu'^{h+w} \zeta - \mu'^{-h-w} \zeta^{-1}) = (\mu'^{h+w_1} \lambda + \mu'^{-h-w_1} \lambda^{-1}) \sin(\chi + w_2 \log \mu'),$$

so konvergiert die Reihe (11) für ζ auf $\mathfrak{k}$, für beschränktes $|w_1|$ und für $|w_2| \leqq \varepsilon_0$ bei hinreichend kleinem $\varepsilon_0 > 0$ gleichmäßig absolut, und es ergibt sich nach bekanntem Vorgehen

$$(12) \qquad \bar{u}^{\frac{r}{2}} \tau^{\frac{r}{2}} f(\tau, u) = \varphi(\zeta, 0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m(\zeta),$$

$$(13) \quad A_m(\zeta) = \int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \frac{e^{-2\pi i(m+\varkappa)w}}{(\mu'^w \zeta - \mu'^{-w}\zeta^{-1})^r}\, dw = e^{2\pi i(m+\varkappa)\frac{\log\zeta}{\log\mu'}} B_r(\mu', m+\varkappa),$$

$$B_r(\mu', m+\varkappa) = \int_{i\beta-\infty}^{i\beta+\infty} \frac{e^{-2\pi i(m+\varkappa)v}}{(\mu'^v - \mu'^{-v})^r}\, dv.$$

Hier wird mit $0 < \gamma + \alpha \log \mu' < \pi$, $0 < \beta \log \mu' < \pi$ geradlinig integriert. Bei festen r, μ' und wachsendem $|m|$ bestehen die Abschätzungen

$$(14) \qquad \begin{aligned} B_r(\mu', m+\varkappa) &= O(e^{2\pi(m+\varkappa)\varepsilon}) && (\varepsilon > 0,\ m+\varkappa > 0), \\ B_r(\mu', m+\varkappa) &= O\left(e^{2\pi(m+\varkappa)\left(\frac{\pi}{\log\mu'} - \varepsilon\right)}\right) && (\varepsilon > 0,\ m+\varkappa < 0); \end{aligned}$$

sie zeigen, daß die Reihe auf der rechten Seite von (12) für ζ auf $\mathfrak{k}$ gleichmäßig absolut konvergiert.

Zur Berechnung von $B_r(\mu', \varrho)$ setze man $\beta = \frac{\pi}{2\log\mu'}$, $v = \frac{t}{\log\mu'} + i\beta$. Dadurch erscheint im Nenner des Integranden der Ausdruck $(e^t + e^{-t})^r$; eine naheliegende Substitution führt auf ein Eulersches B-Integral und zu dem Wert

$$(15) \quad B_r(\mu', \varrho) = \frac{1}{2\log\mu'} e^{-\pi i\left(\frac{r}{2} + \frac{\pi i \varrho}{\log\mu'}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{r}{2} + \frac{\pi i \varrho}{\log\mu'}\right)\Gamma\left(\frac{r}{2} - \frac{\pi i \varrho}{\log\mu'}\right)}{\Gamma(r)}.$$

Insgesamt also gewinnt man aus (9), (12), (13) und mit Rücksicht auf

$$\log\zeta = \tfrac{1}{2}\log\tau - \tfrac{1}{2}\log\bar{u}$$

die Darstellung

$$\mathsf{P}(\tau, z) = \frac{\sigma(\mathsf{H}^{-1}, \mathsf{H})}{\sigma^*(-T, \mathsf{H})}\, v(\mathsf{H})\, (-\eta_1'\bar{u} + \eta_1)^r \bar{u}^{-\frac{r}{2}} \times$$

$$\times \sum_{\mathsf{B} \subset \mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)} \frac{1}{v(\mathsf{B})(\beta_1\tau + \beta_2)^{\frac{r}{2}}(\beta_1'\tau + \beta_2')^{\frac{r}{2}}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_r(\mu', m+\varkappa)\, \bar{u}^{-\pi i\frac{m+\varkappa}{\log\mu'}} (\mathsf{B}\tau)^{\pi i\frac{m+\varkappa}{\log\mu'}}$$

Die Vertauschbarkeit der Summen auf der rechten Seite folgt unmittelbar aus der für alle B in $\mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)$ und alle u auf einer festen H-Kreisscheibe

gleichmäßigen absoluten Konvergenz der inneren Summe, sowie aus der weiter unten zitierten Konvergenz der Reihe (17a). Die gleichmäßige absolute Konvergenz der inneren Summe beruht auf (14) und auf dem Umstand, daß für alle ϑ mit $0 < \vartheta < \pi$:

$$(16)\quad \arg\zeta = \chi = \frac{\vartheta+\omega}{2},\quad \frac{\varepsilon_0}{2} \leqq \chi \leqq \pi - \frac{\varepsilon_0}{2},\quad \text{falls nur } \varepsilon_0 \leqq \omega \leqq \pi - \varepsilon_0.$$

Setzt man ferner in dem Faktor vor dem Summenzeichen $u = \mathsf{H}z$, so erhält dieser die Gestalt $v(\mathsf{H})(\eta_1\bar{z}+\eta_2)^{-\frac{r}{2}}(\eta_1'\bar{z}+\eta_2')^{-\frac{r}{2}}$. Mit der Bedeutung von $\Xi_{-r}(\tau, v, \mathsf{H}, \Gamma, m)$ aus (J IV), (10) besteht also die Beziehung

$$(17)\quad \mathsf{P}(\tau,z) = v(\mathsf{H})(\eta_1\bar{z}+\eta_2)^{-\frac{r}{2}}(\eta_1'\bar{z}+\eta_2')^{-\frac{r}{2}} \times$$
$$\times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_r(\mu', m+\varkappa)(\mathsf{H}\bar{z})^{-\pi i\frac{m+\varkappa}{\log\mu'}}\Xi_{-r}(\tau, v, \mathsf{H}, \Gamma, m).$$

Die gleichmäßige absolute Konvergenz der Reihe auf der rechten Seite von (17) läßt sich nach (16) leicht aus der trivialen Abschätzung von $\left|(\mathsf{B}\tau)^{\pi i\frac{m+\varkappa}{\log\mu'}}\right|$ nach oben und der für die τ auf einer H-Kreisscheibe gleichmäßigen Konvergenz der Reihe

$$(17a)\qquad \sum_{\mathsf{B}\subset\mathfrak{E}(\mathsf{H},\Gamma)} |\beta_1\tau+\beta_2|^{-\frac{r}{2}}|\beta_1'\tau+\beta_2'|^{-\frac{r}{2}}$$

erschließen.

Dieses Konvergenzverhalten ermöglicht nun die eingangs angedeutete Integraldarstellung der hyperbolischen Quersummen $\Xi_{-r}(\tau, v, \mathsf{H}, \Gamma, \nu)$ durch die elliptische Quersumme $\mathsf{P}(\tau, z)$. Man entnimmt (17) für $\lambda \geqq \lambda_0 > 0$ und ganzes ν, daß

$$(18)\quad v(\mathsf{H})^{-1}\int_{\lambda=\lambda_0}^{\mu'^2\lambda_0} \mathsf{P}(\tau, \mathsf{H}^{-1}(\lambda u)) \times$$
$$\times (\eta_1\mathsf{H}^{-1}(\lambda\bar{u})+\eta_2)^{\frac{r}{2}}(\eta_1'\mathsf{H}^{-1}(\lambda\bar{u})+\eta_2')^{\frac{r}{2}}(\lambda\bar{u})^{\pi i\frac{\nu+\varkappa}{\log\mu'}}\frac{d\lambda}{\lambda}$$
$$= 2\log\mu' B_r(\mu', \nu+\varkappa)\Xi_{-r}(\tau, v, \mathsf{H}, \Gamma, \nu).$$

Zum Schluß dieses Abschnittes zeigen wir noch, daß sich die Berechnung des Skalarproduktes $(\varphi(\tau), \mathsf{P}(\tau, z))$ für eine ganze Spitzenform $\varphi(\tau)$ aus der Formenklasse $\{\Gamma, -r, v\}$ auf die Werte der Skalarprodukte

$$(\varphi(\tau), \Xi_{-r}(\tau, v, \mathsf{H}, \Gamma, \nu))$$

zurückführen läßt. Sei also

$$\varphi(\tau) = (\eta_1\tau+\eta_2)^{-\frac{r}{2}}(\eta_1'\tau+\eta_2')^{-\frac{r}{2}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(\mathsf{H}\tau)^{\pi i\frac{n+\varkappa}{\log\mu'}}$$

die Entwicklung von $\varphi(\tau)$ nach der Ortsvariablen $\mathsf{H}\tau$ des Fixpunktepaares η, η'. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe in (17) und nach der Grundformel

$$(19)\qquad (\varphi(\tau), \Xi_{-r}(\tau, v, \mathsf{H}, \Gamma, \nu)) = v(\mathsf{H})\,\varepsilon_r(\nu,\mu')\,b_\nu$$

ergibt sich

$$(\varphi(\tau), \mathsf{P}(\tau,z)) = v(\mathsf{H})^{-1}(\eta_1 z+\eta_2)^{-\frac{r}{2}}(\eta_1' z+\eta_2')^{-\frac{r}{2}}\times$$
$$\times\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\overline{B_r(\mu', m+\varkappa)}(\mathsf{H}z)^{\pi i\frac{m+\varkappa}{\log\mu'}} v(\mathsf{H})\,\varepsilon_r(m,\mu')\,b_m.$$

Hier werden wir beweisen, daß $\overline{B_r(\mu', m+\varkappa)}\,\varepsilon_r(m,\mu')$ mit dem Werte $\xi_r = \frac{2\pi}{r-1}2^{2-r}e^{\pi i\frac{r}{2}}$ aus (J IV), (52) übereinstimmt. Damit haben wir dann in der Tat gefunden, daß

$$(20)\qquad (\varphi(\tau), \mathsf{P}(\tau,z)) = \xi_r\varphi(z);$$

im übrigen ist dies die Formel (J IV), (52), wenn noch berücksichtigt wird, daß nach (J IV), (28):

$$\mathsf{P}(\tau,z) = \Phi_{-r}(\tau, -\bar{z}, 0).$$

Die zu beweisende Gleichung

$$(21)\qquad \overline{B_r(\mu', m+\varkappa)}\,\varepsilon_r(m,\mu') = \frac{2\pi}{r-1}2^{2-r}e^{\pi i\frac{r}{2}} = \xi_r$$

bedeutet nach (J IV), (26a) und (J V), (15), daß für reelles $t = 2\pi\frac{m+\varkappa}{\log\mu'} = \frac{2\pi\varrho}{\log\mu'}$ und $r > 2$:

$$\int_0^\pi e^{-tv}\sin^{r-2}v\,dv = \pi 2^{2-r}e^{-\frac{\pi}{2}t}\frac{\Gamma(r-1)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+i\frac{t}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r}{2}-i\frac{t}{2}\right)}.$$

Man ersetze hier v durch $\frac{\pi}{2}+x$ und $r-2$ durch u $(u>0)$. Dann handelt es sich um die Formel

$$(22)\qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-tx}\cos^u x\,dx = \pi 2^{-u}\frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma\left(\frac{u+2+it}{2}\right)\Gamma\left(\frac{u+2-it}{2}\right)}.$$

Die linke Seite fassen wir bei festem t als eine Funktion $g(u)$ von u auf. Nach der LAPLACEschen Transformationstheorie gilt [2])

$$\lim_{u \to +\infty} \sqrt{u}\, g(u) = \sqrt{2\pi}. \tag{23}$$

Ferner besteht die Identität

$$\frac{d}{dx}\{-te^{-tx}\cos^{u+2}x + (u+2)e^{-tx}\cos^{u+1}x \sin x\}$$
$$= (t^2 + (u+2)^2)e^{-tx}\cos^{u+2}x - (u+1)(u+2)e^{-tx}\cos^u x;$$

aus ihr folgt

$$g(u) = \frac{(u+2+it)(u+2-it)}{(u+1)(u+2)}\, g(u+2).$$

Setzt man nun

$$\varphi(u) = \frac{\Gamma\left(\frac{u+2+it}{2}\right)\Gamma\left(\frac{u+2-it}{2}\right)}{\Gamma(u+1)}\, 2^u g(u),$$

so erhält man einerseits $\varphi(u) = \varphi(u+2)$, andererseits liefert die STIRLINGsche Formel, zusammen mit (23), für $u \to +\infty$:

$$\varphi(u) = 2^u \sqrt{2\pi}\left(\frac{u+it}{2}\right)^{\frac{u+it}{2}+\frac{1}{2}}\left(\frac{u-it}{2}\right)^{\frac{u-it}{2}+\frac{1}{2}} u^{-u-\frac{1}{2}} e^{o(1)} g(u)$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{u}\,\frac{\sqrt{u^2+t^2}}{u}\left(\frac{u+it}{u-it}\right)^{\frac{it}{2}}\left(1+\frac{t^2}{u^2}\right)^{\frac{u}{2}} e^{o(1)} g(u),$$

mithin $\lim_{u \to +\infty} \varphi(u) = \pi$. Insgesamt wird also für jedes u

$$\varphi(u) = \varphi(u+2) = \cdots = \varphi(u+2n) = \cdots = \lim_{n \to +\infty} \varphi(u+2n) = \pi.$$

Damit sind die Formeln (20), (21), (22) bewiesen [3]).

Natürlich kann man aus der Integraldarstellung (18) und der Grundformel (20) für das Skalarprodukt einer ganzen Spitzenform mit einer elliptischen Quersumme umgekehrt die Grundformel (19) für das Skalarprodukt einer ganzen Spitzenform mit einer hyperbolischen Quersumme ableiten. Wir verzichten indessen auf dieses Vorgehen, da wir diesen Zusammenhang in den folgenden Paragraphen unter weit schwierigeren Verhältnissen herstellen wollen.

---

[2]) Im vorliegenden Sonderfall am einfachsten bei POLYA-SZEGÖ, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, S. 78. Berlin, Springer, 1925.

[3]) Den hier dargestellten einfachen Beweis verdanke ich einer brieflichen Mitteilung des Herrn H. KNESER vom 28. 3. 1941. H. MAASS zitiert in derselben Sache: E. E. KUMMER, De integralibus definitis et seriebus infinitis. Crelles Journal für d. reine u. angew. Math. 17 (1837), Nr. 11, S. 210–227, siehe insbesondere Gl. (31), (32), S. 217.

§ 2.

Die Funktion $P(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0)$.

1. Definition, Konvergenz, erste Umformung.

Es sei zunächst noch Γ eine beliebige Grenzkreisgruppe von erster Art; Γ habe den parabolischen Fixpunkt ∞. Es seien

$$s = \sigma + it, \quad s' = \sigma' + it', \quad \tau = x + iy, \quad \tau_0 = x_0 + iy_0,$$
$$z = a + ib, \quad z_0 = a_0 + ib_0$$

die Zerlegungen der komplexen Variabeln $s, s', \tau, \tau_0, z, z_0$ in Real- und Imaginärteile. Von diesen seien

$$\sigma > 0, \quad \sigma' \geqq 0, \quad y > 0, \quad y_0 > 0, \quad b > 0, \quad b_0 > 0.$$

Wir setzen mit $M = \begin{pmatrix} m_0 & m_3 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$:

$$P(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0) = \sum_{M \subset \Gamma} (m_1\tau + m_2)^{-2} |m_1\tau_0 + m_2|^{-s} (M\tau - \bar{z})^{-2} |M\tau_0 - \bar{z}_0|^{-s'}.$$

Bezeichnet U^N die normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_\infty$, $\tau^0 = x^0 + iy^0$ einen festgewählten Punkt mit $-\frac{N}{2} < x^0 < +\frac{N}{2}$, $y_0 > 0$, $\mathfrak{S}_0$ das System

$$(24) \quad M \subset \mathfrak{S}_0: \qquad -\frac{N}{2} \leqq \Re e\, M\tau^0 < +\frac{N}{2},$$

so findet man

$$(25a) \quad P(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0)$$
$$= \sum_{M \subset \mathfrak{S}_0} (m_1\tau + m_2)^{-2} |m_1\tau_0 + m_2|^{-s} f_0\left(s', \frac{M\tau - \bar{z}}{N}, \frac{M\tau_0 - \bar{z}_0}{N}\right),$$

$$f_0(s', w, w_0) = N^{-2-s'} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (w + h)^{-2} |w_0 + h|^{-s'},$$

$$(25b) \quad w = \frac{M\tau - \bar{z}}{N}, \quad w_0 = \frac{M\tau_0 - \bar{z}_0}{N}.$$

Es mögen τ, τ_0, z, z_0 sämtlich auf einer festen H-Kreisscheibe $\mathfrak{k}$ liegen, es sei $\sigma \geqq \alpha_0$ $(\alpha_0 > 0)$, $\sigma' \geqq 0$, s und s' beschränkt und τ^0 in $\mathfrak{k}$ enthalten. Die zu P gehörige Betragreihe läßt sich auf die Form

$$(26) \quad N^{-2-s'} \sum_{M \subset \mathfrak{S}_0} |m_1\tau + m_2|^{-2} |m_1\tau_0 + m_2|^{-\sigma} \times$$
$$\times \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{M\tau - \bar{z}}{N} + h\right|^{-2} \left|\frac{M\tau_0 - \bar{z}_0}{N} + h\right|^{-\sigma'}$$

bringen. Hier erweist sich der zweite Faktor im Reihenglied der Summe über h gemäß

$$\left|\frac{M\tau_0-\bar{z}_0}{N}+h\right|^{-\sigma'} \leqq \left(\frac{b_0}{N}\right)^{-\sigma'}$$

als beschränkt. Der erste Faktor ist für alle h höchstens gleich $\left(\frac{b}{N}\right)^{-2}$. Nach (24) wird $M=\pm I$, wenn $m_1=0$; dann ist $\Re\frac{M\tau-\bar{z}}{N}=\Re\frac{\tau-\bar{z}}{N}$ beschränkt. Im Falle $m_1\neq 0$ dagegen hat man

$$\Re\frac{M\tau-\bar{z}}{N}=\Re\frac{M\tau^0-\bar{z}}{N}+\Re\frac{M\tau-M\tau^0}{N},$$

wo sich $\left|\Re\frac{M\tau^0-\bar{z}}{N}\right|$ nach (24) und $\left|\Re\frac{M\tau-M\tau^0}{N}\right|$ zufolge der Abschätzung

$$(27)\quad \left|\Re\frac{M\tau-M\tau^0}{N}\right| \leqq \left|\frac{M\tau-M\tau^0}{N}\right| = \frac{|\tau-\tau^0|}{N\,|m_1\tau+m_2|\,|m_1\tau^0+m_2|} \leqq \frac{|\tau-\tau^0|}{Nm_1^2yy^0}$$

nach (G I), Satz 2 als beschränkt erweisen. Hieraus entnimmt man leicht die Beschränktheit der inneren Summe in (26). Die gleichmäßige absolute Konvergenz der Reihe P folgt nun aus (G V), Hilfssatz 3 und den Konvergenzsätzen in (G V), § 2.

Von hier ab sei bis zum Schluß des § 4 durchweg $\Gamma=\Gamma(N)$, $\Gamma(N)$ die Hauptkongruenzuntergruppe N-ter Stufe der Modulgruppe.

Es seien w, w_0, $u=u_1+iu_2$ (u_1, u_2 reell) komplexe Variable mit

$$\Im w>0,\ \Im w_0>0,\ \Im w+u_2>0,\ \Im w_0+u_2>0,\ -\Im w_0+u_2<0,$$

$g_0(s,w,w_0,u)$ die Funktion

$$g_0(s,w,w_0,u)=N^{-2-s}\sum_{h=-\infty}^{+\infty}(w+u+h)^{-2}(w_0+u+h)^{-\frac{s}{2}}(\overline{w_0}+u+h)^{-\frac{s}{2}},$$

und dabei

$$0<\arg(w+u+h)<\pi,\quad 0<\arg(w_0+u+h)<\pi,$$
$$-\pi<\arg(\overline{w_0}+u+h)<0.$$

Für reelles u wird also

$$g_0(s,w,w_0,u)=N^{-2-s}\sum_{h=-\infty}^{+\infty}(w+u+h)^{-2}|w_0+u+h|^{-s},$$

so daß insbesondere

$$f_0(s,w,w_0) = g_0(s,w,w_0,0). \tag{28}$$

Die Reihe g_0 konvergiert gleichmäßig absolut, wenn s, w, w_0, u beschränkt sind, und wenn bei positivem α_0:

$$\mathfrak{Im}\, w + u_2 \geqq \alpha_0,\ \mathfrak{Im}\, w_0 + u_2 \geqq \alpha_0,\ -\mathfrak{Im}\, w_0 + u_2 \leqq -\alpha_0,\ \sigma \geqq -1+\alpha_0.$$

Die Fourierentwicklung von $g_0(s,w,w_0,u)$ liefert nach (28) die Darstellung

$$f_0(s,w,w_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{0,n}(s,w,w_0),$$

$$A_{0,n}(s,w,w_0) = N^{-2-s}\int_{-\infty}^{+\infty} (w+u)^{-2}\,|w_0+u|^{-s} e^{-2\pi i n u}\,du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (Nw+u)^{-2}\,|Nw_0+u|^{-s} e^{-2\pi i n \frac{u}{N}}\,\frac{du}{N}.$$

Indem wir hier $Nw = v$, $Nw_0 = v_0$ und

$$f_0(s,w,w_0) = f(s,v,v_0),\quad A_{0,n}(s,w,w_0) = A_n(s,v,v_0)$$

schreiben, erhalten wir die zunächst gesuchte Umformung

$$\mathsf{P}(s,s',\tau,\tau_0,z,z_0) \tag{29}$$
$$= \sum_{M\subset\Gamma_0} (m_1\tau+m_2)^{-2}\,|m_1\tau_0+m_2|^{-s} f(s', M\tau-\bar{z}, M\tau_0-\bar{z}_0),$$

$$f(s',v,v_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(s',v,v_0)\quad (v = M\tau-\bar{z},\ v_0 = M\tau_0-\bar{z}_0), \tag{30}$$

$$A_n(s',v,v_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (v+u)^{-2}\,|v_0+u|^{-s'} e^{-2\pi i n\frac{u}{N}}\,\frac{du}{N}, \tag{31}$$

und mit der letzten Gleichung den Anschluß an die Theorie in (J III), § 3 [vgl. dort (40a)].

2. Aufspaltung.

Wir setzen voraus, daß mit festen positiven α_0 und C:

$$\begin{gathered}\tau\subset\mathfrak{k},\ \tau_0\subset\mathfrak{k},\ z\subset\mathfrak{k},\ z_0\subset\mathfrak{k},\ \tau^0\subset\mathfrak{k},\\ |s|\leqq C,\ |s'|\leqq C,\ \sigma\geqq\alpha_0,\ \sigma'\geqq-1+\alpha_0.\end{gathered} \tag{32}$$

Dann sind, wie wir sogleich zeigen, die Größen $v = M\tau - \bar{z}$, $v_0 = M\tau_0 - \bar{z}_0$ für $M \subset \mathfrak{S}_0$ beschränkt. Nach (24) ist zunächst $M\tau^0$ ($M \subset \mathfrak{S}_n$) beschränkt, da

$$\mathfrak{Im}\, M\tau^0 = \frac{y^0}{|m_1\tau^0 + m_2|^2} \leqq \frac{y^0}{m_1^2 y^{0^2}} = \frac{1}{m_1^2 y^0} \quad (m_1 \neq 0).$$

Der Rest folgt hieraus, aus (27), (32) und der Zerlegung

$$v = M\tau^0 + (M\tau - M\tau^0) - \bar{z}, \quad v_0 = M\tau^0 + (M\tau_0 - M\tau^0) - \bar{z}_0.$$

Danach treffen die Voraussetzungen (J III), (41) über $A_n(s, v, v_0)$ zu, und man erhält mit konstantem $C_1 = C_1(\mathfrak{k}, C, \alpha_0)$ und festem $\alpha_1 > 0$

$$|A_n(s', v, v_0)| \leqq C_1 e^{-2\pi|n|\frac{\alpha_1}{N}} \quad [(\text{J III}), (42)], \tag{33}$$

$$\mathsf{P}(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Theta_n(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0),$$

$$\Theta_n = \Theta_n(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0) = \sum_{M \subset \mathfrak{S}_0} \frac{A_n(s', M\tau - \bar{z}, M\tau_0 - \bar{z}_0)}{(m_1\tau + m_2)^2 |m_1\tau_0 + m_2|^s}. \tag{34}$$

Wir nehmen für $m_1 \neq 0$ eine Zerlegung des Integrals $A_n(s', v, v_0)$ vor, indem wir setzen

$$M\tau = \frac{m_0}{m_1} + M^*\tau, \quad M^*\tau = \frac{-1}{m_1(m_1\tau + m_2)} \quad (m_1 \neq 0),$$

$$Q_n(s', M^*, \tau, \tau_0, z, z_0) = A_n(s', M\tau - \bar{z}, M\tau_0 - \bar{z}_0) - A_n\left(s', \frac{m_0}{m_1} - \bar{z}, \frac{m_0}{m_1} - \bar{z}_0\right). \tag{35}$$

Dann ergibt sich nach (31)

$$Q_n(s', M^*, \tau, \tau_0, z, z_0) = e^{2\pi i \frac{m_0 n}{m_1 N}} \left(A_n(s', M^*\tau - \bar{z}, M^*\tau_0 - \bar{z}_0) - A_n(s', -\bar{z}, -\bar{z}_0)\right). \tag{36}$$

Die Aufspaltung der Reihe Θ geschieht nun folgendermaßen: Wir bilden

$$K_{n,1} = K_{n,1}(s', \tau, \tau_0, z, z_0) = 2A_n(s', \tau - \bar{z}, \tau_0 - \bar{z}_0), \tag{37}$$

$$K_{n,2} = K_{n,2}(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0) = \sum_{\substack{M \subset \mathfrak{S} \\ m_1 \neq 0}} \frac{A_n\left(s', \frac{m_0}{m_1} - \bar{z}, \frac{m_0}{m_1} - \bar{z}_0\right)}{(m_1\tau + m_2)^2 |m_1\tau_0 + m_2|^s}. \tag{38}$$

Dieser Ausdruck $K_{n,2}$ läßt sich in den Bezeichnungen (J III), (35), (67a) auf die Gestalt

$$(39)\qquad K_{n,2} = A_n(s', -\bar{z}, -\overline{z_0}) \sum_{\substack{M \subset \mathfrak{S}_0 \\ m_1 \neq 0}} \frac{e^{2\pi i \frac{m_0 n}{m_1 N}}}{(m_1\tau + m_2)^2 |m_1\tau_0 + m_2|^s}$$

$$= A_n(s', -\bar{z}, -\overline{z_0})\, H_2(s, \tau, \tau_0, n)$$

bringen, wo

$$H_2(s, \tau, \tau_0, n) = H_2(s; \tau, \tau_0, I, N, n).$$

Schließlich sei $\varepsilon_0 > 0$ fest vorgegeben. Nach (32) und für $M \subset \mathfrak{S}_0$, $m_1 \neq 0$ wird nach (G V), Hilfssatz 3

$$|M^*\tau| < \varepsilon_0, |M^*\tau_0| < \varepsilon_0 \qquad \text{für } m_1^2 + m_2^2 > V = V(\varepsilon_0),$$

und wir setzen

$$K_{n,3} = K_{n,3,V} + K^V_{n,3},$$

$$K_{n,3,V} = K_{n,3,V}(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0)$$

$$(40)\qquad = \sum_{\substack{M \subset \mathfrak{S}_0,\ m_1 \neq 0 \\ m_1^2 + m_2^2 \leqq V}} \frac{Q_n(s', M^*, \tau, \tau_0, z, z_0)}{(m_1\tau + m_2)^2 |m_1\tau_0 + m_2|^{s'}},$$

$$K^V_{n,3} = K^V_{n,3}(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0)$$

$$(41)\qquad = \sum_{\substack{M \subset \mathfrak{S}_0,\ m_1 \neq 0 \\ m_1^2 + m_2^2 > V}} \frac{Q_n(s', M^*, \tau, \tau_0, z, z_0)}{(m_1\tau + m_2)^2 |m_1\tau_0 + m_2|^{s'}}$$

so daß insgesamt

$$(42)\qquad \Theta_n = K_{n,1} + K_{n,2} + K_{n,3} = K_{n,1} + K_{n,2} + K_{n,3,V} + K^V_{n,3}.$$

3. Abschätzung von $Q_n(s', M^*, \tau, \tau_0, z, z_0)$.

In der Integraldarstellung

$$(43)\qquad Q_n(s', M^*, \tau, \tau_0, z, z_0)\, e^{-2\pi i \frac{m_0 n}{m_1 N}}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ (M^*\tau - \bar{z} + u)^{-2} |M^*\tau_0 - \overline{z_0} + u|^{-s'} - \right.$$

$$\left. - (-\bar{z} + u)^{-2} |-\overline{z_0} + u|^{-s'} \right\} e^{-2\pi i n \frac{u}{N}} \frac{du}{N}$$

gestattet die geschweifte Klammer die folgende Umformung:

$$\{(M^*\tau - \bar{z} + u)^{-2} - (-\bar{z} + u)^{-2}\}|M^*\tau_0 - \bar{z}_0 + u|^{-s'} +$$
$$+ \{|M^*\tau_0 - \bar{z}_0 + u|^{-s'} - |-\bar{z}_0 + u|^{-s'}\}(-\bar{z} + u)^{-2}$$
$$= \left(\frac{1}{M^*\tau - \bar{z} + u} - \frac{1}{-z + u}\right)\left(\frac{1}{M^*\tau - \bar{z} + u} + \frac{1}{-\bar{z} + u}\right)|M^*\tau_0 - \overline{z_0} + u|^{-s'} +$$
$$+ \Big((M^*\tau_0 - \overline{z_0} + u)^{-\frac{s'}{2}}(M^*\overline{\tau_0} - z_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} -$$
$$- (-\overline{z_0} + u)^{-\frac{s'}{2}}(-z_0 + u)^{-\frac{s'}{2}}\Big)(-\bar{z} + u)^{-2}$$
$$= -(M^*\tau)(M^*\tau - \bar{z} + u)^{-2}(-\bar{z} + u)^{-1}(M^*\tau_0 - \overline{z_0} + u)^{-\frac{s'}{2}} \times$$
$$\times (M^*\overline{\tau_0} - z_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} +$$
$$- (M^*\tau)(M^*\tau - \bar{z} + u)^{-1}(-\bar{z} + u)^{-2}(M^*\tau_0 - \bar{z}_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} \times$$
$$\times (M^*\overline{\tau_0} - z_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} +$$
$$+ \left\{(M^*\tau_0 - \overline{z_0} + u)^{-\frac{s'}{2}} - (-\overline{z_0} + u)^{-\frac{s'}{2}}\right\}(M^*\overline{\tau_0} - z_0 + u)^{-\frac{s'}{2}}(-\bar{z} + u)^{-2} +$$
$$+ \left\{(M^*\overline{\tau_0} - z_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} - (-\overline{z_0} + u)^{-\frac{s'}{2}}\right\}(-\overline{z_0} + u)^{-\frac{s'}{2}}(-\bar{z} + u)^{-2}.$$

Dadurch, daß nacheinander diese vier Ausdrücke an Stelle der geschweiften Klammer in das Integral (43) eingesetzt werden, entstehen vier neue Integrale, die wir der Reihe nach J_1, J_2, J_3, J_4 nennen: Es gilt

$$(44) \qquad e^{-2\pi i \frac{m_0 n}{m_1 N}} Q_n(s', M^*, \tau, \tau_0, z, z_0) = J_1 + J_2 + J_3 + J_4.$$

Wir schreiben nun zur Abkürzung vorübergehend λ für $M^*\tau$, λ_0 für $M^*\tau_0$. In den genannten Integralen treten Potenzen der in u linearen Funktionen

$$u - u_0 \quad \text{mit} \quad u_0 = \bar{z}, \overline{z_0}, \bar{z} - \lambda, \overline{z_0} - \lambda_0, z_0 - \overline{\lambda_0}$$

auf. Eine solche Potenz mit dem komplexen Exponenten ζ wird stets durch

$$(u - u_0)^\zeta = e^{\zeta \log(u - u_0)},$$
$$-\frac{\pi}{2} \leqq \arg(u - u_0) \leqq \frac{3\pi}{2} \quad \text{oder} \quad -\frac{3\pi}{2} \leqq \arg(u - u_0) \leqq \frac{\pi}{2}$$

erklärt, je nachdem, ob $\Im m\, u_0 < 0$ oder $\Im m\, u_0 > 0$ ist, und dabei wird die u-Ebene von $u = u_0$ aus senkrecht nach unten oder oben aufgeschnitten. Zur Untersuchung der geschweiften Klammern in J_3 denke man sich außer diesen von $u = \bar{z}_0$ und $u = \bar{z}_0 - \lambda_0$ senkrecht nach unten ins Unendliche führenden Schnitten noch den Schnitt längs der Strecke von $u = \bar{z}_0$ nach $u = \bar{z}_0 - \lambda_0$ gezogen. Die entsprechende, zu dieser spiegelbildliche Konstruktion werde zur Untersuchung von J_4 in der oberen u-Halbebene ausgeführt. In dem Teil $\mathfrak{T}$ der aufgeschnittenen u-Ebene, welcher die reelle Achse enthält, gilt mit $\frac{s'}{2} = \varrho$, $|\varrho| \leqq \mu = \frac{C}{2}$:

$$(M^*\tau_0 - \bar{z}_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} - (-\bar{z}_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} = (\lambda_0 - \bar{z}_0 + u)^{-\varrho} - (-\bar{z}_0 + u)^{-\varrho}$$

$$= (-\bar{z}_0 + u)^{-\varrho}\left\{\left(1 + \frac{\lambda_0}{u - \bar{z}_0}\right)^{-\varrho} - 1\right\} = (-\bar{z}_0 + u)^{-\varrho} \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\varrho}{m} \frac{\lambda_0^m}{(u - \bar{z}_0)^m}.$$

Auf dem in (J III) bei (41) angegebenen Integrationswege $\mathfrak{L}$ und auf der reellen Achse kann $\left|\frac{\lambda_0}{u - \bar{z}_0}\right| \leqq \frac{1}{2}$ durch Wahl von ε_0 erreicht werden, wenn

$$m_1^2 + m_2^2 > V(\varepsilon_0).$$

Da außerdem

$$\left|\binom{-\varrho}{m}\right| \leqq \left|\binom{-\mu}{m}\right| = (-1)^m \binom{-\mu}{m},$$

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\varrho}{m}\left(\frac{\lambda_0}{u - z_0}\right)^{m-1}\right| \leqq 2 \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\mu}{m} \frac{(-1)^m}{2^m} \leqq 2^{u+1} \leqq 2^{\frac{C}{2}+1},$$

so findet man

$$\left|(M^*\tau_0 - \bar{z}_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} - (-\bar{z}_0 + u)^{-\frac{s'}{2}}\right| \leqq 2^{\frac{1}{2}C+1} |M^*\tau_0| \left|(-\bar{z}_0 + u)^{-\frac{s'}{2}-1}\right|$$

und ebenso

$$\left|(M^*\bar{\tau}_0 - z_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} - (-z_0 + u)^{-\frac{s'}{2}}\right| \leqq 2^{\frac{1}{2}C+1} |M^*\tau_0| \left|(-z_0 + u)^{-\frac{s'}{2}-1}\right|.$$

Folglich liegen $|J_1|$ und $|J_2|$ bei festem $\alpha_1 > 0$ unterhalb einer Schranke

$$\text{Const}\, |M^*\tau|\, e^{-2\pi|n|\frac{\alpha_1}{N}},$$

$|J_3|$ und $|J_4|$ unterhalb einer Schranke

$$\text{Const}\, |M^*\tau_0|\, e^{-2\pi|n|\frac{\alpha_1}{N}}.$$

Insgesamt gilt für hinreichend großes $V(\varepsilon_0)$ und für $m_1^2 + m_2^2 > V(\varepsilon_0)$:

$$(45)\quad |Q_n(s', M^*, \tau, \tau_0, z, z_0)| \leqq C_2(\mathfrak{k}, C, \alpha_0)\,(|M^*\tau| + |M^*\tau_0|)\,e^{-2\pi|n|\frac{\alpha_1}{N}}$$

4. Analytische Fortsetzung von $\mathsf{P}(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0)$.

Aus (34), (37), (38), (39), (40), (41), (42) ergibt sich die Darstellung

$$\mathsf{P} = \mathsf{P}(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0) = F_1 + F_2 + F_{3,V} + F_3^V,$$

$$F_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_{n,1} = 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(s', \tau - \bar{z}, \tau_0 - \bar{z}_0),$$

$$F_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_{n,2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(s', -\bar{z}, -\bar{z}_0)\,H_2(s, \tau, \tau_0, n),$$

(46)

$$F_{3,V} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_{n,3,V} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{\substack{M \subset \mathfrak{G}_0,\ m_1 \neq 0 \\ m_1^2 + m_2^2 \leqq V}} \frac{Q_n(s', M^*, \tau, \tau_0, z, z_0)}{(m_1\tau + m_2)^2\,|m_1\tau_0 + m_2|^\sigma},$$

$$F_3^V = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_{n,3}^V = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{\substack{M \subset \mathfrak{G}_0,\ m_1 \neq 0 \\ m_1^2 + m_2^2 > V}} \frac{Q_n(s', M^*, \tau, \tau_0, z, z_0)}{(m_1\tau + m_2)^2\,|m_1\tau_0 + m_2|^\sigma},$$

deren Gültigkeit allerdings auf der Voraussetzung beruht, daß die vier unendlichen Summen über n konvergieren. Dies wird im folgenden bewiesen werden.

Wir untersuchen zunächst F_1 und $F_{3,V}$. Wenn die Bedingungen (32) erfüllt sind, so gilt (33), und daraus folgt die gleichmäßige absolute Konvergenz der Reihe F_1. Entsprechendes ergibt sich für $F_{3,V}$. Denn wenn man in der inneren Summe zunächst M festhält, so konvergiert die entstehende Summe unter den Bedingungen (32) gleichmäßig absolut, wie man auf Grund von (33) und (35) erkennt. Beide Aussagen hängen von der unteren Schranke von σ nicht ab.

Um F_3^V abzuschätzen, wenden wir auf das allgemeine Glied der inneren Summe den Hilfssatz 3 aus (G V) an. Dieser führt in Verbindung mit (45) und unter den Bedingungen (32), soweit sie sich nicht auf σ beziehen, zu der Ungleichung

$$\left|\frac{Q_n(s', M^*, \tau, \tau_0, z, z_0)}{(m_1\tau + m_2)^2\,|m_1\tau_0 + m_2|^\sigma}\right| \leqq C_3(\mathfrak{k}, C, \alpha_0)\,\frac{e^{-2\pi|n|\frac{\alpha_1}{N}}}{|m_1 i + m_2|^{3+\sigma}} \quad (\alpha_1 > 0 \text{ und fest}).$$

Aus ihr geht hervor, daß die Reihe F_3^V gleichmäßig absolut konvergiert, sobald den Bedingungen (32), soweit sie sich nicht auf σ beziehen, und der Bedingung $\sigma \geqq -1+\alpha_0$ Genüge geschieht.

Bei der Untersuchung von F_2 hat man zu beachten, daß hier im Gegensatz zu (J III), § 3 auch negative Werte von n auftreten. Es ergibt sich nach dem Vorgehen von (J III), § 3 für alle n in den Bezeichnungen von (J III), (55), (55a), (57):

$$H_2(s,\tau,\tau_0,n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} D(s,m,I,n)\, A_m(s,\tau,\tau_0),$$

$$D(s,m,I,n) = \sum_{\substack{m_1 \equiv 0 \pmod N \\ m_1 \neq 0}} |m_1|^{-2-s}\, W_{m_1}(m,I,n).$$

Die Funktion $H_2(s,\tau,\tau_0,0)$ ist nach einer Bemerkung bei (J III) (74) unter den Bedingungen (32), soweit sie sich nicht auf σ beziehen, und unter der Bedingung $\sigma \geqq -\frac{1}{3}+\alpha_0$ beschränkt. Für $n \neq 0$ ersieht man aus (J III), (62), d. h. aus

$$|W_{m_1}(m,I,n)| \leqq C_4(\varepsilon)\,|m_1|^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\,|n|^{\frac{1}{2}} \qquad (\varepsilon>0,\ n\neq 0),$$

daß

$$|D(s,m,I,n)| \leqq C_5(\alpha_0)\,|n|^{\frac{1}{2}} \qquad (\sigma \geqq -\tfrac{1}{3}+\alpha_0,\ \alpha_0>0,\ n\neq 0),$$

$$|H_2(s,\tau,\tau_0,n)| \leqq C_6(t,C,\alpha_0)\,|n|^{\frac{1}{2}} \qquad (\sigma \geqq -\tfrac{1}{3}+\alpha_0,\ \alpha_0>0,\ n\neq 0).$$

Diese Abschätzung hat zur unmittelbaren Folge, daß die Reihe F_2 unter den Bedingungen (32), soweit sie sich nicht auf σ beziehen, und unter der Bedingung $\sigma \geqq -\frac{1}{3}+\alpha_0$ gleichmäßig absolut konvergiert.

Damit haben wir die Funktion $\mathfrak{P}(s,s',\tau,\tau_0,z,z_0)$ in das Gebiet $\sigma > -\frac{1}{3}$, $\sigma' > -1$ analytisch fortgesetzt.

5. Bestimmung der Funktion $\mathfrak{P}$ für $s'=0$ und für $s=s'=0$. Endergebnis über die Funktion $\mathfrak{P}$.

Zur Bestimmung des Nullwertes $\mathfrak{P}(s,0,\tau,\tau_0,z,z_0)$ für $\sigma>0$ dient die Formel

$$(47)\quad A_n(0,\tau,\tau_0)=0 \quad (n\leqq 0), \qquad A_n(0,\tau,\tau_0) = -\frac{4\pi^2}{N^2}\, n\, e^{2\pi i n \frac{\tau}{N}} \quad (n>0).$$

Wir setzen

$$F_1 = F_1(s,s'),\quad F_2 = F_2(s,s'),\quad F_{3,V} = F_{3,V}(s,s'),\quad F^V = F_\infty^V(s,s')$$

und erhalten

$$Q_n(0, M^*, \tau, \tau_0, z, z_0) = -\frac{4\pi^2}{N^2} n\, e^{-2\pi i n \frac{\bar{z}}{N}} \left(e^{2\pi i n \frac{M\tau}{N}} - e^{2\pi i n \frac{m_0}{m_1 N}} \right) (n > 0),$$

$$F_1(s, 0) = -\frac{8\pi^2}{N^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, e^{2\pi i \nu \frac{\tau - \bar{\tau}}{N}},$$

$$F_2(s, 0) = -\frac{4\pi^2}{N^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, e^{-2\pi i \nu \frac{\bar{z}}{N}} \sum_{\substack{M \subset \mathfrak{G}_0 \\ m_1 \neq 0}} \frac{e^{2\pi i \nu \frac{m_0}{m_1 N}}}{(m_1\tau + m_2)^2 |m_1\tau_0 + m_2|^s},$$

$$F_{3,\nu}(s, 0) + F_3^{\nu}(s, 0) = -\frac{4\pi^2}{N^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, e^{-2\pi i \nu \frac{\bar{z}}{N}} \sum_{\substack{M \subset \mathfrak{G}_0 \\ m_1 \neq 0}} \frac{e^{2\pi i \nu \frac{M\tau}{N}} - e^{2\pi i \nu \frac{m_0}{m_1 N}}}{(m_1\tau + m_2)^2 |m_1\tau_0 + m_2|^s},$$

$$\mathsf{P}(s, 0, \tau, \tau_0, z, z_0) = G_{-2}(s; \tau, \tau_0, I, N \mid F_0),$$

(48)
$$F_0(w) \equiv \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu w^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{-4\pi^2}{N^2} \nu\, e^{-2\pi i \nu \frac{\bar{z}}{N}} w^\nu,$$

da

$$G_{-2}(s; \tau, \tau_0, I, N \mid F_0) = \sum_{M \subset \mathfrak{G}_0} \frac{F_0\left(e^{2\pi i \frac{M\tau}{N}}\right)}{(m_1\tau + m_2)^2 |m_1\tau_0 + m_2|^s}$$

$$= -\frac{4\pi^2}{N^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, e^{-2\pi i \nu \frac{\bar{z}}{N}} \sum_{M \subset \mathfrak{G}_0} \frac{e^{2\pi i \nu \frac{M\tau}{N}}}{(m_1\tau + m_2)^2 |m_1\tau_0 + m_2|^s} \quad (\sigma > 0).$$

Der Nullwert $\mathsf{P}(s, 0, \tau, \tau_0, z, z_0)$ hängt also von z_0 nicht ab. In den Bezeichnungen von (J III), § 3, 4 gilt ferner, wenn $\varphi(\tau)$ eine ganze Spitzenform $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ und

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{2\pi i n \frac{\tau}{N}}$$

ihre Fourierentwicklung angibt, nach (J III), (112) ($\tau_0 = \tau$):

(49) $$(\varphi(\tau), \mathsf{P}(s, 0, \tau, \tau_0, z, z_0); \Gamma(N)) = W_{2+\frac{s}{2}}(\varphi(\tau), \mathsf{P}(s, 0, \tau, \tau_0, z, z_0); \mathfrak{R})$$

$$= -2\pi \left(\frac{N}{4\pi}\right)^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right) \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-\frac{s}{2}} b_\nu e^{2\pi i \nu \frac{z}{N}}.$$

Der Nullwert $\mathsf{P}(0, 0, \tau, \tau_0, z, z_0)$ hängt mithin weder von τ_0 noch von z_0 ab, stellt eine ganze Spitzenform $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ dar und genügt der Beziehung

$$(\varphi(\tau), \mathsf{P}(0, 0, \tau, \tau_0, z, z_0);\ \Gamma(N)) = -2\pi\varphi(z). \tag{10}$$

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Funktion $\mathsf{P}(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0)$ auch da, wo sie nicht durch ihre ursprüngliche Reihe dargestellt wird, von der Wahl von V nicht abhängt.

Zusammenfassend formulieren wir die Ergebnisse dieses Paragraphen in den folgenden Aussagen:

Satz 1. *Sind τ, τ_0, z, z_0 vier komplexe Zahlen mit positiven Imaginärteilen, $s = \sigma + it$, $s' = \sigma' + it'$, $(\sigma, \sigma', t, t'$ reell) zwei komplexe Zahlen mit positiven Realteilen, so konvergiert die Reihe*

$$\mathsf{P}(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0)$$
$$= \sum_{M \subset \Gamma} (m_1\tau + m_2)^{-2} |m_1\tau_0 + m_2|^{-s} (M\tau - \bar{z})^{-2} |M\tau_0 - \bar{z}_0|^{-s'}.$$

Dabei bezeichnet $\Gamma = \Gamma(N)$ die Hauptkongruenzuntergruppe N-ter Stufe der Modulgruppe und $\{m_1, m_2\}$ die zweite Zeile der Matrix M. Man verstehe unter $\mathfrak{k}$ eine beliebige, aber feste H-Kreisscheibe, unter α_0 eine beliebig klein, unter C eine beliebig groß vorgeschriebene positive Zahl. Dann gestattet die Funktion $\mathsf{P}(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0)$ die unter den Bedingungen

$$\tau \subset \mathfrak{k},\ \tau_0 \subset \mathfrak{k},\ z \subset \mathfrak{k},\ z_0 \subset \mathfrak{k},$$
$$\sigma \geqq -\tfrac{1}{3} + \alpha_0,\ \sigma' \geqq -1 + \alpha_0,\ |s| \leqq C,\ |s'| \leqq C$$

gleichmäßig absolut konvergente Reihendarstellung (46). Sie ist mithin, wenn τ, τ_0, z, z_0 sämtlich positiven Imaginärteil haben und $\sigma > -\frac{1}{3}$, $\sigma' > -1$ zutrifft, bei festen τ_0, z_0 eine reguläre analytische Funktion der vier Variablen $s, s', \tau, -\bar{z}$. Ferner ist sie unter diesen Bedingungen eine stetige Funktion aller ihrer sechs Argumente $s, s', \tau, \tau_0, z, z_0$.

Satz 2. *Der Nullwert $\mathsf{P}(s, 0, \tau, \tau_0, z, z_0)$ hängt von z_0 nicht ab; er stimmt für beliebige τ, τ_0, z in der oberen Halbebene und für $\sigma > -\frac{1}{3}$ mit der Funktion $G_{-2}(s; \tau, \tau_0, I, N|F_0)$ aus* (J III), § 3 *überein, wo*

$$F_0(w) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu w^\nu \quad \text{mit} \quad \beta_\nu = -\frac{4\pi^2}{N^2}\, \nu\, e^{-2\pi i \nu \frac{\bar{z}}{N}} \qquad (\nu \geqq 1).$$

Darüber hinaus hängt der Nullwert $\mathsf{P}(0, 0, \tau, \tau_0, z, z_0)$ weder von τ_0 noch von z_0 ab, stellt eine ganze Spitzenform $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ dar, stimmt als solche mit der Funktion $-\frac{4\pi^2}{N^2}\Omega(\tau, -\bar{z}, 0, I)$ aus (J III), § 4 *überein und genügt daher der Metrisierungsformel* (50).

§ 3.

1. Entwicklung von P in eine unendliche Reihe nach hyperbolischen Quersummen.

Es mögen für $\Gamma = \Gamma(N)$ die Symbole η, η', H, H', H, μ' die zu Anfang von § 1 angegebene Bedeutung haben. Wir setzen $u = \mathsf{H}z$, $u_0 = \mathsf{H}z_0$ und erhalten für $\sigma > 0$ nach dem Vorgehen des § 1 zunächst

$$\mathsf{P}(s, s, \tau, \tau_0, z, z_0) = (-\eta_1' \bar{u} + \eta_1)^2 |-\eta_1' \bar{u}_0 + \eta_1|^s \times$$

$$\times \sum_{\mathsf{B} \subset \mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)} \frac{(\mathsf{B}\tau)\,|\mathsf{B}\tau_0|^{\frac{s}{2}}}{(\beta_1\tau + \beta_2)(\beta_1'\tau + \beta_2')\,|\beta_1\tau_0 + \beta_2|^{\frac{s}{2}}\,|\beta_1'\tau_0 + \beta_2'|^{\frac{s}{2}}} f(s, \mathsf{B}\tau, \mathsf{B}\tau_0, u, u_0),$$

$$f(s, \tau, \tau_0, u, u_0) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\mu'^h \tau - \mu'^{-h} \bar{u})^2\,|\mu'^h \tau_0 - \mu'^{-h} \bar{u}_0|^s},$$

sodann aber, wenn analog zu den Bezeichnungen des § 1

$$\tau = Re^{i\vartheta}, \quad \tau_0 = R_0 e^{i\vartheta_0}, \quad u = \varrho e^{i\omega}, \quad u_0 = \varrho_0 e^{i\omega_0},$$

(51 a)
$$R > 0, \quad R_0 > 0, \quad \varrho > 0, \quad \varrho_0 > 0,$$
$$0 < \vartheta < \pi, \quad 0 < \vartheta_0 < \pi, \quad 0 < \omega < \pi, \quad 0 < \omega_0 < \pi,$$

$$\sqrt{\tau \bar{u}} = \sqrt{R\varrho}\, e^{i\frac{\vartheta - \omega}{2}}, \quad \sqrt{\tau_0 \bar{u}_0} = \sqrt{R_0 \varrho_0}\, e^{i\frac{\vartheta_0 - \omega_0}{2}},$$

$$\zeta = \zeta(\tau, \bar{u}) = \sqrt{\frac{\tau}{u}} = \sqrt{\frac{R}{\varrho}}\, e^{i\frac{\vartheta + \omega}{2}} = \lambda e^{i\chi}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{R}{\varrho}} > 0, \quad \chi = \frac{\vartheta + \omega}{2},$$

$$\zeta_0 = \zeta(\tau_0, \bar{u}_0) = \sqrt{\frac{\tau_0}{\bar{u}_0}} = \sqrt{\frac{R_0}{\varrho_0}}\, e^{i\frac{\vartheta_0 + \omega_0}{2}} = \lambda_0 e^{i\chi_0},$$

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{R_0}{\varrho_0}} > 0, \quad \chi_0 = \frac{\vartheta_0 + \omega_0}{2},$$

(51 b)
$$\mathsf{B}\tau = R_{\mathsf{B}} e^{i\vartheta_{\mathsf{B}}}, \quad \mathsf{B}\tau_0 = R_{0,\mathsf{B}} e^{i\vartheta_{0,\mathsf{B}}}, \quad R_{\mathsf{B}} > 0, \quad R_{0,\mathsf{B}} > 0,$$
$$0 < \vartheta_{\mathsf{B}} < \pi, \quad 0 < \vartheta_{0,\mathsf{B}} < \pi,$$

$$\zeta_{\mathsf{B}} = \zeta(\mathsf{B}\tau, \bar{u}) = \lambda_{\mathsf{B}} e^{i\chi_{\mathsf{B}}}, \quad \lambda_{\mathsf{B}} = \sqrt{\frac{R_{\mathsf{B}}}{\varrho}} > 0, \quad \chi_{\mathsf{B}} = \frac{\vartheta_{\mathsf{B}} + \omega}{2},$$

$$\zeta_{0,\mathsf{B}} = \zeta(\mathsf{B}\tau_0, \bar{u}_0) = \lambda_{0,\mathsf{B}} e^{i\chi_{0,\mathsf{B}}}, \quad \lambda_{0,\mathsf{B}} = \sqrt{\frac{R_{0,\mathsf{B}}}{\varrho_0}} > 0, \quad \chi_{0,\mathsf{B}} = \frac{\vartheta_{0,\mathsf{B}} + \omega_0}{2}$$

gesetzt wird, die Darstellung

$$(52)\quad \mathsf{P}(s,s,\tau,\tau_0,z,z_0) = (\eta_1\bar{z}+\eta_2)^{-1}(\eta_1'\bar{z}+\eta_2')^{-1}|\eta_1\bar{z}_0+\eta_2|^{-\frac{s}{2}}|\eta_1'\bar{z}_0+\eta_2'|^{-\frac{s}{2}}\times$$
$$\times\sum_{\mathfrak{B}\subset\mathfrak{S}(H,\Gamma)}\frac{g(s,\zeta_{\mathfrak{B}},\zeta_{0,\mathfrak{B}})}{(\beta_1\tau+\beta_2)(\beta_1'\tau+\beta_2')|\beta_1\tau_0+\beta_2|^{\frac{s}{2}}|\beta_1'\tau_0+\beta_2'|^{\frac{s}{2}}},$$

$$(53)\quad g(s,\zeta_{\mathfrak{B}},\zeta_{0,\mathfrak{B}}) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty}\left(\mu'^{h}\zeta_{\mathfrak{B}}-\mu'^{-h}\zeta_{\mathfrak{B}}^{-1}\right)^{-2}|\mu'^{h}\zeta_{0,\mathfrak{B}}-\mu'^{-h}\zeta_{0,\mathfrak{B}}^{-1}|^{-s}.$$

In der vorliegenden Arbeit soll lediglich der Fall $s = s'$, $\tau = \tau_0$, $z = z_0$ vollständig diskutiert werden. Zur Behandlung der allgemeineren Funktion $\mathsf{P}(s,s,\tau,\tau_0,z,z_0)$ von den fünf Variablen $s = s', \tau, \tau_0, z, z_0$ liegt in (51), (52), (53) der Ansatz vor. Wie weit und mit welchen Ergebnissen die im folgenden entwickelte Theorie auf die genannte allgemeinere Funktion $\mathsf{P}(s = s')$ angewendet werden kann, wurde noch nicht untersucht.

Wir schreiben

$$F(s,\tau,z) = \mathsf{P}(s,s,\tau,\tau,z,z)$$

und finden nach (51), (52), (53) für $\sigma > 0$

$$(54)\quad F(s,\tau,z) = (\eta_1\bar{z}+\eta_2)^{-1}(\eta_1'\bar{z}+\eta_2')^{-1}|\eta_1\bar{z}+\eta_2|^{-\frac{s}{2}}|\eta_1'\bar{z}+\eta_2'|^{-\frac{s}{2}}\times$$
$$\times\sum_{\mathfrak{B}\subset\mathfrak{S}(H,\Gamma)}\frac{g(s,\zeta_{\mathfrak{B}})}{(\beta_1\tau+\beta_2)(\beta_1'\tau+\beta_2')|\beta_1\tau+\beta_2|^{\frac{s}{2}}|\beta_1'\tau+\beta_2'|^{\frac{s}{2}}}$$

$$(55)\qquad g(s,\zeta) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty}(\mu'^{h}\zeta-\mu'^{-h}\zeta^{-1})^{-2}|\mu'^{h}\zeta-\mu'^{-h}\zeta^{-1}|^{-s}.$$

Zur Umformung von $g(s,\zeta)$ bilden wir mit $w = w_1 + i w_2$ (w_1, w_2 reell) die Reihe

$$(56)\quad g(s,\zeta,w) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty}(\mu'^{h+w}\zeta-\mu'^{-h-w}\zeta^{-1})^{-2-\frac{s}{2}}\left(\mu'^{h+w}\bar{\zeta}-\mu'^{-h-w}\bar{\zeta}^{-1}\right)^{-\frac{s}{2}},$$

deren Sinn nun durch die Bestimmung der Zweige der vieldeutigen Funktionen im allgemeinen Reihenglied erklärt wird. Man erhält

$$\mathfrak{Im}(\mu'^{h+w}\zeta-\mu'^{-h-w}\zeta^{-1}) = \left(\mu'^{h+w_1}\lambda+\mu'^{-h-w_1}\lambda^{-1}\right)\sin(w_2\log\mu'+\chi),$$

$$\mathfrak{Im}\left(\mu'^{h+w}\bar{\zeta}-\mu'^{-h-w}\bar{\zeta}^{-1}\right) = \left(\mu'^{h+w_1}\lambda+\mu'^{-h-w_1}\lambda^{-1}\right)\sin(w_2\log\mu'-\chi).$$

Hier sei $0 < w_2\log\mu'+\chi < \pi$, $-\pi < w_2\log\mu'-\chi < 0$, d. h.

$$(57)\qquad |w_2|\log\mu' < \min(\chi,\pi-\chi).$$

Dann wird der erste Imaginärteil positiv, der zweite negativ, und die genannten vieldeutigen Funktionen können in der üblichen Weise durch

$$0 < \arg(\mu'^{h+w}\zeta - \mu'^{-h-w}\zeta^{-1}) < \pi, \quad -\pi < \arg\left(\mu'^{h+w}\bar{\zeta} - \mu'^{-h-w}\bar{\zeta}^{-1}\right) < 0$$

festgelegt werden. Das allgemeine Reihenglied in (56) läßt sich für $|s| \leqq C$, $\sigma \geqq 0$ dem Betrage nach durch

$$e^{\pi C}\left(\mu'^{h+w_1}\lambda + \mu'^{-h-w_1}\lambda^{-1}\right)^{-2-\sigma} \sin^{-2-\frac{\sigma}{2}}(w_2 \log\mu' + \chi) \sin^{-\frac{\sigma}{2}}(\chi - w_2 \log\mu')$$

abschätzen. Für $|s| \leqq C$, $-2 < \sigma < 0$ tritt an die Stelle dieses Ausdrucks derjenige, welcher aus ihm entsteht, indem man dort den letzten Faktor

$$\sin^{-\frac{\sigma}{2}}(\chi - w_2 \log\mu')$$

durch 1 ersetzt. Denn man bestätigt, daß

$$\left|\mu'^{h+w}\bar{\zeta} - \mu'^{-h-w}\bar{\zeta}^{-1}\right|^2 \leqq \left(\mu'^{h+w_1}\lambda + \mu'^{-h-w_1}\lambda^{-1}\right)^2.$$

Aus den Abschätzungen folgt die in allen Parametern gleichmäßige absolute Konvergenz der Reihe (56), wenn bei hinreichend kleinem $\alpha_0 > 0$:

$$|w_1| \leqq C, \quad |s| \leqq C, \quad C^{-1} \leqq \lambda \leqq C, \quad |w_2| \log\mu' \leqq \min(\chi, \pi - \chi) - \alpha_0,$$
$$\sigma \geqq -2 + \alpha_0;$$

überdies gilt für reelles w, also für $w_2 = 0$:

$$g(s, \zeta, w) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\mu'^{h+w}\zeta - \mu'^{-h-w}\zeta^{-1})^{-2} \left|\mu'^{h+w}\zeta - \mu'^{-h-w}\zeta^{-1}\right|^{-s}.$$

Insgesamt ergibt sich die Darstellung

$$g(s, \zeta) = g(s, \zeta, 0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n(s, \zeta), \tag{58}$$

$$B_n(s, \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i n w}\, dw}{\left(\mu'^{w}\zeta - \mu'^{-w}\zeta^{-1}\right)^{2+\frac{s}{2}} \left(\mu'^{w}\bar{\zeta} - \mu'^{-w}\bar{\zeta}^{-1}\right)^{\frac{s}{2}}},$$

$$B_n(s, \zeta) = e^{2\pi i n \frac{\log\zeta}{\log\mu'}} K_n(s, \psi) = \tau^{\frac{\pi i n}{\log\mu'}} \bar{u}^{-\frac{\pi i n}{\log\mu'}} K_n(s, \psi), \tag{59}$$

$$K_n(s, \psi) = \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{-2\pi i n w}\, dw}{\left(\mu'^{w} - \mu'^{-w}\right)^{2+\frac{s}{2}} \left(\mu'^{w} e^{-i\psi} - \mu'^{-w} e^{i\psi}\right)^{\frac{s}{2}}} \tag{60}$$

mit $\psi = 2\chi = \vartheta + \omega$, $0 < \psi < 2\pi$; für α kann ein beliebiger Wert von der Gestalt

$$\alpha = w_2 + \frac{\chi}{\log\mu'} = \frac{w_2 \log\mu' + \chi}{\log\mu'}$$

gewählt werden, wo w_2 der Ungleichung (57) genügt. Dies besagt für α:

$$0 < \alpha \log \mu' < \pi, \quad -\pi + \psi < \alpha \log \mu' < \psi,$$
$$\text{d. h.} \quad \max(0, \psi - \pi) < \alpha \log \mu' < \min(\pi, \psi). \tag{61}$$

In der Darstellung (54) tritt $\zeta_{\mathfrak{B}}$ an die Stelle von ζ, also $\vartheta_{\mathfrak{B}}$ an die Stelle von ϑ, in (60) mithin $\psi_{\mathfrak{B}} = \vartheta_{\mathfrak{B}} + \omega$ an die Stelle von ψ. Dabei hat das nach (61) für α zugelassene Intervall eine von $\mathfrak{B}$ unabhängige Mindestlänge. Denn die Gesamtlänge ist nach (61)

$$\frac{1}{\log \mu'} \min\left(\vartheta_{\mathfrak{B}} + \omega,\ 2\pi - (\vartheta_{\mathfrak{B}} + \omega)\right) > \frac{1}{\log \mu'} \min(\omega, \pi - \omega) \quad (\omega = \arg u).$$

Wir bilden unter ständigem Festhalten an der Beziehung $u = \mathsf{H}z$ die Funktion

$$\begin{aligned} \Lambda(s, \tau, u) &= Z(s, \tau, z) \\ &= (\eta_1 \bar{z} + \eta_2)(\eta_1' \bar{z} + \eta_2') |\eta_1 \bar{z} + \eta_2|^{\frac{s}{2}} |\eta_1' \bar{z} + \eta_2'|^{\frac{s}{2}} F(s, \tau, z); \end{aligned} \tag{62}$$

sie gestattet nach (54), (58), (59) für $\sigma > 0$ die Darstellung

$$\begin{aligned} \Lambda(s, \tau, u) &= Z(s, \tau, z) \\ &= \sum_{\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}(\mathsf{H}, \Gamma)} \frac{1}{(\beta_1 \tau + \beta_2)(\beta_1' \tau + \beta_2') |\beta_1 \tau + \beta_2|^{\frac{s}{2}} |\beta_1' \tau + \beta_2'|^{\frac{s}{2}}} \times \\ &\quad \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\mathsf{H}\bar{z})^{-\frac{\pi i n}{\log \mu'}} (\mathsf{B}\tau)^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}} K_n(s, \vartheta_{\mathfrak{B}} + \omega). \end{aligned} \tag{63}$$

Wir untersuchen die Konvergenz dieser Doppelsumme für $\sigma > 0$. Der Nenner im Integranden von (60) liegt nicht unterhalb des Ausdrucks

$$e^{-\pi C}\left(\mu'^{w_1} + \mu'^{-w_1}\right)^{2+\sigma} \sin^{2+\frac{\sigma}{2}}(\alpha \log \mu') \sin^{\frac{\sigma}{2}}(\psi - \alpha \log \mu');$$

hier gilt

$$0 < \alpha \log \mu' < \pi, \quad 0 < \psi - \alpha \log \mu' < \pi,$$

und ψ hat von 0 und von 2π einen positiven Mindestabstand. Wir geben ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ vor und unterscheiden zur Abschätzung von $K_n(s, \psi)$ vier Fälle:

a) $0 < \psi \leqq \pi$, daher $0 < \alpha \log \mu' < \psi$. Wir setzen $\alpha \log \mu' = \varepsilon$ für $n > 0$, $\alpha \log \mu' = \psi - \varepsilon$ für $n < 0$ und erhalten

$$K_n(s, \psi) = O\left(e^{2\pi n \frac{\varepsilon}{\log \mu'}}\right) (n > 0), \quad K_n(s, \psi) = O\left(e^{2\pi n \frac{\psi - \varepsilon}{\log \mu'}}\right) (n < 0). \tag{63 a}$$

b) $\pi \leqq \psi < 2\pi$, daher $\psi - \pi < \alpha \log \mu' < \pi$. Wir setzen $\alpha \log \mu' = \psi - \pi + \varepsilon$ für $n > 0$, $\alpha \log \mu' = \pi - \varepsilon$ für $n < 0$ und erhalten

$$(63\,\text{b}) \quad K_n(s, \psi) = O\left(e^{2\pi n \frac{\psi - \pi + \varepsilon}{\log \mu'}}\right)(n > 0), \quad K_n(s, \psi) = O\left(e^{2\pi n \frac{\pi - \varepsilon}{\log \mu'}}\right)(n < 0).$$

Da überdies $\log \zeta = \log \lambda + i \frac{\psi}{2}$ und

$$\left| e^{2\pi i n \frac{\log \xi}{\log \mu'}} \right| = e^{-\pi n \frac{\psi}{\log \mu'}},$$

so entstehen die Abschätzungen

$$\begin{aligned} B_n(s, \zeta) &= O\left(e^{\frac{\pi n}{\log \mu'}(2\varepsilon - \psi)}\right)(n > 0), \\ B_n(s, \zeta) &= O\left(e^{\frac{\pi n}{\log \mu'}(\psi - 2\varepsilon)}\right)(n < 0) \end{aligned} \qquad (0 < \psi \leqq \pi),$$

$$\begin{aligned} B_n(s, \zeta) &= O\left(e^{\frac{\pi n}{\log \mu'}(\psi - 2\pi + 2\varepsilon)}\right)(n > 0), \\ B_n(s, \zeta) &= O\left(e^{\frac{\pi n}{\log \mu'}(2\pi - \psi - 2\varepsilon)}\right)(n < 0) \end{aligned} \qquad (\pi \leqq \psi < 2\pi).$$

Sie gelten bei festem $\varepsilon > 0$ gleichmäßig für $|s| \leqq C$, $\sigma \geqq 0$, alle τ in der oberen Halbebene und $u \subset \mathfrak{H}$. Daraus folgt die gleichmäßige absolute Konvergenz der inneren Summe auf der rechten Seite von (63) und vermöge der Konvergenzsätze über hyperbolische Quersummen aus (G V), § 2 auch die der vollen Summe in (63); hierzu reicht insgesamt hin, daß

$$\tau \subset \mathfrak{k}, \; z \subset \mathfrak{k}, \; \sigma \geqq \alpha_0 (\alpha_0 > 0).$$

2. Integraldarstellungen von gewissen, den hyperbolischen verwandten Quersummen.

Wir bilden nunmehr die Funktion

$$(64) \qquad Y(s, \tau, u, n) = \frac{1}{2 \log \mu'} \int_{\xi=1}^{\mu'^2} \Lambda(s, \tau, \xi u)\, (\xi \bar{u})^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}} \frac{d\xi}{\xi} \quad (1 \leqq \xi \leqq \mu'^2).$$

Nach der letzten Aussage in Satz 1 und (62) stellt $\Lambda(s, \tau, u)$ eine stetige Funktion von s, τ und u dar, wenn $\sigma > -\frac{1}{3}$, $\tau \subset \mathfrak{H}$, $u \subset \mathfrak{H}$. Das gleiche gilt

mithin von $Y(s, \tau, u, n)$. Insbesondere aber ist $Y(s, \tau, u, n)$ für $\tau \subset \mathfrak{H}$, $u \subset \mathfrak{H}$ eine analytische Funktion von s im Gebiete $\sigma > -\frac{1}{3}$. Aus (63) folgt

$$(65)\quad Y(s, \tau, u, n) = \sum_{B \subset \mathfrak{S}(H,\Gamma)} \frac{(B\tau)^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}}}{(\beta_1\tau+\beta_2)(\beta_1'\tau+\beta_2')|\beta_1\tau+\beta_2|^{\frac{s}{2}}|\beta_1'\tau+\beta_2'|^{\frac{s}{2}}} K_n(s, \vartheta_B + \omega).$$

Es liegt nach Satz 2 nahe zu vermuten, daß der Nullwert $Y(0, \tau, u, n)$ dieser Funktion Y von u nicht abhängt und eine ganze Spitzenform $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ in der Variablen τ darstellt. Diese Vermutung trifft, wie wir sogleich beweisen werden, zu; darüber hinaus werden wir das Skalarprodukt einer ganzen Spitzenform $\varphi(\tau)$ der Klasse $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ mit dem Nullwert $Y(0, \tau, u, n)$ bestimmen.

Man hat nach (48) (vgl. Satz 2)

$$(66)\quad F(0, \tau, z) = -\frac{4\pi^2}{N^2}\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, e^{-2\pi i \nu \frac{\bar{z}}{N}} G_{-2}(0; \tau, \tau_0, I, N, \nu)$$

ferner

$$(\eta_1\bar{z}+\eta_2)(\eta_1' z+\eta_2') = \bar{u}(-\eta_1'\bar{u}+\eta_1)^{-2},$$

mithin nach (62), (63)

$$Y(0, \tau, u, n) = -\frac{2\pi^2}{N^2 \log \mu'} \int_{\xi=1}^{u'^2} \Big\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} (-\eta_1'\xi\bar{u}+\eta_1)^{-2} e^{-2\pi i \nu \frac{H^{-1}(\xi\bar{u})}{N}} \times$$

$$\times (\xi\bar{u})^{\nu} G_{-2}(0; \tau, \tau_0, I, N, \nu)(\xi\bar{u})^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}} \Big\} \frac{d\xi}{\xi},$$

$$(67)\quad Y(0, \tau, u, n) = -\frac{2\pi^2}{N^2 \log \mu'} \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu(\bar{u})\, \nu\, G_{-2}(0; \tau, \tau_0, I, N, \nu),$$

$$p_\nu(\bar{u}) = \int_{\xi=1}^{u'^2} (-\eta_1'\xi\bar{u}+\eta_1)^{-2} e^{-2\pi i \nu \frac{H^{-1}(\xi\bar{u})}{N}} (\xi\bar{u})^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}} \bar{u}\, d\xi$$

$$= \int_{\bar{u}}^{u'^2\bar{u}} (-\eta_1' v+\eta_1)^{-2} e^{-2\pi i \nu \frac{H^{-1}v}{N}} v^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}} dv,$$

$$p_\nu(\bar{u}) = \int_{\bar{z}}^{H\bar{z}} e^{-2\pi i \nu \frac{w}{N}} (Hw)^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}} dw \qquad (H = H^{-1} D_{\mu'} H).$$

Die in (J III), Satz 8 angegebene Abschätzung $|G_{-2}(0; \tau, \tau_0, I, N, \nu)| \leqq \text{Const}\, \nu$ $(\tau \subset \mathfrak{k})$ ermöglicht die Vertauschung von Summe und Integral

und bewirkt die gleichmäßige absolute Konvergenz der Darstellung (67) für $\tau \subset \mathfrak{k}, z \subset \mathfrak{k}$. Damit ist zunächst $Y(0, \tau, u, n)$ als ganze Spitzenform $\{\Gamma(N), -2,1\}$ erkannt.

Es sei $\varphi(\tau)$ eine ganze Spitzenform $\{\Gamma(N), -2, 1\}$, und es seien die Entwicklungen von $\varphi(\tau)$ nach den Ortsvariablen des parabolischen Fixpunktes ∞ und des hyperbolischen Fixpunktepaares η, η' durch

$$(68) \qquad \varphi(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m(I)\, e^{2\pi i m \frac{\tau}{N}}$$

$$= (\eta_1\tau + \eta_2)^{-1}(\eta_1'\tau + \eta_2')^{-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m(\mathsf{H})\,(\mathsf{H}\tau)^{\frac{\pi i m}{\log \mu'}}$$

gegeben. Nach der Grundformel (J III), (115) und (J III), Satz 13 ergibt sich

$$(\varphi(\tau), Y(0, \tau, u, n)) = -\frac{2\pi^2}{N^2 \log \mu'} \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{p_\nu(u)}\, \nu\, \frac{N^2}{2\pi}\, b_\nu \nu^{-1} \quad (b_\nu = b_\nu(I))$$

$$= -\frac{\pi}{\log \mu'} \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \overline{p_\nu(u)}$$

$$= -\frac{\pi}{\log \mu'} \int_z^{Hz} \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu e^{2\pi i \nu \frac{w}{N}} (\mathsf{H}w)^{-\frac{\pi i n}{\log \mu'}}\, dw$$

$$= -\frac{\pi}{\log \mu'} \int_z^{Hz} \varphi(\tau)\,(\mathsf{H}\tau)^{-\frac{\pi i n}{\log \mu'}}\, d\tau.$$

Die gleichmäßige absolute Konvergenz der unendlichen Reihe in der zweiten sowie die Vertauschbarkeit von Summe und Integral beim Übergang von der zweiten zur dritten dieser vier Gleichungen entnimmt man (J III), Satz 11. Nun wird mit $\tau' = \mathsf{H}\tau$, $v = \log \tau'$:

$$\varphi(\tau) = (\eta_1'\tau + \eta_2')^{-2}(\mathsf{H}\tau)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m(\mathsf{H})\,(\mathsf{H}\tau)^{\frac{\pi i m}{\log \mu'}},$$

$$(\varphi(\tau), Y(0, \tau, u, n)) = -\frac{\pi}{\log \mu'} \int_{\tau'=u}^{\mu'^2 u} \tau'^{-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m(\mathsf{H})\, \tau'^{\pi i \frac{m-n}{\log \mu'}}\, d\tau'$$

$$= -\frac{\pi}{\log \mu'} \int_{\log u}^{\log u + 2\log \mu'} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m(\mathsf{H})\, e^{\pi i \frac{m-n}{\log \mu'} v}\, dv,$$

$$(69) \qquad (\varphi(\tau), Y(0, \tau, u, n)) = -2\pi b_n(\mathsf{H}).$$

Zur Deutung dieser Formel berücksichtigen wir, daß eine ganze Spitzenform $Y(\tau) \subset \{\Gamma, -2, 1\}$ durch die Werte ihrer Skalarprodukte $(\varphi(\tau), Y(\tau))$

mit den sämtlichen ganzen Spitzenformen $\varphi(\tau) \subset \{\Gamma, -2, 1\}$ eindeutig bestimmt ist. Wir erkennen hieraus beim Vergleich von (69) mit der Grundformel (J IV), (27), daß die Funktion $Y(0, \tau, u, n)$, abgesehen von ihrer formalen Darstellung (65), auch hinsichtlich ihrer metrischen Eigenschaften das Verhalten einer hyperbolischen Quersumme zeigt — sofern man von einer solchen sprechen kann. Ferner erkennen wir, daß $Y(0, \tau, u, n)$ in der Tat von u nicht abhängt.

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen:

Satz 3. *Die durch* (65) *erklärte Funktion* $Y(s, \tau, u, n)$ $(u = \mathsf{H}z)$ *ist für die* τ *und* z *in der oberen Halbebene und die* s *mit* $\sigma > -\frac{1}{3}$ *stetig in* s, τ, z *und regulär-analytisch in* s. *Ihr Nullwert* $Y(0, \tau, u, n)$ *hängt von* z *nicht ab und stellt als Funktion von* τ *eine ganze Spitzenform* $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ *dar. Es gibt eine positive, nur von* n *abhängige Konstante* k_n *von folgender Eigenschaft: Das metrische Verhalten des Nullwertes* $\frac{1}{k_n} Y(0, \tau, u, n)$ *steht in genauer Analogie zu dem der hyperbolischen Quersummen von der Dimension* $-r < -2$.

Die in Satz 3 angedeutete Metrisierungsformel hat die Gestalt (J IV) (27). In ihr tritt $\frac{1}{k_n} Y(0, \tau, u, n)$ an die Stelle von $\Xi_{-r}(\tau, v, \mathsf{A}, \Gamma, n)$, H an die Stelle von A, 2 an die Stelle von r, 1 an die Stelle aller v-Werte. Die Konstante $\varepsilon_2(n, \mu')$ bestimmt sich aus (J IV) (26a) durch Einsetzen von $r = 2$. Danach und nach (102) erweist sich k_n als der von ψ unabhängige Nullwert $K_n(0, \psi)$.

Die in der Darstellung (65) bei dem einzelnen Reihenglied auftretenden Faktoren $K_n(s, \vartheta_\mathfrak{B} + \omega)$ setzen nun, wie man durch eingehende Untersuchung erkennt, einer direkten Behandlung der Funktionen $Y(s, \tau, u, n)$ große Schwierigkeiten entgegen. Die Tatsache ferner, daß wir in dem Nullwert $\frac{1}{k_n} Y(0, \tau, u, n)$ eine ganze Spitzenform $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ gewonnen haben, deren metrisches Verhalten dem der hyperbolischen Quersummen $\Xi_{-r}(\tau, v, \mathsf{H}, \Gamma, n)$ für $r > 2$ genau entspricht, kann allein für sich nicht als erheblicher Fortschritt angesehen werden. Denn nach dem Beweise von (J III), Satz 22 läßt sich mit rein algebraischen Methoden eine ganze Spitzenform $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ konstruieren, welche eben dieses durch (69) beschriebene metrische Verhalten der Funktion $Y(0, \tau, u, n)$ aufweist; der so entstehende Existenzbeweis für eine ganze Spitzenform $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ dieses Verhaltens beruht auf der Metrisierung der Abelschen Differentiale erster Gattung als analytischer Grundlage. Bei dem Standpunkt, den wir in der vorliegenden Untersuchung einnehmen, und im Hinblick auf ihre Anwendungen können wir dem Nullwert $Y(0, \tau, u, n)$ nur vermöge seiner Beziehungen zu Quersummen von hyperbolischem Typus eine Bedeutung beimessen, vorausgesetzt, daß diese Quersummen sich einer weiteren Behandlung als zugänglich erweisen. Wir

gehen daher im folgenden darauf aus, zu zeigen, daß die Nullwerte derjenigen Funktionen von s, deren Reihendarstellung für $\sigma > 0$ aus (65) entstehen, indem man überall $K_n(s, \vartheta_{\mathfrak{B}} + \omega)$ durch k_n ersetzt, gleichfalls das durch (69) beschriebene metrische Verhalten aufweisen.

Bevor dies im folgenden Paragraphen durchgeführt wird, soll in diesem § 3 zum Schluß noch ein zweiter Beweis dafür dargestellt werden, daß der Nullwert $Y(0, \tau, u, n)$ von u nicht abhängt.

Die durch (J III), (128), (116) erklärte Funktion $\Omega(\tau, z, 0, I)$ hängt mit $F(0, \tau, z)$ nach (66) vermöge der Beziehung

$$F(0, \tau, z) = -\frac{4\pi^2}{N^2}\,\Omega(\tau, -\bar{z}, 0, I)$$

zusammen. (J III), (132) besagt im vorliegenden Falle:

$$\overline{\Omega(\tau, -\bar{z}, 0, I)} = \Omega(z, -\bar{\tau}, 0, I),$$

also

$$\overline{F(0, \tau, z)} = F(0, z, \tau); \tag{70}$$

dies gibt

$$\Lambda(0, \tau, u) = \overline{(\eta_1 z + \eta_2)(\eta_1' z + \eta_2')\, F(0, z, \tau)}.$$

Als automorphe Form $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ in der Variablen z gestattet $F(0, z, \tau)$ eine Entwicklung von der Gestalt

$$(\eta_1 z + \eta_2)(\eta_1' z + \eta_2')\, F(0, z, \tau) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m (\mathsf{H} z)^{\frac{\pi i m}{\log u'}},$$

in der $\gamma_m = \gamma_m(\tau)$ von τ, nicht aber von z abhängt. Daraus folgt

$$Y(0, \tau, u, n) = \frac{1}{2 \log \mu'} \int_1^{u'^2} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \overline{\gamma_m}\, \bar{u}^{-\frac{\pi i m}{\log \mu'}}\, \xi^{\frac{\pi i (n-m)}{\log u'}} \right) u^{\frac{\pi i n}{\log u'}} \frac{d\xi}{\xi},$$

$$Y(0, \tau, u, n) = \overline{\gamma_n(\tau)}. \tag{71}$$

§ 4.

1. Erste Approximation von $Y(s, \tau, u, n)$.

Wir setzen für komplexes w und reelles ψ:

$$p(w, \psi) = \mu'^{w} e^{-i\psi} - \mu'^{-w} e^{i\psi},$$

so daß

$$K_n(s, \psi) = \int_{i\alpha - \infty}^{i\alpha + \infty} \frac{e^{-2\pi i n w}}{p(w, 0)^{2 + \frac{s}{2}}\; p(w, \psi)^{\frac{s}{2}}}\, dw,$$

$$\max(0, \psi - \pi) < \alpha \log \mu' < \min(\psi, \pi). \tag{72}$$

In der Reihendarstellung (65) für $Y(s, \tau, u, n)$ tritt $K_n(s, \psi)$ mit $\psi = \vartheta_{\mathsf{B}} + \omega$ auf. Wenn $\tau \subset \mathfrak{k}$ und B das System $\mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)$ durchläuft, so strebt $\left|\arg \mathsf{B}\tau - \frac{\pi}{2}\right|$ gleichmäßig gegen $\frac{\pi}{2}$, d. h. die sämtlichen $\mathsf{B} \subset \mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)$ lassen sich auf zwei Folgen $\mathsf{B}_k^{(1)}, \mathsf{B}_k^{(2)}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ disjunktiv und vollständig so verteilen, daß gleichmäßig für $\tau \subset \mathfrak{k}$

$$\lim_{k \to +\infty} \arg \mathsf{B}_k^{(1)} \tau = 0, \quad \lim_{k \to +\infty} \arg \mathsf{B}_k^{(2)} \tau = \pi.$$

[Zum Beweise vgl. (G V), § 2.]

Wir untersuchen das Verhalten von $K_n(s, \omega + \vartheta)$ bei festem ω, wenn ϑ gegen 0 oder π strebt; dabei wird $0 < \alpha_0 \leqq \omega \leqq \pi - \alpha_0 < \pi$ für festes, hinreichend kleines $\alpha_0 > 0$ vorausgesetzt. Für festes, hinreichend kleines $\varepsilon_0 > 0$ mit $0 < \varepsilon_0 < \frac{\alpha_0}{2}$ sei zunächst $0 < \vartheta < \varepsilon_0$ oder $\pi - \varepsilon_0 < \vartheta < \pi$. Dann gilt nach (72)

$$0 < \alpha \log \mu' < \omega + \vartheta \quad (0 < \vartheta < \varepsilon_0),$$
$$\omega + \vartheta - \pi < \alpha \log \mu' < \pi \quad (\pi - \varepsilon_0 < \vartheta < \pi). \tag{73}$$

Nun bestehen die Identitäten

$$p(w, \omega + \vartheta) = p(w, \omega)\left\{1 + \frac{\mu'^{w} e^{-i\omega}}{p(w, \omega)}(e^{-i\vartheta} - 1) - \frac{\mu'^{-w} e^{i\omega}}{p(w, \omega)}(e^{i\vartheta} - 1)\right\}$$
$$(0 < \vartheta < \varepsilon_0),$$

$$p(w, \omega + \vartheta)$$
$$= p(w, \omega + \pi)\left\{1 + \frac{\mu'^{w} e^{-i\omega}}{p(w, \omega)}(e^{i\vartheta'} - 1) - \frac{\mu'^{-w} e^{i\omega}}{p(w, \omega)}(e^{-i\vartheta'} - 1)\right\}.$$
$$(0 < \vartheta' = \pi - \vartheta < \varepsilon_0).$$

Wir schreiben $\delta_\vartheta = 0$, wenn $0 < \vartheta < \varepsilon_0$, $\delta_\vartheta = 1$, wenn $\pi - \varepsilon_0 < \vartheta < \pi$, und setzen in beiden Fällen

$$p(w, \omega + \vartheta) = p(w, \omega + \pi\delta_\vartheta)(1 + \lambda^*), \quad \lambda^* = \lambda^*(w, \omega, \vartheta), \tag{74}$$

$$\lambda^* = \frac{\mu'^{w} e^{-i\omega}}{p(w, \omega)}\left\{\begin{matrix} e^{-i\vartheta} - 1 \\ e^{i\vartheta'} - 1 \end{matrix}\right\} - \frac{\mu'^{-w} e^{i\omega}}{p(w, \omega)}\left\{\begin{matrix} e^{i\vartheta} - 1 \\ e^{-i\vartheta'} - 1 \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} 0 < \vartheta < \varepsilon_0 \\ \pi - \varepsilon_0 < \vartheta < \pi \end{matrix}\right\}.$$

Bei der Integration auf der Geraden $w = w_1 + i\alpha$ (w_1 reell), wo α nach (73) gemäß

$$0 < \alpha \log \mu' < \omega \ (0 < \vartheta < \varepsilon_0), \quad \omega < \alpha \log \mu' < \pi \ (\pi - \varepsilon_0 < \vartheta < \pi) \tag{75}$$

fest gewählt werde, gilt für die Faktoren Φ der geschweiften Klammern in (74) die Abschätzung

$$|\Phi| \leqq \frac{1}{\sin|\alpha \log \mu' - \omega|}.$$

Es sei $\varepsilon_0 \leqq \log 2$, ϑ^* die gemeinsame Bezeichnung für ϑ und ϑ'. Es ergibt sich

$$(76) \qquad |\lambda^*(w,\omega,\vartheta)| \leqq \frac{4}{\sin|\alpha\log\mu'-\omega|}\vartheta^* < \frac{4\varepsilon_0}{\sin|\alpha\log\mu'-\omega|},$$

und daher, wenn $(1+\lambda^*)^{-\frac{s}{2}}$ als Hauptwert bestimmt wird,

$$p(w,\omega+\vartheta)^{-\frac{s}{2}} = p(w,\omega+\pi\delta_\vartheta)^{-\frac{s}{2}} + p(w,\omega+\pi\delta_\vartheta)^{-\frac{s}{2}}\left\{(1+\lambda^*)^{-\frac{s}{2}}-1\right\},$$

$$(77) \qquad K_n(s,\omega+\vartheta) = K_n(s,\omega+\pi\delta_\vartheta) + R_n(s,\omega,\vartheta),$$

$$R_n(s,\omega,\vartheta) = \int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \frac{e^{-2\pi i n w}\left\{(1+\lambda^*)^{-\frac{s}{2}}-1\right\}}{p(w,0)^{2+\frac{s}{2}}\, p(w,\omega+\pi\delta_\vartheta)^{\frac{s}{2}}}\, dw.$$

Hier werde ε_0 zu gegebenem α so gewählt, daß

$$(78) \qquad \frac{4\varepsilon_0}{\sin|\alpha\log\mu'-\omega|} < \frac{1}{2}.$$

Mit $\left|\frac{s}{2}\right| \leqq \frac{C}{2} = \mu$ findet man dann durch eine in § 2, 3 benutzte Umformung

$$(79) \qquad \left|(1+\lambda^*)^{-\frac{s}{2}}-1\right| \leqq |\lambda^*|\, 2^{\frac{C}{2}+1} = C_7|\lambda^*|.$$

Ferner erweist sich nach dem Vorgehen des § 3, 1 $K_n(s,\omega+\pi\delta_\vartheta)$ bei festem n und für $\sigma \geqq 0$, $|s| \leqq C$, $\alpha_0 \leqq \omega \leqq \pi-\alpha_0$ als beschränkt. Ebenso ergibt sich nach (76), (78), (79) für $\sigma \geqq 0$ durch passende Wahl von α die Abschätzung

$$(80) \qquad |R_n(s,\omega,\vartheta)| \leqq C_8(n,C,\alpha_0,\varepsilon_0)\,\vartheta^*.$$

Für $\sigma < 0$ benutzen wir die Ungleichung $|p(w,\psi)|^2 \leqq (\mu'^{w_1}+\mu^{-w_1})^2$, infolge deren der Integrand von $R_n(s,\omega,\vartheta)$ dem Betrage nach durch

$$e^{\pi C+2\pi n\alpha} C_9(\alpha_0,\varepsilon_0)\,\vartheta^*\left(\mu'^{w_1}+\mu'^{-w_1}\right)^{-2-\sigma}\sin^{-2-\frac{\sigma}{2}}(\alpha\log\mu')$$

abgeschätzt werden kann. Deshalb gilt (80) allgemein, sobald

n ganz und fest, $|s| \leqq C, \sigma \geqq -2+\alpha_0, \alpha_0 \leqq \omega \leqq \pi-\alpha_0, 0 < \vartheta^* < \varepsilon_0$.

Schließlich bemerkt man auch, daß (80) zutrifft, falls $\varepsilon_0 \leqq \vartheta \leqq \pi-\varepsilon_0$ an Stelle der letzten dieser Ungleichungen $(0 < \vartheta^* < \varepsilon_0)$ vorausgesetzt

wird. Dabei erklärt man zweckmäßig $R_n(s, \omega, \vartheta)$ nach (77) als Differenz zweier K_n-Funktionen und setzt

$$\vartheta^* = \vartheta, \delta_\vartheta = 0 \left(0 < \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}\right), \qquad \vartheta^* = \pi - \vartheta, \delta_\vartheta = 1 \left(\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi\right).$$

Zum Beweise zeigen wir allgemein, daß $K_n(s, \psi)$ für festes n, $|s| \leqq C$, $\sigma \geqq -2 + \alpha_0$ und $\alpha_0 \leqq \psi \leqq 2\pi - \alpha_0$ beschränkt ist. Bei der Abschätzung des Integranden erscheinen im Nenner die Sinus von $\alpha \log \mu'$ und von $\psi - \alpha \log \mu'$. Nun wird

$$0 < \alpha \log \mu' < \psi, \qquad 0 < \psi - \alpha \log \mu' < \psi \ (\alpha_0 \leqq \psi \leqq \pi),$$
$$\psi - \pi < \alpha \log \mu' < \pi, \quad \psi - \pi < \psi - \alpha \log \mu' < \pi \ (\pi \leqq \psi \leqq 2\pi - \alpha_0).$$

In beiden Fällen wähle man $\alpha \log \mu' = \frac{\psi}{2}$, so daß $\psi - \alpha \log \mu' = \frac{\psi}{2}$ und

$$\frac{\alpha_0}{2} \leqq \frac{\psi}{2} \leqq \frac{\pi}{2} \ (\alpha_0 \leqq \psi \leqq \pi), \qquad \frac{\pi}{2} \leqq \frac{\psi}{2} \leqq \pi - \frac{\alpha_0}{2} \ (\pi \leqq \psi \leqq 2\pi - \alpha_0).$$

Daraus folgt die Behauptung: Es gilt unter den n, s, ω oben auferlegten Bedingungen (also ohne eine Einschränkung bezüglich ϑ):

$$|R_n(s, \omega, \vartheta)| \leqq C_{10}(n, C, \alpha_0)\, \vartheta^*. \tag{80a}$$

Das mit $\mathsf{B} \subset \mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)$ gebildete Reihenglied von $Y(s, \tau, u, n)$ enthält $K_n(s, \omega + \vartheta)$ mit $\vartheta = \vartheta_\mathsf{B} = \arg \mathsf{B}\tau$. Wir schreiben wie früher $\vartheta_\mathsf{B} = \vartheta_\mathsf{B}(\tau) = \arg \mathsf{B}\tau$, ferner

$$\vartheta^*_\mathsf{B} = \vartheta^*_\mathsf{B}(\tau) = \vartheta_\mathsf{B} \left(0 < \vartheta_\mathsf{B} \leqq \frac{\pi}{2}\right), \qquad \vartheta^*_\mathsf{B} = \vartheta^*_\mathsf{B}(\tau) = \pi - \vartheta_\mathsf{B} \left(\frac{\pi}{2} \leqq \vartheta_\mathsf{B} < \pi\right),$$
$$\delta_\mathsf{B}(\tau) = 0 \left(0 < \vartheta_\mathsf{B} \leqq \frac{\pi}{2}\right), \qquad \delta_\mathsf{B}(\tau) = 1 \ \left(\frac{\pi}{2} < \vartheta_\mathsf{B}(\tau) < \pi\right)$$

und erhalten, wenn $0 < \arc\sin v \leqq \frac{\pi}{2}$ für $0 < v \leqq 1$ vorgeschrieben wird,

$$\vartheta^*_\mathsf{B}(\tau) = \arc\sin \frac{\Im \mathsf{B}\tau}{|\mathsf{B}\tau|} \leqq \frac{\pi}{2} \frac{\Im \mathsf{B}\tau}{|\mathsf{B}\tau|} = \frac{\pi}{2} \frac{y}{|\beta_1 \tau + \beta_2|\,|\beta'_1 \tau + \beta'_2|}. \tag{81}$$

Die mit $\mathsf{B} \subset \mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)$ ausgeführte Zerlegung

$$K_n(s, \omega + \vartheta_\mathsf{B}(\tau)) = K_n(s, \omega + \pi\, \delta_\mathsf{B}(\tau)) + R_n(s, \omega, \vartheta_\mathsf{B}(\tau))$$

hat den Nachteil, daß beide Summanden auf der rechten Seite wegen des Bedeutungswechsels von $\delta_\mathsf{B}(\tau)$ unstetige Funktionen von τ sind. Aus diesem Grunde setzen wir

$$\delta^0_\mathsf{B} = \delta_\mathsf{B}(\tau^0)$$

für den in § 1 zuerst genannten festen Punkt $\tau = \tau^0$ und zerlegen die Funktion $K_n(s, \omega + \vartheta_{\mathsf{B}}(\tau))$ gemäß

$$K_n(s, \omega + \vartheta_{\mathsf{B}}(\tau)) = K_n(s, \omega + \pi\,\delta_{\mathsf{B}}^0) + S_n(s, \omega, \mathsf{B}, \tau),$$

(77a)
$$S_n(s, \omega, \mathsf{B}, \tau) = K_n(s, \omega + \pi\,\delta_{\mathsf{B}}(\tau)) - K_n(s, \omega + \pi\,\delta_{\mathsf{B}}^0) + R_n(s, \omega, \vartheta_{\mathsf{B}}(\tau)).$$

Es sei

(82) n ganz und fest, $|s| \leqq C$, $\sigma \geqq -2 + \alpha_0$,
$\tau \subset \mathfrak{k}$, $\alpha_0 \leqq \omega \leqq \pi - \alpha_0$, $\mathsf{B} \subset \mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)$.

Dann gibt es eine endliche, von $\mathfrak{k}$ abhängige Teilmenge $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)$ derart, daß

$$\delta_{\mathsf{B}}(\tau) = \delta_{\mathsf{B}}^0 \quad \text{für} \quad \mathsf{B} \subset \mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma) - \mathfrak{E},\ \tau \subset \mathfrak{k},$$

und daß mithin nach (80a)

(80b) $$|S_n(s, \omega, \mathsf{B}, \tau)| = |R_n(s, \omega, \vartheta_{\mathsf{B}}(\tau))| \leqq C_{10}(n, C, \alpha_0)\,\vartheta_{\mathsf{B}}^*(\tau).$$

Für $\mathsf{B} \subset \mathfrak{E}$, $\tau \subset \mathfrak{k}$ hat die Menge der $\vartheta_{\mathsf{B}}^*(\tau)$ eine positive untere Schranke, und deshalb gilt (80b) bei passender Wahl von C_{10} unter den Bedingungen (82) allgemein. In (77a) aber sind $K_n\left(s, \omega + \pi\,\delta_{\mathsf{B}}^0\right)$ (als von τ nicht abhängige Funktion) und $S_n(s, \omega, \mathsf{B}, \tau)$ stetige Funktionen der sämtlichen Variablen s, ω, τ und für $\sigma > -2$ analytische Funktionen von s.

Nach diesen Vorbereitungen bilden wir die Reihen

(83)
$$X(s, \tau, \omega, n) = \sum_{\mathsf{B} \subset \mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)} \frac{(\mathsf{B}\tau)^{\frac{\pi i n}{\log u'}}}{(\beta_1\tau + \beta_2)(\beta_1'\tau + \beta_2')\,|\beta_1\tau + \beta_2|^{\frac{s}{2}}\,|\beta_1'\tau + \beta_2'|^{\frac{s}{2}}} K_n(s, \omega + \pi\,\delta_{\mathsf{B}}^0),$$

(84)
$$V(s, \tau, \omega, n) = \sum_{\mathsf{B} \subset \mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)} \frac{(\mathsf{B}\tau)^{\frac{\pi i n}{\log u'}}}{(\beta_1\tau + \beta_2)(\beta_1'\tau + \beta_2')\,|\beta_1\tau + \beta_2|^{\frac{s}{2}}\,|\beta_1'\tau + \beta_2'|^{\frac{s}{2}}} S_n(s, \omega, \mathsf{B}, \tau)$$

mit der Summe

(85) $$Y(s, \tau, u, n) = X(s, \tau, \omega, n) + V(s, \tau, \omega, n) \quad (\omega = \arg u).$$

Aus (80b) und (81) folgt, daß die Reihe $V(s, \tau, \omega, n)$ für $|s| \leqq C, \sigma \geqq -2 + \alpha_0$, $\tau \subset \mathfrak{k}$ und $\alpha_0 \leqq \omega \leqq \pi - \alpha_0$ gleichmäßig konvergiert. Sie stellt daher für alle τ in der oberen Halbebene, alle ω mit $0 < \omega < \pi$ und alle s mit $\sigma > -2$ eine stetige Funktion von s, τ, ω dar, die sich als Funktion von s im Gebiete

$\sigma > -2$ regulär-analytisch verhält. Für $s = 0$ verschwindet sie identisch in τ und ω, weil $K_n(0, \psi$ von ψ nicht abhängt, und daher $S_n(0, \omega, \mathfrak{B}, \tau)$ identisch verschwindet.

Mithin haben wir erkannt

Satz 4. *Die durch* (83) *erklärte Funktion* $X(s, \tau, \omega, n)$ *ist für alle* τ *in der oberen Halbebene, alle* ω *zwischen* 0 *und* π *und alle* s *mit* $\sigma > -\frac{1}{3}$ *in den Variablen* s, τ, ω *stetig und als Funktion von* s *regulär-analytisch. Ihr Nullwert* $X(0, \tau, \omega, n)$ *stimmt mit* $Y(0, \tau, u, n)$ *für* $\omega = \arg u$ *überein, hängt daher von* ω *nicht ab und stellt eine ganze Spitzenform* $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ *von den in Satz* 3 *genannten Eigenschaften dar.*

2. Zweite Approximation von $Y(s, \tau, u, n)$.

Wir beweisen zunächst die Formel

$$K_{-n}(s, 2\pi - \psi) = e^{-\frac{2\pi^2 n}{\log \mu'}} K_n(s, \psi) \quad (0 < \psi < 2\pi). \tag{86}$$

In dem Integral

$$K_{-n}(s, 2\pi - \psi) = \int_{i\alpha - \infty}^{i\alpha + \infty} \frac{e^{2\pi i n w}\, dw}{(\mu'^{w} - \mu'^{-w})^{2 + \frac{s}{2}} (\mu'^{w} e^{i\psi} - \mu'^{-w} e^{-i\psi})^{\frac{s}{2}}}$$

mit

$$\max(0, \pi - \psi) < \alpha \log \mu' < \min(2\pi - \psi, \pi)$$

substituiere man $w = \frac{\pi i}{\log \mu'} - w', w' = -w_1 + i\alpha', \alpha' = \frac{\pi}{\log \mu'} - \alpha$. Dann gilt

$$\max(0, \psi - \pi) < \alpha' \log \mu' < \min(\psi, \pi), \quad \mu'^{w} = -\mu'^{-w'},$$

und daraus folgt die Behauptung.

Die weiteren Untersuchungen richten sich auf die Reihe

$$\Xi(s, \tau, n) = \Xi_2(s, \tau, \mathsf{H}, \Gamma(N), n) \tag{87}$$

$$= \sum_{\mathfrak{B} \subset \mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)} \frac{(\mathfrak{B}\tau)^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}}}{(\beta_1 \tau + \beta_2)(\beta_1' \tau + \beta_2') |\beta_1 \tau + \beta_2|^{\frac{s}{2}} |\beta_1' \tau + \beta_2'|^{\frac{s}{2}}},$$

die für $\tau \subset \mathfrak{k}$, $\sigma \geqq \alpha_0$ $(\alpha_0 > 0)$ gleichmäßig konvergiert und für die τ in der oberen Halbebene eine im Gebiete $\sigma > 0$ reguläre analytische Funktion von s darstellt. Unser Ziel besteht in der analytischen Fortsetzung dieser Funktion von s in eine volle Umgebung des Punktes $s = 0$ und in dem Nachweis, daß der so erklärte Nullwert $\Xi(0, \tau, n)$ eine ganze Spitzenform $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ darstellt, deren metrische Eigenschaften denen der hyperbolischen Quersummen $\{\Gamma, -r, v\}$ im Falle absoluter Konvergenz $(r > 2, |v| = 1)$ genau entsprechen.

Wir zeigen zunächst, wie man dieses Ziel für $n = 0$ nunmehr schnell erreicht. Wir bilden für ein beliebiges ω mit $0 < \omega < \pi$ die Funktion

$$(88)\quad W(s,\tau,\omega,0) = X(s,\tau,\omega,0) + X(s,\tau,\pi-\omega,0)$$
$$= \sum_{\mathfrak{B}\subset\mathfrak{S}(\mathsf{H},\Gamma)} \frac{1}{(\beta_1\tau+\beta_2)(\beta_1'\tau+\beta_2')\,|\beta_1\tau+\beta_2|^{\frac{s}{2}}\,|\beta_1'\tau+\beta_2'|^{\frac{s}{2}}} \times$$
$$\times \{K_0(s,\omega+\pi\delta_{\mathfrak{B}}^0) + K_0(s,\pi-\omega+\pi\delta_{\mathfrak{B}}^0)\}.$$

Nach (86) gilt ($n = 0$):

$$K_0(s,\omega+\pi) + K_0(s,2\pi-\omega) = K_0(s,\omega) + K_0(s,\pi-\omega),$$

was besagt, daß $K_0(s,\omega+\pi\delta_{\mathfrak{B}}^0) + K_0(s,\pi-\omega+\pi\delta_{\mathfrak{B}}^0)$ von $\delta_{\mathfrak{B}}^0$ und damit von $\mathfrak{B}$ nicht abhängt. Demgemäß finden wir

$$(89)\qquad W(s,\tau,\omega,0) = \{K_0(s,\omega) + K_0(s,\pi-\omega)\}\,\Xi(s,\tau,0).$$

Hier wollen wir, um die von ω unabhängige Funktion $\Xi(s,\tau,0)$ in der Umgebung des Punktes $s = 0$ zu erklären, $\omega = \frac{\pi}{2}$ setzen. Aus

$$K_0(0,\omega) = \frac{-1}{2\log\mu'} \neq 0 \quad [(15)]$$

folgt $K_0(s,\omega) \neq 0$ für $|s| < \varrho_0$ bei festem ω und hinreichend kleinem $\varrho_0 > 0$. Man erhält also für die τ in der oberen Halbebene und für $|s| < \varrho_0$

$$(90)\qquad \Xi(s,\tau,0) = K_0\left(s,\frac{\pi}{2}\right)^{-1} X\left(s,\tau,\frac{\pi}{2},0\right),$$

insbesondere nach Satz 4

$$(90a)\qquad \Xi(0,\tau,0) = -2\log\mu'\,Y(0,\tau,u,0)$$

und nach (69) in der Bezeichnung (68)

$$(91)\qquad (\varphi(\tau),\ \Xi(0,\tau,0)) = 4\pi\log\mu'\,b_0(\mathsf{H}).$$

Im übrigen hat der Faktor $\varepsilon_r(n,\mu')$ aus (J IV), (26a) hier den Wert

$$(92)\quad \varepsilon_2(n,\mu') = 2\frac{(\log\mu')^2}{\pi n}\left(1 - e^{-\frac{2\pi^2 n}{\log\mu'}}\right)(n \neq 0),\ \varepsilon_2(0,\mu') = 4\pi\log\mu'.$$

Wir formulieren dieses Ergebnis über die Funktion $\Xi(s,\tau,0)$ in dem

Satz 5. *Die durch* (87) *für* $n = 0$ *erklärte Funktion* $\Xi(s,\tau,0)$ *ist für die* τ *in der oberen Halbebene und die* s *mit* $\sigma > 0$ *in den Variabeln* s *und* τ *stetig und in* s *regulär-analytisch. Als Funktion von* s *ist* $\Xi(s,\tau,0)$ *in eine volle Umgebung* $|s| < \varrho_0\,(0 < \varrho_0 < \frac{1}{5})$ *des Punktes* $s = 0$ *regulär-analytisch fortsetzbar*

und hat die oben genannten Eigenschaften für die τ in der oberen Halbebene und die s in der Vereinigung der Gebiete $\sigma > 0$ und $|s| < \varrho_0$. Der Nullwert $\Xi(0, \tau, 0)$ stellt eine ganze Spitzenform $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ dar, deren metrisches Verhalten dem der hyperbolischen Quersummen in den Fällen absoluter Konvergenz genau entspricht.

Der Beweis des analogen Satzes für die Funktionen $\Xi(s, \tau, n)$ bei beliebigem ganzem n erfordert eine etwas umständliche Untersuchung. Wir bilden mit dem in § 1 genannten, fest gewählten Punkt $\tau = \tau^0$ die Reihen

$$W_0(s,\tau,n) = \sum_{\substack{\mathfrak{B}\subset\mathfrak{G}(H,\Gamma)\\ 0<\arg \mathfrak{B}\tau^0 \leqq \frac{\pi}{2}}} \frac{(\mathfrak{B}\tau)^{\frac{\pi i n}{\log\mu'}}}{(\beta_1\tau+\beta_2)(\beta_1'\tau+\beta_2')\,|\beta_1\tau+\beta_2|^{\frac{s}{2}}\,|\beta_1'\tau+\beta_2'|^{\frac{s}{2}}}$$

(93)

$$W_1(s,\tau,n) = \sum_{\substack{\mathfrak{B}\subset\mathfrak{G}(H,\Gamma)\\ \frac{\pi}{2}<\arg \mathfrak{B}\tau^0 <\pi}} \frac{(\mathfrak{B}\tau)^{\frac{\pi i n}{\log\mu'}}}{(\beta_1\tau+\beta_2)(\beta_1'\tau+\beta_2')\,|\beta_1\tau+\beta_2|^{\frac{s}{2}}\,|\beta_1'\tau+\beta_2'|^{\frac{s}{2}}},$$

in denen $\Im\mathfrak{m}\,\tau > 0$, $\sigma = \Re\mathfrak{e}\,s > 0$, n ganz und $\neq 0$. Ersichtlich bestehen die drei Gleichungen

$$\Xi(s,\tau,n) = W_0(s,\tau,n) + W_1(s,\tau,n), \tag{94}$$

$$\begin{aligned} X(s,\tau,\omega,n) &= W_0(s,\tau,n)\,K_n(s,\omega) + W_1(s,\tau,n)\,K_n(s,\pi+\omega),\\ X(s,\tau,\pi-\omega,n) &= W_0(s,\tau,n)K_n(s,\pi-\omega) + W_1(s,\tau,n)K_n(s,2\pi-\omega) \end{aligned} \tag{95}$$

Wir fassen (95) als lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von $W_0(s,\tau,n)$ und von $W_1(s,\tau,n)$ auf. In Betracht kommen dabei die Werte von s in einer Umgebung des Punktes $s = 0$. Die Determinante

$$D_n(s,\omega) = K_n(s,\omega)K_n(s,2\pi-\omega) - K_n(s,\pi+\omega)K_n(s,\pi-\omega)$$

des Gleichungssystems (95) verschwindet für $s = 0$, da $K_n(0,\omega)$ von ω nicht abhängt. Wir zeigen jetzt, daß $D_n(s,\omega)$ wenigstens für einen Wert $\omega = \omega_0$ und für ein gewisses $\varrho_n > 0$ im punktierten Kreise $0 < |s| < \varrho_n$ nicht verschwindet, und darüber hinaus, daß $D_n(s,\omega_0)$ im Punkte $s = 0$ eine Nullstelle von genau erster Ordnung aufweist.

Beim Beweis werden die auftretenden Funktionen $K_n(s,\omega)$ nach s und ω differenziert. Durch einen Akzent kennzeichnen wir die Ableitung nach s, durch einen Stern die Ableitung nach ω. Die mehrfache Differentiation unter dem Integralzeichen ist offenbar statthaft.

Aus (86) folgt

$$D_n(s,\omega) = e^{\frac{2\pi^2 n}{\log \mu'}} \Delta_n(s,\omega),$$

$$\Delta_n(s,\omega) = K_n(s,\omega)K_{-n}(s,\omega) - K_n(s,\pi-\omega)K_{-n}(s,\pi-\omega).$$

Im folgenden wird $\Delta_n(s,\omega)$ untersucht. Wir differenzieren $\Delta_n(s,\omega)$ nach s und setzen im Ergebnis $s=0$. Da $K_n(0,\omega)$ von ω nicht abhängt, schreiben wir $K_n(0,\omega) = K_n(0)$. Man erhält

$$\Delta'(0,\omega) = K_n(0)\left(K'_{-n}(0,\omega) - K'_{-n}(0,\pi-\omega)\right) + \\ + K_{-n}(0)\left(K'_n(0,\omega) - K'_n(0,\pi-\omega)\right)$$

mit

$$(96)\qquad K_n(0) = k_n = \int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \frac{e^{-2\pi i n w}}{\left(\mu'^{w} - \mu'^{-w}\right)^2}\, dw,$$

$$K'_n(0,\omega) = -\frac{1}{2}\int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \frac{e^{-2\pi i n w}}{\left(\mu'^{w} - \mu'^{-w}\right)^2} \log\left(\mu'^{w} e^{-i\omega} - \mu'^{-w} e^{i\omega}\right) dw + c_n,$$

$$c_n = -\frac{1}{2}\int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \frac{e^{-2\pi i n w}}{\left(\mu'^{w} - \mu'^{-w}\right)^2} \log\left(\mu'^{w} - \mu'^{-w}\right) dw,$$

$$\max(0, \omega-\pi) < \alpha \log \mu' < \min(\omega, \pi).$$

Nunmehr berechnen wir $\Delta'^{*}_n\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Man findet

$$K'^{*}_n(0,\omega) = \frac{i}{2}\int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \frac{e^{-2\pi i n w}}{\left(\mu'^{w} - \mu'^{-w}\right)^2} \frac{\mu'^{w} + \mu'^{-w} e^{2i\omega}}{\mu'^{w} - \mu'^{-w} e^{2i\omega}}\, dw,$$

$$(97)\qquad K'^{*}_n\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{i}{2} l_n = \frac{i}{2}\int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \frac{e^{-2\pi i n w}}{\mu'^{2w} - \mu'^{-2w}}\, dw,$$

$$\Delta'^{*}_n\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = i\left(k_n l_{-n} + k_{-n} l_n\right).$$

k_n wird durch (96) mit $0 < \alpha \log \mu' < \pi$, l_n durch (97) mit $0 < \alpha \log \mu' < \frac{\pi}{2}$ erklärt. Wir bringen die beiden Integrale auf die Gestalt

$$k_n = \int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \frac{\mu'^{2w} e^{-2\pi i n w}}{\left(\mu'^{2w} - 1\right)^2}\, dw, \qquad l_n = \int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \frac{\mu'^{2w} e^{-2\pi i n w}}{\mu'^{4w} - 1}\, dw,$$

berechnen die Residuen der Integranden in ihren Polen und erkennen durch höchst einfache Abschätzungen an den Darstellungen (96), (97) folgendes: Bildet man die Integrale mit den Integranden von k_n und l_n, erstreckt über den durch $\mathfrak{Im}\, w \neq \alpha$ bestimmten Teil des Randes der Rechtecke

$$|\mathfrak{Re}\, w| \leqq \xi, \quad \alpha \leqq \mathfrak{Im}\, w \leqq \xi \,(n<0), \quad -\xi \leqq \mathfrak{Im}\, w \leqq \alpha \,(n>0),$$

wo $\xi = \frac{\pi}{2\log\mu'}\left(m+\frac{1}{2}\right)$ mit natürlichem m über alle Grenzen wächst, so streben diese Integrale gegen Null. Daraus folgt nach dem Residuensatz

$$k_n = \frac{-\pi^2 n}{\log^2 \mu'} \frac{1}{1-e^{-\frac{2\pi^2 n}{\log\mu'}}} \quad (n \neq 0), \tag{98}$$

$$il_n = \frac{\pi}{2\log\mu'} \frac{1}{1+e^{-\frac{\pi^2 n}{\log\mu'}}} \quad (n \neq 0). \tag{99}$$

Es ist also stets $k_n < 0$, $il_n > 0$ und $\Delta_n'^{*}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) < 0$.

Diesem Ergebnis entnimmt man zunächst die Existenz eines Wertes $\omega = \omega_0$ in der Nähe von $\frac{\pi}{2}$, für den $\Delta_n'(0, \omega_0) \neq 0$ ausfällt, woraus hervorgeht, daß $\Delta_n(s, \omega_0)$ nicht identisch in s verschwindet. Insbesondere gibt es eine positive Zahl $\varrho_n < \frac{1}{3}$ derart, daß

$$\Delta_n(s, \omega_0) \neq 0 \quad \text{für} \quad 0 < |s| < \varrho_n; \tag{100}$$

$\Delta_n(s, \omega_0)$ hat im Punkte $s = 0$ eine Nullstelle von genau erster Ordnung. Die gleichen Aussagen bestehen wörtlich für $D_n(s, \omega_0)$. Offenbar sind $\Delta_n(s, \omega_0)$ und $D_n(s, \omega_0)$ für $\sigma > -2$ reguläre analytische Funktionen von s.

Aus (94) gewinnt man die Darstellung

$$\begin{aligned} D_n(s, \omega_0)\, W_0(s, \tau, n) &= X(s, \tau, \omega_0, n)\, K_n(s, 2\pi - \omega_0) - \\ &\quad - X(s, \tau, \pi - \omega_0, n)\, K_n(s, \pi + \omega_0), \\ D_n(s, \omega_0)\, W_1(s, \tau, n) &= -X(s, \tau, \omega_0, n)\, K_n(s, \pi - \omega_0) + \\ &\quad + X(s, \tau, \pi - \omega_0, n)\, K_n(s, \omega_0). \end{aligned} \tag{101}$$

Die rechten Seiten beider Gleichungen stellen für die τ in der oberen Halbebene und für die s mit $\sigma > -\frac{1}{3}$ stetige Funktionen von s und τ und regulär-analytische Funktionen von s dar. Nach Satz 4 verschwinden die rechten Seiten für $s = 0$ identisch in τ. Daraus ersieht man:

Für beliebiges festes τ in der oberen Halbebene sind die Funktionen $W_0(s, \tau, n)$ und $W_1(s, \tau, n)$ aus der Halbebene $\sigma > 0$ in die Umgebung $|s| < \varrho_n$ des Punktes $s = 0$ regulär-analytisch fortsetzbar.

Wesentlich mehr erfährt man über die Funktion $\Xi(s, \tau, n)$. Es sei

$$J_1(s) = K_n(s, 2\pi - \omega_0) - K_n(s, \pi - \omega_0),\ J_0(s) = K_n(s, \omega_0) - K_n(s, \pi + \omega_0).$$

Dann gilt nach (94) und (101):

$$D_n(s, \omega_0)\, \Xi(s, \tau, n) = J_1(s)\, X(s, \tau, \omega_0, n) + J_0(s) X(s, \tau, \pi - \omega_0, n).$$

Die Funktionen $J_0(s)$ und $J_1(s)$ verhalten sich im Gebiete $\sigma > -2$ regulär-analytisch. Beide verschwinden für $s = 0$. Dies besagt, daß $\Xi(s, \tau, n)$ für die τ in der oberen Halbebene und die s auf der Vereinigung der Gebiete $\sigma > 0$ und $|s| < \varrho_n$ eine stetige Funktion von s und τ und eine reguläre analytische Funktion von s darstellt. Weiter folgt aus (94) und der ersten Gleichung (95) für $s = 0$

$$X(0, \tau, \omega_0, n) = Y(0, \tau, u, n) = k_n\, \Xi(0, \tau, n).$$

Mithin ist $\Xi(0, \tau, n)$ eine ganze Spitzenform $\{\Gamma(N), -2, 1\}$. Da überdies nach (92) und (98)

$$-\frac{2\pi}{k_n} = \varepsilon_2(n, \mu') \qquad (n = 0 \text{ und } n \neq 0) \tag{102}$$

zutrifft, so ergibt sich nach (69) in der Bezeichnung (68)

$$\left(\varphi(\tau),\ \Xi(0, \tau, n)\right) = \varepsilon_2(n, \mu')\, b_n(\mathsf{H}). \tag{103}$$

Wir können nunmehr das Hauptergebnis unserer Untersuchung über die Quersummen $\Xi_{-2}(s, \tau, \mathsf{H}, \Gamma(N), n)$ in dem folgenden Satz zusammenstellen:

Satz 6. *Es sei N eine natürliche Zahl; $\Gamma = \Gamma(N)$ die Hauptkongruenzuntergruppe der Modulgruppe von der Stufe N; $s = \sigma + it$ eine komplexe Variable mit positivem Realteil σ, $\tau = x + iy$ eine komplexe Variable mit positivem Imaginärteil y; η, η' ein Paar hyperbolischer Fixpunkte von $\Gamma(N)$; H eine zweireihige normierte Matrix mit $\mathsf{H}\eta = 0$, $\mathsf{H}\eta' = \infty$; $\mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)$ ein System von Matrizen $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_1' & \beta_2' \end{pmatrix}$ aus der Nebengruppe $\mathsf{H}\Gamma$, welche sich nicht um eine normierte Diagonalmatrix mit positiver Spur als linkem Faktor unterscheiden; $\begin{pmatrix} \mu' & 0 \\ 0 & \mu'^{-1} \end{pmatrix}$ unter den Matrizen dieser Gestalt aus $\mathsf{H}\Gamma\mathsf{H}^{-1}$ diejenige mit kleinstem $\mu' > 1$; n eine ganze Zahl.*

Nach bekannten Sätzen konvergiert die Reihe

$$\Xi_{-2}(s, \tau, \mathsf{H}, \Gamma(N), n) = \sum_{\mathsf{B} \subset \mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)} \frac{(\mathsf{B}\tau)^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}}}{(\beta_1\tau + \beta_2)(\beta_1'\tau + \beta_2')\, |\beta_1\tau + \beta_2|^{\frac{s}{2}}\, |\beta_1'\tau + \beta_2'|^{\frac{s}{2}}}$$

für $\sigma > 0$, $y > 0$ und stellt in diesem Gebiete eine stetige Funktion von s und τ und eine reguläre analytische Funktion von s dar. Darüber hinaus ist jetzt be-

wiesen, daß die Funktion $\Xi_{-2}(s, \tau, \mathsf{H}, \Gamma(N), n)$ *in die Vereinigung* $\mathfrak{B}_n$ *der Gebiete* $\sigma > 0$ *und* $|s| < \varrho_n$ *regulär-analytisch fortgesetzt werden kann, genauer:* $\Xi_{-2}(s, \tau, \mathsf{H}, \Gamma(N), n)$ *ist für* $s \subset \mathfrak{B}_n$, $y > 0$ *eine stetige Funktion von* s *und* τ *und eine reguläre analytische Funktion von* s. *Dabei bezeichnet* ϱ_n *eine gewisse positive Zahl* $< \frac{1}{3}$. *Der Nullwert*

$$\Xi_{-2}(0, \tau, \mathsf{H}, \Gamma(N), n)$$

stellt eine ganze Spitzenform zur Gruppe $\Gamma(N)$ *von der Dimension* -2 *dar. Das metrische Verhalten des Nullwertes* $\Xi_{-2}(0, \tau, \mathsf{H}, \Gamma(N), n)$ *steht in genauer Analogie zu dem der hyperbolischen Quersummen* $\Xi_{-r}(\tau, v, \mathsf{H}, \Gamma, n)$ *in den Fällen* $r > 2$, $|v| = 1$ *absoluter Konvergenz.*

§ 5.

Hauptsysteme. Neue Vollständigkeitssätze.

Im folgenden handelt es sich zunächst um einen Nachtrag zur Theorie der sogenannten Hauptsysteme [(J III), § 1], und zwar bei allgemeinen Klassen $\{\Gamma, -r, v\}$, wo Γ von erster Art, $r > 0$, $|v| = 1$. Wir betrachten die Schar $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$ der ganzen Spitzenformen $\{\Gamma, -r, v\}$. Von ihrem Rang μ wird $\mu > 0$ vorausgesetzt.

Zur Erklärung der Hauptsysteme bezeichne $\zeta = A^{-1}\infty$ eine Spitze von Γ, dabei $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ eine normierte Matrix. Die Formen $\varphi_j(\tau)$ $(1 \leqq j \leqq \mu)$ mögen eine Basis von $\mathfrak{C}_0$ bilden. Der Vektor

$$\mathfrak{q}(\tau) = \{\varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_j(\tau), \ldots, \varphi_\mu(\tau)\} \tag{104}$$

gestattet in der Spitze $\tau = \zeta$ eine Entwicklung von der Gestalt

$$\mathfrak{q}(\tau) = (a_1\tau + a_2)^{-r} \sum_{n+\varkappa > 0} \mathfrak{b}_n e^{2\pi i (n+\varkappa)\frac{A\tau}{N}}, \quad \mathfrak{b}_n = \{b_{1,n}, \ldots, b_{j,n}, \ldots, b_{\mu,n}\}. \tag{105}$$

Hier ist $P = A^{-1}U^N A$ die normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_\zeta$, $v(P) = e^{2\pi i \varkappa}$ $(0 \leqq \varkappa < 1)$. Aus einfachen Überlegungen erhellt die Existenz eines Systems ganzer Zahlen n_k $(1 \leqq k \leqq \mu)$ derart, daß $n_k + \varkappa > 0$ und daß die Vektoren $\mathfrak{b}_{n_k}$ $(1 \leqq k \leqq \mu)$ linear unabhängig sind. Jedes solche System von Zahlen n_k $(1 \leqq k \leqq \mu)$ heißt ein Hauptsystem der Schar $\mathfrak{C}_0$ im Punkte $\tau = \zeta$. Entsprechend werden die Hauptsysteme von $\mathfrak{C}_0$ in den Punkten der oberen Halbebene und in den hyperbolischen Fixpunktepaaren erklärt. Die Eigenschaft eines Zahlensystems, ein Hauptsystem zu bilden, hängt von der Basis der Schar $\mathfrak{C}_0$ nicht ab.

Es ist klar, daß man allein aus der linearen Unabhängigkeit irgendwelcher Funktionen $\varphi_j(\tau)$ $(1 \leqq j \leqq \mu)$, die eine Entwicklung von der Gestalt (105) zulassen, nicht *mehr* ableiten kann, als die Existenz *eines* Hauptsystems. Wir zeigen, daß die Schar $\mathfrak{C}_0$ in jedem Punkte, auch unter verschärfenden Bedingungen, unendlich viele Hauptsysteme besitzt.

Zum Beweise dient ein Hilfssatz über das Anwachsen ganzer automorpher Spitzenformen bei Annäherung an den Rand der oberen Halbebene. Hier weiß man nach (J III), Satz 10, daß eine ganze Spitzenform $\varphi(\tau) \subset \{\Gamma, -r, v\}$ einer Ungleichung

$$|\varphi(\tau)| \leqq C_{11} y^{-\frac{r}{2}} \quad (\tau = x + iy,\ x \text{ reell},\ 0 < y \leqq 1)$$

mit konstantem, nur von $\varphi(\tau)$ abhängigem $C_{11} = C_{11}(\varphi)$ genügt. Wir behaupten

Satz 7. *Es sei Γ von erster Art, $r > 0$, v ein Multiplikatorsystem zu Γ und $-r$ vom Betrage 1, $\varphi(\tau)$ eine ganze, nicht identisch verschwindende Spitzenform $\{\Gamma, -r, v\}$. Dann gibt es in beliebiger Nähe jedes Punktes der reellen Achse Punkte (und mithin ganze horizontale E-Strecken von Punkten) τ derart, daß*

$$|\varphi(\tau)| \geqq C_{12} y^{-\frac{r}{2}} \quad (\tau = x + iy,\ x \text{ reell},\ 0 < y \leqq 1)$$

mit einer nur von $\varphi(\tau)$ abhängigen Konstanten $C_{12} = C_{12}(\varphi)$ zutrifft.

Zum Beweise stellen wir vorab fest, daß die Aussage des Satzes gegen Transformationen der oberen Halbebene in sich invariant ist. Bezeichnet $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine normierte Matrix, und setzt man

$$\varphi_S(\tau) = \varphi(S\tau)(c\tau + d)^{-r};\ y_S = \mathfrak{Im}\, S\tau = \frac{y}{|c\tau + d|^2},\ g(\tau, \varphi) = y^{\frac{r}{2}} |\varphi(\tau)|,$$

so besagt Satz 7, daß $g(\tau, \varphi) \geqq C_{12}$. Die behauptete Invarianz folgt aus

$$g(S\tau, \varphi) = g(\tau, \varphi_S). \tag{106}$$

Wir kommen nun zum Beweis und betrachten zunächst den Fall, in dem Γ parabolische Fixpunkte besitzt. Gemäß (106) werde angenommen, daß $\tau = \infty$ Spitze von Γ sei; überdies sei U^N normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_\infty$, $v(U^N) = e^{2\pi i \varkappa}$ $(0 \leqq \varkappa < 1)$ und

$$\varphi(\tau) = \sum_{n+\varkappa > 0} b_n e^{2\pi i (n+\varkappa)\frac{\tau}{N}} \tag{107}$$

die Fourierentwicklung der im Text des Satzes genannten Form $\varphi(\tau)$.

Hier sei $b_{n_0} \neq 0$, $b_n = 0$ für $0 < n + \varkappa < n_0 + \varkappa$, $c_m = \dfrac{b_{n_0+m}}{b_{n_0}}$ $(m \geqq 1)$.

Es wird daher

$$|\varphi(\tau)| = |b_{n_0}| e^{-2\pi(n_0+\varkappa)\frac{y}{N}} \left| 1 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{2\pi i m \frac{\tau}{N}} \right|,$$

und es gibt also eine Zahl $h_0 > 1$ von folgender Beschaffenheit: Zu jedem $h > h_0$ existiert eine nur von h und $\varphi(\tau)$ abhängige Konstante $C_{13} = C_{13}(h, \varphi)$ derart, daß

$$|\varphi(\tau)| \geqq C_{13} \quad (h_0 \leqq y \leqq h).$$

Für beliebiges $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \subset \Gamma$ finden wir mit $\tau' = L\tau = x' + iy'$ (x' reell, $y' > 0$):

$$y^{\frac{r}{2}} |\varphi(\tau)| = y'^{\frac{r}{2}} |\varphi(\tau')| \geqq y'^{\frac{r}{2}} C_{13} \qquad (h_0 \leqq y' \leqq h),$$

$$|\varphi(\tau)| \geqq h_0^{\frac{r}{2}} C_{13} y^{-\frac{r}{2}} = C_{12} y^{-\frac{r}{2}} \qquad (h_0 \leqq y' \leqq h). \tag{108}$$

Es sei $\gamma \neq 0$. Der Bereich $h_0 \leqq y' \leqq h$ besteht aus den Punkten τ der oberen Halbebene, die zwischen den nachstehend beschriebenen Kreisen $\mathfrak{k}_0$ und $\mathfrak{k}$ oder auf einem dieser Kreise liegen: $\mathfrak{k}_0$ und $\mathfrak{k}$ berühren die reelle τ-Achse im Punkte $L^{-1}\infty = -\dfrac{\delta}{\gamma}$ und haben die Durchmesser $\dfrac{1}{\gamma^2 h}$ bzw. $\dfrac{1}{\gamma^2 h_0}$.

Da die zu $\tau = \infty$ nach Γ äquivalenten Spitzen $L^{-1}\infty$ gemäß (J IV), Satz 2 auf der reellen Achse überall dicht liegen, ist hiermit Satz 7 im vorliegenden Falle bewiesen.

Es sei nunmehr Γ eine Grenzkreisgruppe von erster Art ohne parabolische Matrizen. Dann hat ein kanonischer Fundamentalbereich $\mathfrak{R}$ von Γ endlichen H-Durchmesser. Sei also D die obere Grenze der H-Abstände zweier Punkte von $\mathfrak{R}$. Bezeichnet x_0 einen beliebigen Punkt der reellen Achse, $\tau_0 = x_0 + iy_0$ $(0 < y_0 < 1)$ einen beliebigen, hinreichend nahe bei x_0 gelegenen Punkt der oberen Halbebene, L eine Matrix aus Γ mit $\tau_0 \subset L\mathfrak{R}$, so liegt $L\mathfrak{R}$ auf der abgeschlossenen H-Kreisscheibe mit dem H-Radius D um τ_0 als H-Mittelpunkt und daher auf der abgeschlossenen E-Kreisscheibe mit dem E-Radius $y_0(e^D - 1)$ um den Punkt τ_0 als E-Mittelpunkt; alle Punkte von $L\mathfrak{R}$ haben also von τ_0 einen beliebig kleinen E-Abstand, falls y_0 hinreichend klein ist.

Andererseits verschwindet die Funktion $g(\tau, \varphi) = y^{\frac{r}{2}} |\varphi(\tau)|$ nur in endlich vielen Punkten von $\mathfrak{R}$ und ist gegenüber den Transformationen L

aus Γ absolut invariant. Sie nimmt daher in $\mathfrak{R}$ und ebenso in jedem Bereich $L\mathfrak{R}$ ($L \subset \Gamma$) die sämtlichen Werte ihres Wertevorrats an. Daraus folgt auch in diesem Falle die Behauptung.

Um die angekündigten Aussagen über die Hauptsysteme einheitlich zu formulieren und zu beweisen, bedienen wir uns einer abkürzenden Terminologie. Da ferner alle Aussagen über Hauptsysteme gegenüber linearen Transformationen der oberen Halbebene in sich invariant sind, können und wollen wir annehmen, daß weder $\tau = 0$ noch $\tau = \infty$ ein hyperbolischer Fixpunkt von Γ sei. — Es sei entweder

A. $\zeta = A^{-1}\infty$ parabolischer Fixpunkt von Γ mit der bei (105) genannten Bedeutung von A, N, $\varkappa$. Die Entwicklung des Basisvektors (104) in der Spitze ζ sei durch (105) gegeben. Wir setzen

$$t = e^{2\pi i \frac{A\tau}{N}}, \quad t^{n+\varkappa} = e^{2\pi i (n+\varkappa)\frac{A\tau}{N}}, \quad (a_1\tau + a_2)^{-r} = \chi(\tau),$$

so daß

$$\mathfrak{q}(\tau) = \chi(\tau) \sum_{n+\varkappa > 0} \mathfrak{b}_n t^{n+\varkappa}, \quad \mathfrak{b}_n = \mathfrak{b}_n(A);$$

— oder es sei

B. $z = a + ib$ (a reell, $b > 0$), $t = \frac{\tau + \bar{z}}{\tau + z}$, $\chi(\tau) = (\tau + z)^{-r}$ und

$$\mathfrak{q}(\tau) = \chi(\tau) \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{b}_n t^n, \quad \mathfrak{b}_n = \mathfrak{b}_n(-\bar{z}),$$

die Entwicklung von $\mathfrak{q}(\tau)$ im Punkte $\tau = -\bar{z}$ der oberen Halbebene; — oder es sei

C. η, η' ein Paar hyperbolischer Fixpunkte von Γ, $\eta = \mathsf{H}^{-1}0$, $\eta' = \mathsf{H}^{-1}\infty$ mit normiertem $\mathsf{H} = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \eta_1' & \eta_2' \end{pmatrix}$, $H = \mathsf{H}^{-1} D_{\mu'} \mathsf{H}$ normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_{\eta,\eta'}$, $v(H) = e^{2\pi i \varkappa}$ ($0 \leqq \varkappa < 1$) und

$$t = (\mathsf{H}\tau)^{\frac{\pi i}{\log \mu'}}, \quad t^{n+\varkappa} = (\mathsf{H}\tau)^{\frac{\pi i (n+\varkappa)}{\log \mu'}}, \quad \chi(\tau) = (\eta_1\tau + \eta_2)^{-\frac{r}{2}} (\eta_1'\tau + \eta_2')^{-\frac{r}{2}},$$

demgemäß

$$\mathfrak{q}(\tau) = \chi(\tau) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{b}_n t^{n+\varkappa}, \quad \mathfrak{b}_n = \mathfrak{b}_n(\mathsf{H}),$$

die Entwicklung von $\mathfrak{q}(\tau)$ nach der Ortsvariablen des Fixpunktepaares η, η'.

In allen drei Fällen setzen wir

$$\mathfrak{b}_n = \{b_{1,n}, b_{2,n}, \ldots, b_{j,n}, \ldots, b_{\mu,n}\},$$

daher nach (104)

$$\varphi_j(\tau) = \chi(\tau) \sum_n b_{j,n} t^{n+\varkappa} \quad (1 \leqq j \leqq \mu)$$

mit den Summationsbedingungen $n + \varkappa > 0$, $n \geqq 0$, n ganz in den Fällen A., B., C. und mit $\varkappa = 0$ im Falle B.

Nun sei K eine beliebige ganze Zahl $\geqq -1$. Wir zeigen, daß unmöglich alle Koeffizientenvektoren $\mathfrak{b}_n$ mit $n > K$ sich aus weniger als μ Vektoren linear zusammensetzen lassen. Sei also λ eine ganze Zahl, $1 \leqq \lambda < \mu$ und seien die Vektoren

$$\mathfrak{c}_k = \{c_{1,k}, c_{2,k}, \ldots, c_{\mu,k}\} \quad (1 \leqq k \leqq \lambda)$$

vorgelegt. Wir bestimmen die Zahlen ξ_j $(1 \leqq j \leqq \mu)$ so, daß

$$\sum_{j=1}^{\mu} \xi_j c_{j,k} = 0 \quad (1 \leqq k \leqq \lambda), \quad \sum_{j=1}^{\mu} |\xi_j| > 0.$$

Wenn sich alle $\mathfrak{b}_n$ $(n > K)$ als Linearkombinationen der $\mathfrak{c}_k$ $(1 \leqq k \leqq \lambda)$ darstellen lassen, so existieren zu jedem $n > K$ Konstante $\vartheta_{n,k}$ $(1 \leqq k \leqq \lambda)$ mit

$$\mathfrak{b}_n = \sum_{k=1}^{\lambda} \vartheta_{n,k} \mathfrak{c}_k, \quad \text{d. h.} \quad b_{j,n} = \sum_{k=1}^{\lambda} \vartheta_{n,k} c_{j,k}.$$

Daraus folgt $\sum_{j=1}^{\mu} \xi_j b_{j,n} = 0$ $(n > K)$, d. h. die Form

$$\varphi(\tau) = \sum_{j=1}^{\mu} \xi_j \varphi_j(\tau) = \chi(\tau) \sum_n b_n t^{n+\varkappa}$$

verschwindet nicht identisch, wohl aber verschwinden alle ihre Entwicklungskoeffizienten b_n mit $n > K$.

Die hier vorgeführte Schlußkette beruht auf der Annahme $\lambda > 0$. Für $\lambda = 0$ ergibt sich die letzte Folgerung unmittelbar.

Diese Aussage aber enthält einen Widerspruch zu Satz 7. Im Falle B. erkennt man $\varphi(\tau)$ als beschränkt in der oberen Halbebene, im Falle A. mit $a_1 = 0$ ebenfalls. Für $a_1 \neq 0$ schneide man aus $\mathfrak{H}$ einen beliebig kleinen E-Kreis um den Punkt $\zeta = -\frac{a_2}{a_1}$ als Mittelpunkt heraus. Dann ist $\varphi(\tau)$ auf der Restmenge beschränkt. Es liege der Fall C. vor. Mit

$$\mathsf{H}\tau = \varrho e^{i\psi} \quad (\varrho > 0,\ 0 < \psi < \pi)$$

ergibt sich

$$\varphi(\tau) = \chi(\tau) \sum_{n \leqq K} b_n e^{\frac{\pi i (n+\varkappa)}{\log \mu'} \log \varrho - \frac{\pi (n+\varkappa)}{\log \mu'} \psi}$$

Da diese Darstellung für $0 < \psi < \pi$ absolut konvergiert, so ist die Reihe für $0 < \psi \leqq \frac{\pi}{2}$ beschränkt. Die Ungleichung $0 < \psi \leqq \frac{\pi}{2}$ beschreibt in

der oberen τ-Halbebene das Innere oder Äußere des auf der reellen Achse senkrechten E-Halbkreises durch η und η' einschließlich seiner Peripherie. Schneidet man aus diesem Bereich zwei hinreichend kleine E-Kreise um die Punkte η und η' heraus, so enthält der Restbereich eine Teilstrecke der reellen Achse. — Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man im Falle C., wenn man voraussetzt, daß sich alle Koeffizientenvektoren $\mathfrak{b}_n$ mit $n < -K$ aus weniger als μ Vektoren linear zusammensetzen lassen.

Wir finden also zusammenfassend

Satz 8. *Die Schar der ganzen Spitzenformen* $\{\Gamma, -r, v\}$ *(*Γ *von erster Art,* $r > 0$, $|v| = 1$*) besitzt für die Entwicklungen in den parabolischen Spitzen, in den Punkten der oberen Halbebene und in den hyperbolischen Fixpunktepaaren Hauptsysteme* $\{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots, n_\mu\}$*, deren sämtliche Komponenten* n_k $(1 \leqq k \leqq \mu)$ *eine beliebig vorgegebene Zahl K übertreffen. Sie besitzt für die Entwicklungen in den hyperbolischen Fixpunktepaaren Hauptsysteme, deren sämtliche Komponenten eine beliebig vorgegebene nicht positive Zahl unterschreiten.*

Dieser Satz besagt offenbar mehr als nur die Existenz unendlich vieler Hauptsysteme. Eine andere Verschärfung dieser Existenzaussage betrifft die Frage nach der Existenz unendlich vieler Hauptsysteme, deren einige Komponenten festgehalten werden.

Zunächst erkennt man, wenn die Bezeichnungen des Beweises von Satz 8 zugrunde gelegt werden, daß es unendlich viele Koeffizientenvektoren $\mathfrak{b}_n$ gibt, welche vom Nullvektor $\mathfrak{o}$ verschieden sind. Hat man ferner für ein ganzes λ mit $1 \leqq \lambda < \mu$ die λ linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{b}_{n_k}$ $(1 \leqq k \leqq \lambda)$ aufgewiesen, so gibt es unendlich viele ganze $n_{\lambda+1}$ derart, daß die $\lambda + 1$ Vektoren $\mathfrak{b}_{n_k}$ $(1 \leqq k \leqq \lambda)$ und $\mathfrak{b}_{n_{\lambda+1}}$ linear unabhängig sind. Wir formulieren dies als

Satz 9. *Für die unter* A., B., C. *angegebenen Entwicklungen eines Basisvektors der Schar der ganzen Spitzenformen* $\{\Gamma, -r, v\}$ *gilt: Es gibt unendlich viele ganze n, für die* $\mathfrak{b}_n \neq \mathfrak{o}$ *ausfällt; im Falle* C. *gibt es unendlich viele positive und unendlich viele negative solche n. Es sei* λ *eine ganze Zahl mit* $1 \leqq \lambda < \mu$ *und es seien die* λ *Koeffizientenvektoren* $\mathfrak{b}_{n_k}$ $(1 \leqq k \leqq \lambda)$ *linear unabhängig. Dann gibt es unendlich viele ganze n derart, daß die* $\lambda + 1$ *Vektoren* $\mathfrak{b}_{n_k}$ $(1 \leqq k \leqq \lambda)$ *und* $\mathfrak{b}_n$ *zusammen linear unabhängig sind; im Falle* C. *gibt es unendlich viele positive und unendlich viele negative solche n.*

Die damit gewonnenen Aussagen über Hauptsysteme ziehen nach (J III), (J IV) automatisch entsprechende Vollständigkeitssätze über die

Quersummen der drei Typen nach sich [(J III), Satz 16, 18, 18a; (J IV), Satz 5, 7, 8]. Neben diesen Sätzen aber besteht — und zwar zunächst nur für $r = 2$, $v = 1$ — ein weiterer neuartiger Vollständigkeitssatz, der sich aus den Eigenschaften der Perioden der ABELschen Integrale erster Gattung ergibt.

Es sei $\varphi(\tau)$ eine ganze Spitzenform $\{\Gamma, -2, 1\}$. Das $\varphi(\tau)$ zugeordnete ABELsche Integral erster Gattung $\int_{\tau_0}^{\tau} \varphi(\tau)\, d\tau$ erfährt bei Anwendung der Substitution mit der Matrix L aus Γ den additiven Zuwachs

$$\omega(L, \varphi) = \int_{\tau_0}^{L\tau_0} \varphi(\tau)\, d\tau,$$

der als L-Periode von $\varphi(\tau)$ bezeichnet werde. Hat $\varphi(\tau)$ in den Bezeichnungen unter C. die Entwicklung

$$\varphi(\tau) = \chi(\tau) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (H\tau)^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}}, \quad b_n = b_n(H),$$

so gewinnt man bei Berücksichtigung der Relationen $r = 2$ und $\chi(\tau) = (H\tau)^{-1} \frac{dH\tau}{d\tau}$ die Darstellung

$$\omega(H, \varphi) = 2(\log \mu')\, b_0(H). \tag{109}$$

Es mögen die Matrizen

$$-I, P_1, P_2, \ldots, P_{\sigma_0}, E_1, E_2, \ldots, E_{e_0}, \quad G_1, H_1, G_2, H_2, \ldots, G_{p_0}, H_{p_0} \tag{110}$$

im Sinne von (G I), § 1 ein kanonisches Erzeugendensystem von Γ bilden. Dabei entsprechen auf der einem kanonischen Fundamentalbereich $\mathfrak{R}$ von Γ zugeordneten kanonisch aufgeschnittenen RIEMANNschen Fläche den parabolischen bzw. elliptischen Matrizen P_j $(1 \leqq j \leqq \sigma_0)$ bzw. E_k $(1 \leqq k \leqq e_0)$ die Überschreitungen der von dem Kreuzungspunkt zu den Verzweigungspunkten unendlicher bzw. endlicher Ordnung führenden Schnitte, den hyperbolischen Matrizen G_ν, H_ν $(1 \leqq \nu \leqq p_0)$ die Überschreitungen der Rückkehrschnitte. Ein solches G_ν oder H_ν ist im allgemeinen nicht die normierte Erzeugende der zugehörigen Gruppe $\mathfrak{Z}_{\eta, \eta'}$. Wir setzen also in Analogie zu den Bezeichnungen unter C.

$$G_\nu = \pm \Theta_\nu^{-1} D^{g_\nu}_{\lambda_\nu'} \Theta_\nu, \; H_\nu = \pm \mathsf{H}_\nu^{-1} D^{h_\nu}_{\mu_\nu'} \mathsf{H}_\nu \qquad (1 \leqq \nu \leqq p_0) \tag{111}$$

mit ganzen $g_\nu \neq 0$, $h_\nu \neq 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} \omega(G_\nu, \varphi) &= 2 g_\nu (\log \lambda_\nu')\, b_0(\Theta_\nu), \\ \omega(H_\nu, \varphi) &= 2 h_\nu (\log \mu_\nu')\, b_0(\mathsf{H}_\nu). \end{aligned} \qquad (1 \leqq \nu \leqq p_0). \tag{112}$$

Nunmehr folgt aus klassischen Sätzen der RIEMANNschen Funktionentheorie sowie aus (J III), Satz 15 in den Bezeichnungen von Satz 6:

Satz 10. *Man verstehe unter den Matrizen* (110) *ein kanonisches Erzeugendensystem von* $\Gamma(N)$ $(N > 1, e_0 = 0)$. *Dabei seien durch* (111) *die Darstellungen der hyperbolischen Erzeugenden* G_ν, H_ν *durch die normierten Erzeugenden der jeweils zugehörigen Gruppen* $\mathfrak{Z}_{\eta,\eta'}$ *gegeben. Dann bilden sowohl die Quersummen*

$$\Xi_{-2}(0, \tau, \Theta_\nu, \Gamma(N), 0) \qquad (1 \leqq \nu \leqq p_0)$$

als auch die Quersummen

$$\Xi_{-2}(0, \tau, \mathsf{H}_\nu, \Gamma(N), 0) \qquad (1 \leqq \nu \leqq p_0)$$

eine Basis der Schar der ganzen Spitzenformen $\{\Gamma(N), -2, 1\}$.

Für allgemeine Gruppen Γ von erster Art gilt dieser Satz auch, allerdings nur insoweit man von hyperbolischen Quersummen reden kann, d. h. für die nach dem Verfahren von (J III), Satz 22 algebraisch konstruierten Formen $\Xi_{-2}(\tau, \mathsf{H}, \Gamma, n)$. Diese Konstruktion läßt sich in allgemeinen Klassen $\{\Gamma, -r, v\}$ (Γ von erster Art, $r > 1$, $|v| = 1$) wie folgt durchführen:

Nach (21) oder (J IV), (26a) ist $\varepsilon_r(n, \mu')$ für ganzes n und $r > 1$ erklärt und > 0. Es gibt höchstens *eine* Funktion $\Xi_{-r}(\tau, v, \mathsf{H}, \Gamma, n)$ in $\mathfrak{C}_0$ derart, daß

$$(\varphi(\tau), \Xi_{-r}(\tau, v, \mathsf{H}, \Gamma, n)) = v(\mathsf{H})\, \varepsilon_r(n, \mu') b_n(\mathsf{H}) \tag{112}$$

für alle $\varphi(\tau)$ aus $\mathfrak{C}_0$ zutrifft [vgl. (J IV), (27)]. Es bezeichne $\varphi_j(\tau)$ $(1 \leqq j \leqq \mu)$ eine normierte Orthogonalbasis von $\mathfrak{C}_0$; die Entwicklung des zugehörigen Basisvektors $\mathfrak{q}(\tau)$ nach Potenzen von $\mathsf{H}\tau$ sei die unter C gegebene. Die Funktion

$$\Xi_{-r}(\tau, v, \mathsf{H}, \Gamma, n) = \sum_{j=1}^{\mu} \overline{v(\mathsf{H})}\, \varepsilon_r(n, \mu')\, \overline{b_{j,n}(\mathsf{H})}\, \varphi_j(\tau) \tag{113}$$

erfüllt (112) ersichtlich für $\varphi(\tau) = \varphi_k(\tau)$ $(1 \leqq k \leqq \mu)$ und daher allgemein

Zum Schluß erörtern wir noch kurz die den Quersummen $G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma|F)$ entsprechenden Verallgemeinerungen der Formen $\Xi_{-2}(0, \tau, \mathsf{H}, \Gamma(N), n)$. Die Erklärung einer Quersumme $\Xi_{-2}(0, \tau, \mathsf{H}, \Gamma(N)|F)$ mit $F(w) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \beta_\nu t^\nu$, $t = w^{\frac{\pi i}{\log \mu'}}$, durch das Summationsverfahren der §§ 2 bis 4 hätte von der Reihe

$$\sum_{\mathsf{B} \subset \mathfrak{S}(\mathsf{H}, \Gamma)} \frac{(\mathsf{B}\tau)^{\frac{\pi i \varkappa}{\log \mu'}} F(\mathsf{B}\tau)}{(\beta_1\tau+\beta_2)(\beta_1'\tau+\beta_2')|\beta_1\tau+\beta_2|^{\frac{\varkappa}{2}}|\beta_1'\tau+\beta_2'|^{\frac{\varkappa}{2}}}, \quad F(w) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \beta_\nu w^{\frac{\pi i \nu}{\log \mu'}}, \tag{114}$$

auszugehen und müßte sich auf ihre analytische Fortsetzbarkeit in eine Umgebung des Punktes $s = 0$ stützen. Da aber die Umgebungen $|s| < \varrho_n$ von $s = 0$, in welche die mit $F(w) = t^n$ gebildeten Funktionen oben fortgesetzt worden sind, von n abhängen, so erscheint dieser Ansatz zunächst wenig aussichtsreich. Es genügt für alle Zwecke indessen völlig, an Stelle von (114) die mit den bereits aussummierten Quersummen gebildeten Reihen

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \beta_\nu \, \Xi_{-2}(0, \tau, \mathsf{H}, \Gamma(N), \nu) \tag{115}$$

heranzuziehen. Wenn eine solche Reihe in einer Umgebung einer Stelle konvergiert, so konvergiert sie in der oberen Halbebene, konvergiert gleichmäßig auf jedem Fundamentalbereich und stellt eine Form aus $\mathfrak{C}_0$ dar. Konvergenzkriterien für die Reihe (114) erhält man aus der Grundformel (103) oder der Darstellung von $\Xi_{-2}(0, \tau, \mathsf{H}, \Gamma(N), n)$ durch $Y(0, \tau, u, n)$ und (67) oder am bequemsten aus (113). Danach gilt in einer Umgebung einer Stelle $\tau_0 \subset \mathfrak{H}$ eine Abschätzung

$$|\Xi_{-2}(0, \tau, \mathsf{H}, \Gamma(N), n)| \leqq C_{14} \, \varepsilon_2(n, \mu') \sum_{j=1}^{\mu} |b_{j,n}(\mathsf{H})|,$$

und hier weiß man nach (92), daß

$$\varepsilon_2(n, \mu') < \frac{2}{\pi} (\log^2 \mu') \frac{1}{n} \; (n > 0), \quad \varepsilon_2(n, \mu') < \frac{2}{\pi} (\log^2 \mu') \frac{1}{|n|} e^{\frac{2\pi^2 |n|}{\log \mu'}} \; (n < 0),$$

ferner daß

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |b_{j,n}(\mathsf{H})| \, e^{-\frac{\pi^2 n t}{\log \mu'}} \quad \text{für} \quad 0 < t < 1 \quad \text{und} \quad 1 \leqq j \leqq \mu$$

konvergiert.

(Eingegangen am 25. Mai 1943.)

Zur Iteration reeller Funktionen.

Von

U. T. Bödewadt in Posen.

Eine Funktion $f(x)$ wird iteriert, indem man in sie ihren Wert als Argument einsetzt: $f(f(x))$. Durch Wiederholung entsteht eine Funktionenfolge, die im folgenden durch Beifügung der hochgestellten Zahl der Iterationen in eckigen Klammern bezeichnet werden soll:

$$f^{[1]}(x) = f(x), \quad f^{[n]}(x) = f\left(f^{[n-1]}(x)\right). \tag{1}$$

Die daraus folgenden Regeln

$$\begin{aligned} f^{[m]}\left(f^{[n]}(x)\right) &= f^{[m+n]}(x), \\ \left(f^{[m]}\right)^{[n]}(x) &= f^{[m \cdot n]}(x), \end{aligned} \tag{2}$$

deren Ähnlichkeit mit den Potenzgesetzen in dem Beispiel $f(x) = c \cdot x$ zur Identität wird, führen dazu, $f^{[0]}(x) = x$ zu setzen und unter $f^{[-1]}(x)$ die Umkehrfunktion zu $f(x)$ zu verstehen, so daß

$$\begin{aligned} f^{[-1]}\left(f(x)\right) &= f\left(f^{[-1]}(x)\right) = x, \\ f^{[-n]}(x) &= \left(f^{[-1]}\right)^{[n]}(x) = \left(f^{[n]}\right)^{[-1]}(x) \end{aligned}$$

wird.

Alle diese Iterationsstufen lassen sich gleichzeitig erklären, wenn man eine Funktion $\varphi(x)$ bestimmen kann, die der ABELschen Funktionalgleichung [1])

$$1 + \varphi(x) = \varphi\left(f(x)\right) \tag{3}$$

genügt: denn dann wird $k + \varphi(x) = \varphi\left(f^{[k]}(x)\right)$ und also

$$f^{[k]}(x) = \varphi^{[-1]}\left(k + \varphi(x)\right). \tag{4}$$

Eine solche Funktion $\varphi(x)$ leistet aber mehr: Sie liefert für gebrochenes k, solange ihre Umkehrung $\varphi^{[-1]}$ für $k + \varphi(x)$ erklärt ist, eine Schar stetig abgestufter Zwischenfunktionen zur Folge der Iterationen $f^{[n]}(x)$. Deswegen soll hier jede stetige umkehrbare Funktion $\varphi(x)$, die der ABELschen Gleichung (3) genügt, eine „Stufungsfunktion zu $f(x)$" heißen. Die nach (4) gebildeten Funktionen $f^{[k]}(x)$ heißen „Stufungen von $f(x)$", und zwar „Aufstufungen" für $k > 0$, „Abstufungen" für $k < 0$, „natürliche Stufungen", wenn k einen Wert aus der Folge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... hat,

[1]) N. H. ABEL, Œuvres complètes, 2. éd., Christiania 1881, Bd. II, Nr. VI, S. 36–39.

„natürliche Abstufungen" für negativ ganzzahlige k, „Zwischenfunktionen" für gebrochenes k. Die Stufungsregeln (2) gelten dann für alle reellen m und n, soweit die betreffenden Stufungen von $f(x)$ sich bilden lassen.

An Stelle der Hilfsfunktion $1 + u$, die in der ABELschen Gleichung auftritt, kann man auch $c \cdot u$ mit $0 \neq |c| \neq 1$ nehmen und gelangt so zu der SCHRÖDERschen Gleichung [2])

$$c \cdot \psi(x) = \psi(f(x)), \tag{5}$$

deren Lösung ebenfalls die Stufungen von $f(x)$ liefert:

$$f^{[k]}(x) = \psi^{[-1]}(c^k \cdot \psi(x)).$$

Zu analytischem $f(x)$ läßt sich ziemlich leicht eine analytische Lösung der SCHRÖDERschen Gleichung (5) finden, wenn man einen Ruhepunkt $z_0 = f(z_0)$ der Abbildung $z \to f(z)$ hat, in dem außerdem $0 \neq |f'(z_0)| \neq 1$ ist. Aber reelle Funktionen haben nicht immer reelle Ruhepunkte, wie schon das Beispiel $f(z) = e^z$ zeigt; die komplexen Ruhepunkte führen dann in der Regel nicht zu reellen (d. h. über der reellen Achse reellwertigen) Lösungen $\psi(x)$ von (5), und auch die daraus zu gewinnende Lösung $\psi(x) = \log \psi(x) : \log c$ von (3) pflegt nicht reell zu sein. Die vielen und reichhaltigen Untersuchungen [3]) über die Iterationen analytischer Funktionen im Komplexen, die sich besonders eingehend mit der Natur der Ruhepunkte befassen, sind daher für eine Lösung der entsprechenden Aufgabe im Reellen ohne großen Nutzen. Erst neuerdings hat Herr KNESER nach ersten Ansätzen von BENNETT [4]) für die Funktion e^z einen Weg gewiesen, um aus dem Komplexen eine auf der reellen Achse reelle und reguläre Lösung der ABELschen Gleichung zu gewinnen [5]).

---

[2]) E. SCHRÖDER, Math. Ann. **3** (1871), S. 296–322.

[3]) Ohne Anspruch auf Vollständigkeit seien einige der wichtigeren genannt, wobei insbesondere die Untersuchungen über wiederholte Mittelbildung aus mehreren Veränderlichen nicht berücksichtigt sind: M. A. KORKINE, Bull. Sci. Math. (2) 6_1 (1882), S. 228–242; J. FARKAS, J. Math. pur. appl. (3) **10** (1884), S. 101–108; G. KŒNIGS, Bull. Sci. Math. (2) 7_1 (1883), S. 340–357; C. R. Paris **99** (1884), S. 1016–1017; Ann. Ecol. norm. (3) **2** (1885), S. 385–404; L. LEAU, Ann. Toulouse **11** E, S. 1–110; P. FATOU, Bull. Soc. Math. France **47** (1919), S. 161–271; **48** (1920), S. 33–94, 208–314; J. Math. pur. appl. (9) **3** (1924), S. 1–49; G. JULIA, ebenda (8) **1** (1918), S. 47–245; Acta Math. **56** (1931), S. 149–195; **58** (1932), S. 407–412; P. MONTEL, Ann. Ecol. norm. (3) **50** (1933), S. 171–196; J. WOLFF, Bull. Soc. Math. France **57** (1929), S. 195–203; C. R. Paris **194** (1932), S. 833–834; G. VALIRON, Bull. Sci. Math. (2) **55** (1931), S. 105–128; H. CREMER, Jahresber. D. M. V. **33** (1925), S. 185–210; Ber. Verh. Sächs. Akad. Leipzig **84** (1932), S. 291–324; Math. Ann. **110** (1935), S. 739–744; H. TÖPFER, Math. Ann. **117** (1940), S. 65–84.

[4]) A. A. BENNETT, Ann. of Math. (2) **17** (1915), S. 23–60, 74–75.

[5]) H. KNESER in einem Vortrage auf der Mathematiker-Zusammenkunft im Oktober 1942 in Freiburg i. Br. – Meine Kenntnis des Inhalts verdanke ich einer freundlichen brieflichen Mitteilung von Herrn Prof. KNESER.

Die nachstehenden, ganz im Reellen verlaufenden Ausführungen zeigen in § 2 für eine mit Rücksicht auf eindeutige Umkehrbarkeit ausgewählte Funktionenklasse S, daß es zu jeder stetigen reellen Funktion $f(x)$ aus S mit endlichvielen oder unbeschränkt vielen stetigen Ableitungen eine reelle Lösung der ABELschen Gleichung mit denselben Stetigkeitseigenschaften gibt, die sich also vermöge (4) auf alle Stufungen von $f(x)$ übertragen. Zum Beweise werden im Anschluß an eine Methode, die HURWITZ bei linearen Differenzengleichungen benutzte [6]), BERNOULLIsche Polynome verwendet. § 1 bringt vorbereitend die Abgrenzung der Klasse S und einen Hilfssatz, § 3 den Konvergenzbeweis für vollableitbare reelle Funktionen. Aus einer in § 4 bewiesenen Determinantenformel für die Ableitungen der Zwischenfunktionen wird in § 5 eine Bedingung hergeleitet, welche die Stufungsfunktionen zu erfüllen haben, wenn Vollmonotonie von $f(x)$ bei der Bildung der Zwischenfunktionen erhalten bleiben soll.

§ 1.

Vorbereitungen.

Erklärung 1. Eine Funktion $f(x)$ gehört zur Klasse S („stufbare Funktionen"), wenn sie folgende Eigenschaften hat:

1) $f(x)$ ist über einem Abschnitt (a, b) der reellen Geraden als reelle stetige Funktion erklärt: $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$.

2) $f(x)$ ist in (a, b) eine wachsende Funktion: für $a < x_1 < x_2 < b$ ist stets $f(x_1) < f(x_2)$.

3) In (a, b) gilt $f(x) > x$.

4) Der Wertebereich von $f(x)$ deckt sich ganz oder zum Teil mit dem Erklärungsbereich: mit $\alpha = \lim_{x \to a} f(x) = f(a+0)$, $\beta = \lim_{x \to b} f(x) = f(b-0)$ gilt $a \leqq \alpha < b \leqq \beta$.

Beispiele: $f(x) = e^x$ $(a = -\infty,\ \alpha = 0,\ b = \beta = +\infty)$; $f(x) = x + 1$ $(a = \alpha = -\infty,\ b = \beta = +\infty)$; $f(x) = e \cdot x$ $(a = \alpha = 0,\ b = \beta = +\infty)$; $f(x) = \arcsin x$ $\left(a = \alpha = 0,\ b = 1,\ \beta = \frac{\pi}{2}\right)$. Ist nur die dritte Bedingung nicht erfüllt, so kann man doch für jede reelle Funktion $f(x)$, für welche sich die durch $f(x) = x$ gegebenen Ruhepunkte nicht im Endlichen häufen, den Abschnitt (a, b) so in Teile zerlegen, daß in jedem entweder $f(x) > x$ oder $f(x) < x$ gilt; in dem letzten Falle ist dann eben $f^{[-1]}(x) > x$

[6]) A. HURWITZ, Acta Math. 20 (1897), S. 285–312.

Erklärung 2. Gehört $f(x)$ zu S, dann heißt eine Funktion $\varphi(x)$ eine ABELsche Stufungsfunktion (im folgenden kurz: Stufungsfunktion) zu $f(x)$, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

1) $\psi(x)$ ist in (a, β) als reelle stetige Funktion erklärt;

2) $\psi(x)$ ist in (a, β) eine steigende Funktion: für $a < x_1 < x_2 < \beta$ ist stets $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$;

3) $\varphi(x)$ erfüllt für x in (a, b) die ABELsche Gleichung (3).

Durch diese Eigenschaften ist $\varphi(x)$ bei gegebenem $f(x)$ noch nicht eindeutig bestimmt. Eine nicht wesentliche Unbestimmtheit besteht darin, daß mit jedem $\varphi(x)$ auch $\varphi(x) + C$ eine Stufungsfunktion zu $f(x)$ ist. Diese Konstante läßt sich festlegen, indem man einen Punkt x_0 in (a, b) wählt und dort $\varphi(x_0) = 0$ vorschreibt. Setzen wir weiter

$$f(x_0) = x_1, \quad f(x_{n-1}) = x_n = f^{[n]}(x_0), \tag{6}$$

so wird wegen (3)

$$\varphi(x_1) = 1, \quad \varphi(x_n) = n. \tag{7}$$

Der Abschnitt (x_0, x_1) soll Hauptabschnitt von $\varphi(x)$ heißen. Daß auch durch die Vorschrift $\varphi(x_0) = 0$ die Stufungsfunktion noch nicht eindeutig festgelegt ist, lehrt

Satz 1. *Es sei $s(t)$ eine stetige reelle Funktion, die den drei Bedingungen genügt:*

1) $s(0) = 0$; 2) $s(t+1) = s(t) + 1$; 3) $s(t_1) < s(t_2)$ für $t_1 < t_2$.

Ist dann weiter $\varphi(x)$ eine Stufungsfunktion zu der Funktion $f(x)$ aus S, so daß $\varphi(x_0) = 0$, dann ist auch $\psi(x) = s(\varphi(x))$ eine Stufungsfunktion zu $f(x)$ mit $\psi(x_0) = 0$; umgekehrt hat jede Stufungsfunktion, die bei x_0 verschwindet, die Form $s(\varphi(x))$, wobei $s(t)$ die drei obigen Bedingungen erfüllt.

Der leicht zu führende Beweis dieses schon bekannten Satzes kann hier unterdrückt werden. Die darin auftretenden Substitutionen $s(t)$ haben also die Eigenschaft, daß $s(t) - t = h(t)$ eine periodische Funktion von t mit der Periode 1 ist, welche für $t = 0$ verschwindet und niemals so rasch fällt wie ihr Argument wächst: $h(0) = 0$, $h(t+1) = h(t)$, $h(t_2) - h(t_1) > -(t_2 - t_1) < 0$.

Aus den in der Erklärung 2 geforderten Eigenschaften einer Stufungsfunktion $\varphi(x)$ ergibt sich, daß sie eine eindeutige Umkehrung $\varphi^{[-1]}(x)$ hat, so daß sich die Zwischenfunktionen nach (4) eindeutig bilden lassen. Nur die natürlichen Stufungen und Abstufungen von $f(x)$ sind durch $f(x)$ allein bestimmt, die Zwischenfunktionen hängen noch von der Wahl der Stufungsfunktion ab. Die Aufstufungen $f^{[k]}(x)$ $(k > 0)$ sind in $(a, f^{[-k]}(\beta))$ erklärt, die Abstufungen $f^{[-k]}(x)$ $(k > 0)$ in $(f^{[k]}(a), \beta)$.

Der Umfang des Wertebereichs der Stufungsfunktion $\varphi(x)$ zu $f(x)$,

$$\sigma_f = \lim_{y \to \beta} \varphi(y) - \lim_{x \to \alpha} \varphi(x) = \limsup_{a < x < y < \beta} (\varphi(y) - \varphi(x)),$$

heißt die „Stufbarkeit" von $f(x)$; $f(x)$ ist „σ_f-fach stufbar". Wenn nicht zugleich die beiden Ungleichungen $a < \alpha$, $b < \beta$ erfüllt sind, so ist $\sigma_f = \infty$; $f(x)$ heißt dann „voll stufbar". Wenn $\varphi(x) \to +\infty$ für $x \to \beta$, so heißt $f(x)$ „voll aufstufbar" (dies ist der Fall für $b = \beta$); ist $\varphi(x) \to -\infty$ für $x \to a$, so ist $f(x)$ „voll abstufbar" (so bei $a = \alpha$). Bei endlichem σ_f sind die Zwischenfunktionen $f^{[k]}(x)$ nur für $|k| < \sigma_f$ erklärt; für voll aufstufbare $f(x)$ ist k nicht nach oben, für voll abstufbare nicht nach unten beschränkt. Ist σ_f keine ganze Zahl, so hängt sein Wert noch in geringem Maße von der Wahl der Stufungsfunktion ab.

§ 2.

Aufbau von Stufungsfunktionen für ableitbare S-Funktionen.

Ist $f(x)$ eine S-Funktion, dann kann man eine Stufungsfunktion dazu so herstellen: Man wählt ein x_0 in $(a.\, b)$, bestimmt x_1 nach (6), bildet für den Hauptabschnitt $x_0 \leqq x \leqq x_1$ die Funktion

$$\varphi_0(x) = t = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \tag{8}$$

und setzt sie in die angrenzenden Abschnitte (x_1, x_2); (x_2, x_3); ... und ebenso nach der anderen Seite mittels der Abelschen Gleichung fort. Insbesondere wird für $x_{-1} \leqq x \leqq x_0$, d. h. für $x_0 \leqq f(x) \leqq x_1$

$$\varphi_0(x) + 1 = \varphi_0(f(x)) = \psi_0(x) = \frac{f(x) - x_0}{x_1 - x_0}. \tag{9}$$

Diese Funktion $\varphi_0(x)$ ist dann in x_0 (und daher, weil sie ihrer Herstellung nach die Abelsche Gleichung (3) erfüllt, in allen Nachfolgern und Vorgängern von x_0 ebenfalls) stetig, genügt also allen Vorschriften der Erklärung 2.

Eine Funktion mit stetigen Ableitungen beliebiger Ordnung möge fortan als „vollableitbar" bezeichnet werden, in Anlehnung an Ausdrücke wie „vollmonoton", „vollkonvex". — Alle natürlichen Stufungen $f^{[n]}(x)$ sind offenbar zugleich mit $f(x)$ selbst r-mal stetig ableitbar oder vollableitbar. Das gibt Anlaß, dieselbe Eigenschaft auch von allen Zwischenfunktionen $f^{[k]}(x)$ zu fordern; und zwar auch hinsichtlich der Stufungszahl k. Hierzu ist es offenbar hinreichend, wenn die Stufungsfunktion $\varphi(x)$ dieselben Eigenschaften hat. Andererseits ist das auch notwendig, denn durch eine bestimmt gegebene Schar solcher Zwischenfunktionen $f_k(x)$, die den Stufungsgesetzen (2) folgen, ist nach (4) auch die Stufungsfunktion bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt: setzt man $\varphi(x_0) = 0$ und löst $f^{[k]}(x_0) = x$ nach k auf: $k = \chi(x)$,

so ist $\varphi(x) = \chi(x)$ die zugehörige Stufungsfunktion. Diese Forderung läßt sich erfüllen:

Satz 2. *Zu einer r-mal stetig ableitbaren (vollableitbaren) Funktion $f(x)$ aus S gibt es stets eine r-mal stetig ableitbare (vollableitbare) Stufungsfunktion $\varphi(x)$; die damit nach (4) gebildeten Zwischenfunktionen $f^{[t]}(x)$ sind ebenfalls r-mal stetig ableitbar (vollableitbar).*

Ist dieser Satz bewiesen, dann folgt aus Satz 1 bei Verwendung einer ebensolchen Substitution $s(t)$, daß es unendlich viele solche Stufungsfunktionen gibt. Die gesuchte Stufungsfunktion wird nun gewonnen als Glied (für vollableitbares $f(x)$: als Grenzfunktion) einer Folge $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ... $\varphi_n(x)$, ... von Stufungsfunktionen zu $f(x)$, von der das Anfangsglied durch (8) gegeben ist und in der $\varphi_n(x)$ stetige Ableitungen bis zur n-ten Ordnung hat. Nach Satz 1 gilt dann:

$$\varphi_n(x) = s_n(\varphi_{n-1}(x)) = S_n(\varphi_0(x)), \tag{10}$$

$$S_0(t) = t, \quad S_n(t) = s_n(S_{n-1}(t)). \tag{10 a}$$

Dabei müssen $s_n(t)$ und $S_n(t)$ die drei Bedingungen von Satz 1 erfüllen, $s_n(t)$ muß stetige Ableitungen bis zur Ordnung $n-1$ haben, und die n-te Ableitung von $s_n(t)$ muß bei $t = 0$ einen Sprung von solcher Größe haben, daß der Sprung der n-ten Ableitung von $\varphi_{n-1}(x)$ an der Stelle x_0 in $\varphi_n(x)$ gerade aufgehoben ist.

Für diese Zwecke sind die Bernoullischen Polynome geeignet; es folge daher eine Zusammenstellung ihrer Erklärung und Eigenschaften[7]). Mit den Konstanten

$$\beta_n = \frac{B_n}{n!}, \quad \text{so daß also} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n u^n = \frac{u}{e^u - 1}, \tag{11}$$

werden die Funktionen $h_n(t)$ in $\langle 0, 1\rangle$ erklärt als die Bernoullischen Polynome mit dem Anfangswert 0, für $n > 1$ noch vermindert um ein Anfangsstück ihrer Fourierreihe, dessen Länge später bemessen werden soll:

$$h_0(t) = t, \tag{12}$$

$$h_{2n}(t; N) = \sum_{\lambda=1}^{2n+1} \frac{t^\lambda}{\lambda!} \cdot \beta_{2n+1-\lambda} + (-1)^n \cdot \sum_{\nu=1}^{N} \frac{2 \sin 2\pi\nu t}{(2\pi\nu)^{2n+1}} \qquad (n \geqq 1),$$

$$h_{2n+1}(t; N) = \sum_{\lambda=1}^{2n+2} \frac{t^\lambda}{\lambda!} \cdot \beta_{2n+2-\lambda} + (-1)^n \cdot \sum_{\nu=1}^{N} \frac{2(1 - \cos 2\pi\nu t)}{(2\pi\nu)^{2n+2}} \qquad (n \geqq 0).$$

---

[7]) Vgl. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl., Berlin 1931, S. 541–542, 550–552; N. E. Nörlund, Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin 1924.

Setzt man weiter

$$(13) \qquad C_k(N) = \beta_k - \cos\frac{k\pi}{2} \cdot \sum_{\nu=1}^{N} \frac{2}{(2\pi\nu)^k} \qquad (k \geqq 1),$$

also $C_1(N) = -\frac{1}{2}$, $C_{2n+1}(N) = 0$ $(n > 0)$, dann folgt aus den bekannten Eigenschaften der BERNOULLIschen Funktionen:

$$(14) \quad \lim_{N\to\infty} C_n(N) = 0; \quad \lim_{N\to\infty} h_n(t;N) = 0 \text{ für } n > 1, \text{ gleichmäßig in } \langle 0,1\rangle.$$

Ferner ist

$$(15) \qquad h_n(0;N) = 0;$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k h_n(t;N)\Big|^{t=0} = C_{n+1-k}(N) \qquad (0 < k \leqq n);$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{n+1} h_n(t;N)\Big|^{t=0} = \frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t};$$

$$(16) \qquad h_n(t;N) = (-1)^{n+1} h_n(1-t;N);$$

$$(17) \qquad \left(\frac{d}{dt}\right)^k h_n(t;N)\Big|^{t=0} = \left(\frac{d}{dt}\right)^k h_n(t;N)\Big|^{t=1} \qquad (0 \leqq k \neq n);$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n h_n(t;N)\Big|^{t=0} = -\frac{1}{2}, \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^n h_n(t;N)\Big|^{t=1} = +\frac{1}{2};$$

$$(18) \quad h_n'(t;N) = h_{n-1}(t;N) + C_n(N) \quad (n > 0; \text{ oder } n = 0,\ t \neq 0, 1, 2, \ldots).$$

Aus (18) folgt durch Integration von 0 bis 1 die Ungleichung

$$|C_n(N)| \leqq \max |h_{n-1}(t;N)| \qquad (0 \leqq t \leqq 1;\ n > 0)$$

und damit wegen (16):

$$(19) \qquad |h_n(t;N)| \leqq \max |h_{n-1}(t;N)| \qquad (0 \leqq t \leqq 1;\ n > 0).$$

Aus (18) folgert man weiter

$$|h_n'(t;N)| \leqq \max |h_{n-1}(t;N)| \cdot \frac{3 + (-1)^n}{2};$$

weil nun aus (19) und (12) leicht

$$(20) \qquad |h_n(t;N)| \leqq \max |h_1(t;N)| < \frac{1}{\pi^2 \cdot N}$$

zu bestätigen ist, so findet man für die Ableitungen die Abschätzung

$$(21) \qquad |h_n^{(k)}(t;N)| \leqq 2^{\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor} \cdot \max |h_{n-k}(t;N)| \leqq 2^{\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor} \cdot \frac{1}{\pi^2 \cdot N}.$$

Wählt man nun die in (10) auftretende Substitution $s_n(t)$ in der Gestalt

$$(22) \quad s_n(t) = t + c_n \cdot h_n(t) \quad \text{mit } h_n(t) = h_n(t;N_n) \quad \text{für } 0 \leqq t \leqq 1,$$

wobei über die beiden Größen c_n und N_n noch passend verfügt werden kann, so erfüllt dieses $s_n(t)$ nach (15) die erste Bedingung von Satz 1. $\varphi_n(x)$ ist damit, wenn $\varphi_{n-1}(x)$ bereits festgelegt ist, im Hauptabschnitt $x_0 \leqq x \leqq x_1$

bestimmt; setzen wir $\varphi_n(x)$ in die angrenzenden Abschnitte funktional fort [das ist: mittels der ABELschen Funktionalgleichung (3)], so ergibt sich für $s_n(t)$ dabei eine Fortsetzung nach der Gleichung $s_n(t+1) = s_n(t) + 1$, also die zweite Bedingung von Satz 1. Um auch der dritten Bedingung Genüge zu tun, muß in $\langle 0, 1\rangle$

$$c_n \cdot h_n'(t : N_n) > -1 \tag{23}$$

gelten; darauf ist bei der Wahl von c_n und N_n Rücksicht zu nehmen. Daß die Ableitungen von $s_n(t)$ bis zur Ordnung $n-1$ stetig werden, ergibt die Formel (17). Jetzt gilt es, c_n so zu bestimmen, daß auch die n-te Ableitung von $\varphi_n(x)$ stetig wird. Als Unstetigkeitsstellen kommen nur die Punkte x_0, x_1 usw. in Betracht; und ist die n-te Ableitung von $\varphi_n(x)$ an einer dieser Stellen stetig gemacht, dann ist sie vermöge der funktionalen Fortsetzung auch an allen anderen stetig, die Stetigkeit der n-ten Ableitung von $f(x)$ dabei vorausgesetzt.

Zur Abkürzung werde

$$\varphi_n\big(f(x)\big) = \psi_n(x) \quad \text{für } x_0 \leqq f(x) \leqq x_1 \tag{24}$$

gesetzt; diese Funktion $\psi_n(x)$ ist also jedenfalls in einer linksseitigen Umgebung $\langle x_0 - \delta, x_0\rangle$ des Punktes x_0 erklärt. Wird $\varphi_n(x)$ funktional über den Punkt x_0 nach links fortgesetzt, so entsteht dort nach (3) und (24) die Funktion $\psi_n(x) - 1$. Da ihre Werte links von x_0 nach (24) durch die Werte von $\psi_n(x)$ im Hauptabschnitt links von x_1 bestimmt sind, so schließt sie sich bei x_0 stetig an die Werte an, die $\varphi_n(x)$ im Hauptabschnitt rechts von x_0 annimmt: für $x = x_0$ wird von beiden Seiten her stetig der Wert 0 angenommen. Daß auch die Ableitungen bis zur n-ten Ordnung stetig sein sollen, wird durch die Gleichungen[8])

$$D^k \psi_n(x_0) - D^k \varphi_n(x_0) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots) \tag{25}$$

gefordert. Im Falle $n = 1$ nehme man $N_1 = 0$, d. h.

$$h_1(t) = \tfrac{1}{2}(t^2 - t); \tag{26}$$

die Bedingung (25) ist dann durch

$$c_1 = 2\,\frac{1 - f'(x_0)}{1 + f'(x_0)} \tag{27}$$

zu erfüllen. Es wird dann

$$s_1'(t) = 2\,\frac{1 \cdot t + f'(x_0) \cdot (1-t)}{1 + f'(x_0)},$$

[8]) Die im folgenden benutzten Bezeichnungen und Formeln sind zusammengestellt in der Mitteilung des Verf. „Die Kettenregel für höhere Ableitungen", Math. Zeitschr. 48 (1943), S. 735–746, weiterhin mit „K" angeführt.

also $s_1'(t) > 0$ in $\langle 0, 1\rangle$; $s_1(t)$ erfüllt mithin auch die dritte Bedingung von Satz 1.

Angenommen jetzt, die Forderungen (25) seien für $1, 2, \ldots, n-1$ an Stelle von n erfüllt. Sie lassen sich unter Beachtung von (22) folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} D^k \psi_n(x_0) - D^k \varphi_n(x_0) &= \{D^k \psi_{n-1}(x_0) - D^k \varphi_{n-1}(x_0)\} + \\ &\quad + c_n \{D_x^k h_n(\psi_{n-1}(x_0)) - D_x^k h_n(\varphi_{n-1}(x_0))\} \\ &= \{D^k \psi_{n-1}(x_0) - D^k \varphi_{n-1}(x_0)\} + \\ &\quad + c_n \cdot \sum_{\nu=1}^{k} \{h_n^{(\nu)}(1) \cdot D_{k\nu} \psi_{n-1}(x_0) - h_n^{(\nu)}(0) \cdot D_{k\nu} \varphi_{n-1}(x_0)\}. \end{aligned}$$

Ist nun $k < n$, so verschwindet die erste Klammer nach Voraussetzung; in der zweiten (unter dem Summenzeichen) ist nach (17) für $\nu < n$ $h_n^{(\nu)}(1) = h_n^{(\nu)}(0)$, so daß übrigbleibt:

$$D^k \psi_n(x_0) - D^k \varphi_n(x_0) = c_n \cdot \sum_{\nu=1}^{k} h_n^{(\nu)}(0) \cdot \{D_{k\nu} \psi_{n-1}(x_0) - D_{k\nu} \varphi_{n-1}(x_0)\}.$$

Die in den Klammern rechter Hand stehenden Differentialausdrücke vom Grade ν und der Ordnung k sind Produktsummen aus den Ableitungen erster bis $(k+1-\nu)$-ter Ordnung von ψ_{n-1} und φ_{n-1}, wobei $k+1-\nu \leqq k \leqq n-1$ ist; diese stimmen an der Stelle x_0 nach Voraussetzung für die beiden Funktionen überein, so daß jede Klammer und damit die ganze rechte Seite verschwindet. Mithin ist $\varphi_n(x)$ bei funktionaler Fortsetzung samt seinen Ableitungen bis zur Ordnung $n-1$ stetig, und es bleibt nur noch der Fall $k = n$ zu untersuchen.

Die Stetigkeit der n-ten Ableitung läßt sich im allgemeinen nur durch bestimmte Wahl von c_n erreichen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} D^n \psi_n(x_0) - D^n \varphi_n(x_0) &= \{D^n \psi_{n-1}(x_0) - D^n \varphi_{n-1}(x_0)\} + \\ &\quad + c_n \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \{h_n^{(\nu)}(1) \cdot D_{n\nu} \psi_{n-1}(x_0) - h_n^{(\nu)}(0) \cdot D_{n\nu} \varphi_{n-1}(x_0)\}. \end{aligned}$$

In der Summe ist für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$ nach (17) $h_n^{(\nu)}(1) = h_n^{(\nu)}(0)$, hingegen für $\nu = n$ $h_n^{(n)}(1) = +\frac{1}{2}$, $h_n^{(n)}(0) = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} D^n \psi_n(x_0) - D^n \varphi_n(x_0) &= \{D^n \psi_{n-1}(x_0) - D^n \varphi_{n-1}(x_0)\} + \\ &\quad + c_n \cdot \{\tfrac{1}{2}(D_{nn} \psi_{n-1}(x_0) + D_{nn} \varphi_{n-1}(x_0)) + \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{n-1} h_n^{(\nu)}(0) \cdot (D_{n\nu} \psi_{n-1}(x_0) - D_{n\nu} \varphi_{n-1}(x_0))\}. \end{aligned}$$

Weil nun in $D_{n\nu}$ nur die Ableitungen bis zur Ordnung $n+1-\nu$ auftreten, ist hierin nach Voraussetzung für $2 \leqq \nu \leqq n$ $D_{n\nu}\psi_{n-1}(x) = D_{n\nu}\varphi_{n-1}(x)$. Übrig bleibt daher

$$D^n\psi_n(x_0) - D^n\varphi_n(x_0) = \{D^n\psi_{n-1}(x_0) - D^n\varphi_{n-1}(x_0)\} + \\ + c_n \cdot \{D_{nn}\varphi_{n-1}(x_0) + h_n'(0)\cdot(D_{n1}\psi_{n-1}(x_0) - D_{n1}\varphi_{n-1}(x_0))\} \\ = \{1 + c_n \cdot C_n(N_n)\}\{D^n\psi_{n-1}(x_0) - D^n\varphi_{n-1}(x_0)\} + c_n\cdot(\varphi_{n-1}'(x))^n.$$

Dieser Ausdruck soll verschwinden; dazu muß man c_n den Wert erteilen

$$(28a)\quad c_n = -\{D^n\psi_{n-1}(x_0) - D^n\varphi_{n-1}(x_0)\} \\ : \{(\varphi_{n-1}'(x_0))^n + C_n(N_n)\cdot(D^n\psi_{n-1}(x_0) - D^n\varphi_{n-1}(x_0))\}.$$

Wenn nicht schon zufällig $D^n\psi_{n-1} = D^n\varphi_{n-1}$ ist und daher $c_n = 0$ wird, so läßt sich dafür eine schönere Form finden:

$$(28b)\quad \frac{1}{c_n} + C_n(N_n) + (\varphi_{n-1}'(x_0))^n : \{D^n\psi_{n-1}(x_0) - D^n\varphi_{n-1}(x_0)\} = 0.$$

c_n hängt hiernach zwar noch von N_n ab, strebt aber bei wachsendem N_n wegen (14) und wegen $\varphi_{n-1}'(x) > 0$ gegen einen endlichen Grenzwert. Man kann in dieser Formel für c_n noch den Einfluß der zu stufenden Funktion $f(x)$ von dem der bisher aufgebauten Substitution $S_{n-1}(t)$ trennen. Nach (10) und (24) ist

$$D^n\psi_k(x_0) - D^n\varphi_k(x_0) = \sum_{\nu=1}^{n}\{D^\nu S_k(1)\cdot D_{n\nu}\psi_0(x_0) - D^\nu S_k(0)\cdot D_{n\nu}\varphi_0(x_0)\}.$$

Nun folgt aus (8)

$$D_{n\nu}\varphi_0(x_0) = 0 \quad \text{für } 1 < \nu < n; \quad = (x_1 - x_0)^{-n} \quad \text{für } \nu = n,$$

und nach (8) und (24) wird

$$D_{n\nu}\psi_0(x_0) = \sum_{\mu=\nu}^{n} D_{n\mu}f(x_0)\cdot D_{\mu\nu}\varphi_0(x_1) = (x_1 - x_0)^{-\nu}\cdot D_{n\nu}f(x_0);$$

schreibt man also zur Abkürzung

$$(29)\qquad f_{n\nu} = (x_1 - x_0)^{n-\nu}\cdot D_{n\nu}f(x_0),$$

so nimmt (28b) diese Gestalt an:

$$(28c)\quad c_n = -1 : \{C_n(N_n) + (S_{n-1}'(0))^n : (\sum_{\nu=1}^{n} f_{n\nu}D^\nu S_{n-1}(1) - D^n S_{n-1}(0))\}.$$

Wird c_n gemäß der Bedingung (28) gewählt, so ist die n-te Ableitung von $\varphi_n(x)$ überall stetig; damit außerdem $\varphi_n(x)$ stets zunehme bei wachsendem x, ist die Bedingung (23) einzuhalten. Wegen (18) und (14) kann man dafür durch Wahl eines hinreichend großen N_n sorgen, weil dann die linke Seite von (23) beliebig nahe an Null herankommt. Die Abhängigkeit des c_n von N_n

kann dabei nur verzögernd, aber nicht hindernd wirken, da c_n bei wachsendem N_n beschränkt bleibt.

So ist jetzt im Hauptabschnitt (x_0, x_1) eine Folge von Stufungsfunktionen $\varphi_n(x)$ erklärt, die darüber hinaus nach der ABELschen Gleichung fortzusetzen sind; $\varphi_n(x)$ ist samt seinen Ableitungen bis zur n-ten Ordnung stetig. Wenn $f(x)$ stetige Ableitungen bis zur Ordnung r hat, so läßt sich diese Folge der $\varphi_n(x)$ bis zum Gliede mit $n = r$ aufbauen. Für endlich-oft stetig ableitbare Funktionen $f(x)$ ist der Satz 2 damit bewiesen.

§ 3.

Die Konvergenz bei vollableitbaren S-Funktionen.

Um für vollableitbare Funktionen $f(x)$ eine Stufungsfunktion mit der gleichen Eigenschaft zu erhalten, genügt es nicht, nur die Konvergenz der vorhin aufgebauten Folge $\{\varphi_n(x)\}$ zu zeigen, sondern man muß nachweisen, daß diese Grenzfunktion wachsend und vollableitbar ist; das ist jedenfalls dann der Fall, wenn für beliebiges k die Folge der Ableitungen $\{\varphi_n^{(k)}(x)\}$ gleichmäßig konvergiert und die Ableitungen $\varphi_n'(x)$ einen positiven Grenzwert haben. Diese Anforderungen kann man in der Weise erfüllen, daß man eine konvergente Folge positiver Zahlen ε_n annimmt:

$$\varepsilon_n > 0; \quad \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon_n < \infty \tag{30}$$

und dann die Zahlen N_n so groß wählt, daß außer der Ungleichung (23) auch die Ungleichung

$$N_n > \frac{c_n}{\varepsilon_n}, \quad \text{also } \frac{c_n}{N_n} < \varepsilon_n \tag{31}$$

besteht; das ist wiederum trotz der Abhängigkeit des c_n von N_n möglich, weil c_n bei wachsendem N_n nicht unbeschränkt zunimmt.

Zunächst ist unter diesen Voraussetzungen die Folge φ_n konvergent: denn

$$\varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \big(\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu-1}(x)\big) = \varphi_0(x) + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu h_\nu\big(\varphi_{\nu-1}(x)\big),$$

und da die rechte Seite für $n \to \infty$ wegen (20), (31) und (30) gleichmäßig beschränkt ist, so ist die Grenzfunktion $\Phi(x)$ vorhanden:

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu h_\nu\big(\varphi_{\nu-1}(x)\big). \tag{32}$$

Auch die Folge der ersten Ableitungen konvergiert: Es ist

$$\varphi_n'(x) = \varphi_0'(x) \cdot \prod_{\nu=1}^{n} s_\nu'\big(\varphi_{\nu-1}(x)\big) = \varphi_0'(x) \cdot \prod_{\nu=1}^{n} \{1 + c_\nu h_\nu'\big(\varphi_{\nu-1}(x)\big)\},$$

und dieses Produkt konvergiert für $n \to \infty$ absolut und gleichmäßig in $\langle x_0, x_1 \rangle$, weil es die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \cdot h'_\nu(\varphi_{\nu-1}(x)) \cdot$$

nach (21), (31), (30) tut. Für die Ableitung der Grenzfunktion erhält man also den Ausdruck

$$\Phi'(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi'_n(x) = \varphi'_0(x) \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \{1 + c_\nu h'_\nu(\varphi_{\nu-1}(x))\}.$$

Wenn

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + |c_\nu| \cdot \max_{0<t<1} |h'_\nu(t)|) = \Lambda \tag{33}$$

gesetzt wird, so ist für alle n und für t in $\langle 0, 1 \rangle$

$$0 < S'_n(t) < \Lambda < \infty. \tag{34}$$

Wegen der Konvergenz des Produktes ist der Grenzwert $\Phi'(x)$ von Null verschieden, und zwar positiv als Grenzwert der positiven Größen $\varphi'_n(x)$. $\Phi(x)$ ist also eine wachsende Funktion.

Es bleibt noch die Konvergenz der höheren Ableitungen zu untersuchen. Die k-te Ableitung von φ_n ist

$$D^k \varphi_n(x) = D_x^k S_n(\varphi_0(x)) = \sum_{\lambda=1}^{k} D^\lambda S_n(\varphi_0(x)) \cdot D_{k\lambda} \varphi_0(x);$$

weil nun $\varphi_0(x)$ linear in x ist, so zieht sich die Summe auf das Glied mit $\lambda = k$ zusammen:

$$D^k \varphi_n(x) = D_{k\,k} \varphi_0(x) \cdot D^k S_n(t),$$

und zu prüfen ist, ob der zweite Faktor für $n \to \infty$ gleichmäßig in $\langle 0, 1 \rangle$ konvergiert. Nun ist wegen (10a)

$$D^k S_n(t) = \sum_{(\lambda)} D_{\lambda_0 \lambda_1} s_1 \cdot D_{\lambda_1 \lambda_2} s_2 \cdots D_{\lambda_{n-1} \lambda_n} s_n, \tag{35}$$

zu erstrecken über alle $\binom{n+k-2}{k-1}$ verschiedenen Zusammenstellungen $(\lambda) = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, welche mit den Ungleichungen

$$k = \lambda_0 \geqq \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_{n-1} \geqq \lambda_n = 1$$

verträglich sind. Demnach ist auch

$$|D^k S_n| \leqq \sum_{(\lambda)} |D_{\lambda_0 \lambda_1} s_1| \cdots |D_{\lambda_{n-1} \lambda_n} s_n|. \tag{36}$$

Hierin bedeutet nach der Formel von Faa di Bruno

$$D_{\mu,s} = \sum_{(\eta)} \mu! \frac{1}{\eta_1!} (s')^{\eta_1} \cdot \frac{1}{\eta_2!} \left(\frac{s''}{2!}\right)^{\eta_2} \cdot \frac{1}{\eta_3!} \left(\frac{s'''}{3!}\right)^{\eta_3} \cdots,$$

zu erstrecken über alle Zusammenstellungen $(\eta) = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$ aus ganzen nichtnegativen Zahlen, für welche die beiden Bedingungen erfüllt sind

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \cdots = \nu; \quad 1\,\eta_1 + 2\,\eta_2 + 3\,\eta_3 + \cdots = \mu.$$

Mit $D^*_{\mu\nu}\,s$ werde nun der Ausdruck bezeichnet, den man aus $D_{\mu\nu}\,s$ erhält, wenn man in dieser Darstellung die erste Ableitung s' durch 1, alle höheren Ableitungen durch ihren Betrag ersetzt. Es ist also

$$(37) \qquad D^*_{\mu\nu}\,s = \sum_{(\eta)} \mu! \cdot \frac{1}{\eta_1!} \cdot \frac{1}{\eta_2!}\left(\frac{1}{2!}|s''|\right)^{\eta_2} \cdot \frac{1}{\eta_3!}\left(\frac{1}{3!}|s'''|\right)^{\eta_3} \cdots,$$

worin die Summe über dieselben Zusammenstellungen (η) auszudehnen ist. Dann gilt offenbar die Abschätzung

$$|D_{\lambda_{\nu-1}\lambda_\nu} s_\nu| \leqq (1 + |c_\nu\, h_\nu(t)|)^k \cdot D^*_{\lambda_{\nu-1}\lambda_\nu}\, s_\nu.$$

Hier ist der zweite Faktor nur dann von 1 verschieden, wenn $\lambda_{\nu-1} > \lambda_\nu$. Bei einer bestimmten Zusammenstellung (λ) ist das höchstens $(k-1)$-mal der Fall; die betreffenden Faktoren dieses Gliedes in (35) seien $\ldots D_{\alpha\beta}\,s_\mu \ldots D_{\beta\gamma}\,s_\nu \ldots$, wobei $\ldots < \mu < \nu < \cdots$ und $\cdots > \alpha > \beta > \gamma > \cdots$ sein muß. Das entsprechende Glied auf der rechten Seite von (36) läßt sich dann abschätzen durch

$$|D_{\lambda_0\lambda_1} s_1| \cdots |D_{\lambda_{n-1}\lambda_n} s_n| \leqq \prod_{\nu=1}^{n} (1 + |c_\nu\, h_\nu|)^k \{\ldots D^*_{\alpha\beta}\, s_\mu \cdot D^*_{\beta\gamma}\, s_\nu \ldots\}.$$

Dieselbe Zeigerfolge $(n, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots 1)$ kommt nun in (36) mit allen möglichen Folgen $(\ldots, \mu, \nu, \ldots)$ vor, für welche die Ungleichungen gelten $(1 \leqq) \cdots < \mu < \nu < \cdots (\leqq n)$. Berücksichtigt man noch alle (der Anzahl nach 2^{k-2}) verschiedenen Zeigerfolgen $(\ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, so erhält man sämtliche Glieder von (36). Mithin fließt aus (36) die Abschätzung

$$|D^k S_n| \leqq \prod_{\nu=1}^{n} (1 + |c_\nu\, h_\nu|)^k \cdot \sum_{\ldots\alpha,\beta\ldots} \sum_{\ldots\mu<\nu\ldots} \{\cdots D^*_{\alpha\beta}\, s_\mu \cdot D^*_{\beta\gamma}\, s_\nu \cdots\}.$$

Die rechte Seite wird weiter vergrößert, wenn man die einschränkenden Bedingungen $\cdots < \mu < \nu < \cdots$ fallen läßt; dann kann jeder Faktor für sich summiert werden. In Verbindung mit (34) folgt nun

$$(38) \qquad |D^k \varphi_n(x)| \leqq \Lambda^k \cdot \sum_{\ldots\alpha,\beta\ldots} \ldots (\sum_\nu D^*_{\alpha\beta}\, s_\nu)(\sum_\nu D^*_{\beta\gamma}\, s_\nu) \ldots.$$

Der Faktor von Λ^k ist eine Summe von 2^{k-2} Produkten aus je höchstens $k-1$ Faktoren der Form $\sum_\nu D^*_{\alpha\beta}\, s_\nu$; wenn bei $n \to \infty$ diese Faktoren konvergieren, dann auch die linke Seite von (38). Und da zufolge (21), (30), (31) eine Summe wie

$$\sum_\nu |s_\nu^{(m)}(\varphi_{\nu-1}(x))|$$

für $m > 1$ gleichmäßig in $\langle x_0, x_1 \rangle$ konvergent ist, so gilt das erst recht für eine Summe über Produkte von höheren Ableitungen der s, wie sie die Faktoren $\sum D^*_{\alpha\beta} s_\nu$ in (38) nach (37) darstellen.

Die Folge der k-ten Ableitungen $D^k \varphi_n(x)$ konvergiert also absolut und gleichmäßig in $\langle x_0, x_1 \rangle$, strebt mithin gegen die (hiernach vorhandene) k-te Ableitung der Grenzfunktion $\Phi(x)$: d. h. $\Phi(x)$ ist vollableitbar. Da alle $\varphi_n(x)$ die Abelsche Gleichung (3) erfüllen, so trifft sie auch für $\Phi(x)$ zu. $\Phi(x)$ ist also eine vollableitbare Stufungsfunktion für das (dabei gleichfalls vollableitbar vorausgesetzte) $f(x)$; ihre Werte sind aus denen im Hauptabschnitt nach einer der Formeln

$$\varphi\left(f^{[m]}(x)\right) = \varphi(x) \quad \text{für alle ganzen } m \text{ und } x_0 \leqq x \leqq x_1,$$

oder anders geschrieben:

$$\varphi(x) = m + \varphi\left(f^{[-m]}(x)\right) \quad \text{für alle ganzen } m \text{ und } x_m \leqq x \leqq x_{m+1}$$

zu berechnen. Satz 2 ist damit vollständig bewiesen. Von dieser Funktion $\varphi(x)$ kann man nach Satz 1 mit einer gleichfalls vollableitbaren Substitution $s(t)$ zu jeder anderen vollableitbaren Stufungsfunktion für $f(x)$ gelangen.

§ 4.

Die Ableitungen der Zwischenfunktionen, ausgedrückt durch die Ableitungen der Stufungsfunktion.

Es sei $\varphi(x)$ eine mehrfach ableitbare Stufungsfunktion zu $f(x)$. Die Zwischenfunktion k-ter Stufe $f^{[k]}(x)$ ist dann durch (4) erklärt; diese Beziehung läßt sich zerlegen in

$$y = f^{[k]}(x); \quad y = \varphi^{[-1]}(z); \quad z = k + u; \quad u = \varphi(x).$$

Die n-te Ableitung von $f^{[k]}(x)$ wird, falls vorhanden, gegeben durch

$$D^n f^{[k]}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi^{[-1](\nu)}(z) \cdot D_{n\nu}\, \varphi(x). \tag{39}$$

Von den beiden Funktionen $\varphi^{[-1]}$ und φ, deren Ableitungen rechts vorkommen, läßt sich die zweite entbehren. Dazu wende man auf die Identität $x = \varphi^{[-1]}(\varphi(x))$ die Operatoren $D_{n\lambda}$ an $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$:

$$0 = \sum_{\nu=\lambda}^{n} D_{n\nu}\, \varphi(x) \cdot D_{\nu\lambda}\, \varphi^{[-1]}(u) \quad (\lambda = 1, \ldots, n-1);$$

$$1 = D_{nn}\, \varphi(x) \cdot D_{nn}\, \varphi^{[-1]}(u).$$

Mit (39) sind das $n+1$ Gleichungen für die n Größen $D_{n\nu}\varphi(x)$, und die Determinante verschwindet daher. Daraus folgt[9])

$$D^n f^{[k]}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \left(\varphi^{[-1]\prime}(u)\right)^{-\binom{n+1}{2}} \cdot \mathrm{Det}\,|A_{ik}| \quad (i,k = 0, \ldots n-1)$$

mit den Elementen

$$A_{ik} = D_{i+1,1}\,\varphi^{[-1]}(z) \quad \text{für } k = 0; \quad A_{ik} = D_{i+1,k}\,\varphi^{[-1]}(u)$$
$$\text{für } 1 \leqq k \leqq i+1; \quad A_{ik} = 0 \quad \text{für } i+1 < k \leqq n-1.$$

Die Spalten $k = 2, \ldots n-1$ dieser Determinante lassen sich durch geeignete Linearkombinationen in Spalten mit Ableitungsoperatoren nur ersten Grades überführen[10]), so daß man erhält

$$\text{(40a)} \quad D^n f^{[k]}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n-2)!} \cdot \left(\varphi^{[-1]\prime}(u)\right)^{-2n+1} \cdot \mathrm{Det}\,|C_{ik}^{(n)}| \quad (i,k = 0, \ldots n-1),$$

wobei die Elemente dieser Determinante sind

$$\text{(40b)} \quad C_{ik}^{(n)} = D^{i+1}\,\varphi^{[-1]}(z) \quad \text{für } k = 0; \quad C_{ik}^{(n)} = 0 \quad \text{für } i+1 < k \leqq n-1;$$
$$C_{ik}^{(n)} = \alpha_{ik}^{(n)} \cdot D^{i-k+2}\,\varphi^{[-1]}(u) \quad \text{für } 1 \leqq k \leqq i+1$$

mit

$$\text{(40c)} \quad \alpha_{ik}^{(n)} = 1 \text{ für } k = 1; \quad \alpha_{ik}^{(n)} = n \cdot \binom{i}{k-1} - \binom{i+1}{k-1} \text{ für } 2 \leqq k \leqq i+1.$$

Es ist ebensowohl möglich, in (39) $\varphi^{[-1]}(x)$ zugunsten von $\varphi(x)$ auszuscheiden. Eine solche nur die Ableitungen von $\varphi(x)$ enthaltende Darstellung in Determinantenform läßt sich erhalten, indem man die Operatoren $D_{\lambda 1}$ auf die Gleichung $y = \varphi^{[-1]}\left(\varphi(y)\right)$ anwendet:

$$1 = \varphi^{[-1]\prime}(z) \cdot \varphi'(y);$$
$$0 = \sum_{\iota=1}^{\lambda} \varphi^{[-1]\,(\iota)}(z) \cdot D_{\lambda\iota}\,\varphi(y) \quad (\lambda = 2, \ldots, n).$$

Es kommt dann heraus

$$\text{(41a)} \quad D^n f^{[k]}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \left(\varphi'(y)\right)^{-\binom{n+1}{2}} \cdot \mathrm{Det}\,|B_{ik}^{(n)}| \quad (i,k = 1, \ldots, n)$$

mit

$$\text{(41b)} \quad B_{ik}^{(n)} = D_{i+1,k}\,\varphi(y) \quad \text{für } 1 \leqq i \leqq n-1,\ 1 \leqq k \leqq i+1;$$
$$B_{ik}^{(n)} = 0 \quad \text{für } i+1 < k \leqq n; \quad B_{ik}^{(n)} = D_{nk}\,\varphi(x) \quad \text{für } i = n.$$

Diese Determinante läßt sich jedoch nicht weiter vereinfachen.

---

[9]) Diese Darstellung ist in anderer Bezeichnung schon öfters angegeben worden, z. B. von F. G. Teixeira, Giorn. mat. Battaglini 18 (1880), S. 301–309.

[10]) Nach Fortlassung der in der obersten Zeile stehenden Nullen stimmen diese Spalten völlig mit denen der Determinante in K (15) überein; es lassen sich also hier dieselben Umformungen anwenden, die dort zur Determinante (19) führen.

§ 5.

Zur Stufung vollmonotoner Funktionen.

Eine Funktion $g(x)$ pflegt „r-fach monoton" bzw. „vollmonoton" genannt zu werden, wenn das Vorzeichen ihrer Ableitungen für $n = 1, 2, \ldots r$ bzw. für alle $n = 1, 2, \ldots$ durch die Ungleichungen $(-1)^n \cdot D^n g(x) > 0$ bestimmt ist. Im folgenden handelt es sich um Funktionen, deren Ableitungen positiv sind und $(r-1)$-fach bzw. vollmonoton. Dafür eine kurze Bezeichnung:

Erklärung 3. Eine Funktion $f(x)$ heißt „r-fach monoton steigend" bzw. „vollmonoton steigend", wenn sie r-mal stetig ableitbar bzw. vollableitbar ist und für $n = 1, \ldots, r$ bzw. für alle $n = 1, 2, \ldots$ gilt $(-1)^n \cdot D^n f(x) < 0$.

Über solche Funktionen gilt

Satz 3. *Sind $f(x)$ und $g(x)$ r-fach (bzw. voll-) monoton steigende Funktionen, so trifft dies auch für $h(x) = f(g(x))$ zu.*

Der Beweis ergibt sich sofort aus der Formel $D^n h(x) = \sum_{\nu=1}^{n} D^\nu f(g) \cdot D_{n,\nu} g(x)$, weil nach der Voraussetzung $D^\nu f(g)$ das Zeichen $(-1)^{\nu-1}$ und $D_{n,\nu} g(x)$ das Zeichen $(-1)^{n-\nu}$ hat (man beachte die Formel von Bruno!). — Aus Satz 3 fließt sogleich

Satz 4. *Ist $g(x)$ eine r-fach (bzw. voll-) monoton steigende Funktion, dann sind es auch alle natürlichen Stufungen von $g(x)$.*

Aus dieser Feststellung entspringt nun die Forderung, daß auch alle Zwischenfunktionen positiver Stufe, also alle „Aufstufungen" von $g(x)$, ebenso wie $g(x)$ selbst r-fach monoton oder vollmonoton steigen sollen. Nun hat man ferner [11])

Satz 5. *Ist $g(x)$ r-fach (bzw. voll-) monoton steigend, so sind die Ableitungen von $g^{[-1]}(x)$ bis zur Ordnung r (bzw. jeder Ordnung) positiv.*

Um auch bei unendlichem Grundabschnitt ($b = +\infty$) nicht zur dritten Eigenschaft einer S-Funktion (Erkl. 1) in Widerspruch zu geraten, sei im folgenden angenommen, daß $g(x)$ r-fach (oder voll-) monoton steige und daß $g^{[-1]}(x)$ zur Klasse S gehöre, also $g(x) < x$ sei. Welche besonderen Eigenschaften muß dann die Stufungsfunktion $\varphi(x)$ zu $g^{[-1]}(x)$ aufweisen, damit die obige Forderung erfüllt werde? Aus Formel (41) läßt sich sofort antworten:

---

[11]) Der Beweis läßt sich, ähnlich wie oben der für Satz 3, mit der Formel K (21) führen.

Satz 6. *$f(x)$ gehöre zu S, $f^{[-1]}(x)$ steige vollmonoton, $\varphi(x)$ sei eine vollmonotone Stufungsfunktion zu $f(x)$. Damit dann die durch diese Stufungsfunktion zu bildenden Aufstufungen von $f^{[-1]}(x)$, das sind die Zwischenfunktionen $f^{[k]}(x)$ mit $k < 0$, gleichfalls vollmonoton steigen, ist es notwendig und hinreichend, daß $\varphi(x)$ die Bedingungen*

$$\operatorname{Det}|B_{ik}^{(n)}| > 0 \quad (i, k = 1, \ldots, n) \quad \text{für alle Paare } (x, y) \text{ mit } x > y$$

für $n = 2, 3, \ldots$ erfülle. — Ersetzt man „vollmonoton" durch „r-fach monoton", so sind diese Bedingungen nur für $n = 2, 3, \ldots r$ zu stellen.

Hier werden also die Ableitungen der Stufungsfunktion an zwei Stellen x und $y = f^{[k]}(x)$ miteinander verknüpft. Doch vermag man diese Bedingungen so umzugestalten, daß nur die Ableitungen an einer Stelle darin auftreten. Für $x = y$ verschwindet die Determinante, weil die beiden letzten Zeilen dann übereinstimmen. Zieht man nun von der letzten Zeile die vorletzte ab, teilt durch die positive Größe $x - y$ und geht zur Grenze $x \to y$ über, so entsteht in der letzten Zeile die Ableitung der vorletzten. Der Wert dieser neuen Determinante kann als Grenzwert positiver Werte nicht negativ sein; daher muß die Stufungsfunktion notwendig die Ungleichungen

$$\operatorname{Det}|E_{ik}^{(n)}| \geqq 0 \quad (i, k = 1, \ldots, n;\ n = 2, 3, \ldots) \tag{42}$$

mit

$$E_{ik}^{(n)} = D_{i+1,k}\,\varphi(x) \quad \text{für } 1 \leqq i \leqq n-1,\ 1 \leqq k \leqq i+1;$$
$$E_{ik}^{(n)} = 0 \quad \text{für } i+2 \leqq k \leqq n;\quad E_{ik}^{(n)} = D\big(D_{n,k}\,\varphi(x)\big) \quad \text{für } i = n$$

befriedigen. Diese Determinanten lassen sich aber noch vereinfachen. Für jede genügend oft ableitbare Funktion $\varphi(x)$ gilt [12])

$$D_{i+1,k}\,\varphi = \sum_{\lambda=k}^{i+1} D_{\lambda-1,k-1}\,\varphi \cdot \binom{i}{\lambda-1} D_{i-\lambda+2,1}\,\varphi \quad (i+1 \geqq k > 1). \tag{43}$$

Nun ist $\binom{i}{\lambda-1} = 0$ für $1 \leqq i \leqq n-1$, wenn $\lambda > i+1$. Die Formel (43) kann also für alle Fälle mit $1 \leqq i \leqq n-1$, $2 \leqq k \leqq n$ angewandt werden. Für $i = n$ bringe man das letzte Glied ($\lambda = i+1 = n+1$) mit auf die linke Seite und hat dann für $i = n$, $2 \leqq k \leqq n$:

$$D\,(D_{n,k}\,\varphi) = D_{n+1,k}\,\varphi - D_{n,k-1}\,\varphi \cdot D_{11}\,\varphi \tag{44}$$
$$= \sum_{\lambda=k}^{n} D_{\lambda-1,k-1}\,\varphi \cdot \binom{n}{\lambda-1} D_{n-\lambda+2,1}\,\varphi.$$

Erklärt man jetzt

$$F_{ik} = \binom{i}{k-1} D^{i-k+2}\,\varphi(x),$$

---

[12]) Folgt aus K(13), wenn dort k, $\varkappa$, n, ν durch $i+1$, $\lambda-1$, k, 1 ersetzt werden.

so lassen sich nach (43) und (44) alle Elemente von (42) aus diesen neuen Größen zusammensetzen nach der Formel[13])

$$E_{ik}^{(n)} = \sum_{\lambda=1}^{n} D_{\lambda-1,k-1}\, \varphi(x) \cdot F_{i\lambda} \quad (i, k = 1, \ldots, n).$$

Da in dieser Summe der erste Faktor nicht von der Zeilennummer i abhängt, so sind die Spalten $E_{ik}^{(n)}$ linear aus den Spalten F_{ik} zusammengesetzt. Nach Unterdrückung einer Potenz des stets positiven Faktors $\varphi'(x)$ bleibt an Stelle von (42) als notwendige Bedingung, daß $\mathrm{Det}\,|F_{ik}| \geqq 0$ sein muß. Das ist

Satz 7. *$f(x)$ gehöre zu S; $f^{[-1]}(x)$ steige vollmonoton. Wenn auch alle Aufstufungen von $f^{[-1]}(x)$ vollmonoton steigen sollen, so muß die Stufungsfunktion $\varphi(x)$ zu $f(x)$ die Bedingungen erfüllen*

$$\text{(45)} \qquad \mathrm{Det}\left|\binom{i}{k-1} \cdot D^{i-k+2}\varphi(x)\right| \geqq 0 \quad (i, k = 1, \ldots, n;\ n = 2, 3, \ldots).$$

Im Falle r-fach monotonen Steigens ist (45) nur für $n = 2, \ldots r$ zu fordern. — Ob das Gleichheitszeichen wirklich eintreten kann, ist noch nicht ausgemacht. Läßt man es aber fort, so erhält man eine hinreichende Bedingung:

Satz 8. *$f(x)$ sei eine S-Funktion. Die Stufungsfunktion $\varphi(x)$ zu $f(x)$ erfülle die Bedingungen*

$$\text{(46)} \qquad \mathrm{Det}\left|\binom{i}{k-1} D^{i-k+2}\varphi(x)\right| > 0 \quad (i, k = 1, \ldots, n;\ n = 2, 3, \ldots)$$

Dann steigen alle Abstufungen von $f(x)$ vollmonoton.

Beweis. Es sei $\langle c, d\rangle$ ein abgeschlossener Teilabschnitt des Grundabschnitts (a, β), in welchem $\varphi(x)$ erklärt ist, und $N(>1)$ eine ganze Zahl. Sind die Ungleichungen erfüllt, so sind für $x = y$, x in $\langle c, d\rangle$ alle Ableitungen der $\mathrm{Det}\,|B_{ik}^{(n)}|$ von Satz 6 positiv: $\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{Det}\,|B_{ik}^{(n)}|\,(y, x)|^{x=y} > 0$. Aus Stetigkeitsgründen gibt es dann ein $\varepsilon > 0$, so daß diese Ungleichungen für $n \leqq N$ auch noch für $c \leqq y \leqq x \leqq d$, $0 \leqq x - y \leqq \varepsilon$ erfüllt sind. Da nun $\mathrm{Det}\,|B_{ik}^{(n)}|\,(y, y) = 0$, so folgt $\mathrm{Det}\,B_{ik}^{(n)}|(y, x)| > 0$ für $c \leqq y < x \leqq y + \varepsilon \leqq d$, $n \leqq N$. Nach Satz 6 sind dann für $0 < k \leqq \varepsilon$, $f^{[k]}(c) \leqq x \leqq d$ die Zwischenfunktionen $f^{[-k]}(x)$ N-fach monoton steigend. Aus Satz 3 in Verbindung mit dem ersten der Stufungsgesetze (2) ergibt sich weiter, daß alle im Abschnitt $\langle c, d\rangle$ zu bildenden Abstufungen von $f(x)$ N-fach monoton steigen, d. h. alle $f^{[-k]}(x)$ mit $0 < k < \varphi(d) - \varphi(c)$. In dieser Feststellung kommt die Zahl N nicht mehr vor (in der vorhergehenden noch, weil ε im

[13]) Dabei ist zu bedenken, daß nach K (7) $D_{00}\varphi = 1$; $D_{10}\varphi = D_{20}\varphi = \cdots = 0$.

allgemeinen von N abhängen wird); sie gilt also für jedes N, und das bedeutet Vollmonotonie: $f^{[-k]}(x)$ steigt vollmonoton für $0 < k < \varphi(d) - \varphi(c)$, $f^{[k]}(c) \leqq x \leqq d$. Nun kann der Teilabschnitt $\langle c, d\rangle$ innerhalb von (a, β) beliebig groß gewählt werden, so daß in der letzten Behauptung (a, β) an Stelle von $\langle c, d\rangle$ gesetzt werden darf. Somit ist festgestellt: $f^{[-k]}(x)$ steigt vollmonoton für $0 < k < \sigma_f$, $f^{[k]}(a) < x < \beta$. Damit ist Satz 8 bewiesen.

In Satz 6 ist die Voraussetzung, daß $f^{[-1]}(x)$ vollmonoton steigen solle, offenbar notwendig, damit $\varphi(x)$ den dort angegebenen Ungleichungen genügen kann. Es ist anzunehmen, daß diese Voraussetzung auch ausreichend ist, daß also folgende Vermutung wahr ist:

Vermutung 1. Wenn $f(x)$ zu S gehört und $f^{[-1]}(x)$ vollmonoton steigt, so gibt es genau eine Stufungsfunktion $\varphi(x)$ zu $f(x)$, welche die Ungleichungen von Satz 6 (bzw. Satz 8) erfüllt.

Gleichbedeutend damit ist die zweite Vermutung, die zunächst weniger zu besagen scheint[14]):

Vermutung 2. Steigt $g(x)$ vollmonoton, dann gibt es genau eine vollmonoton steigende Funktion $h(x)$, so daß $h^{[2]}(x) = h\big(h(x)\big) = g(x)$.

Daß V. 2 aus V. 1 folgt, ist klar. Umgekehrt: Nach Wahl des Nullpunktes x_0 für die Stufungsfunktion $\varphi(x)$ zu $f(x) = g^{[-1]}(x)$ sind alle Abszissen x_n zu den Ordinaten $\varphi(x_n) = n$ festgelegt. Trifft nun die Vermutung 2 zu, so sind auch durch $x_{n-0,5} = h(x_n)$ die Abszissen zu den Ordinaten $n - 0{,}5 = \varphi(x_{n-0,5})$ eindeutig festgelegt, also insgesamt alle Abszissen zu den Ordinaten $\varphi(x) = m \cdot 2^{-1}$, wo m irgendeine ganze Zahl ist. Bildet man jetzt nach Vermutung 2 die durch $h_2\big(h_2(x)\big) = h(x)$, also $h_2^{[4]}(x) = g(x)$ bestimmte vollmonoton steigende Funktion $h_2(x)$, so lassen sich durch diese weiter die Abszissen zu allen Ordinaten $m \cdot 2^{-2}$ berechnen. Durch Wiederholung dieses Schlusses ergibt sich, daß die Abszissen zu allen Ordinaten $m \cdot 2^{-n}$ festliegen. Da nun diese Dualbrüche überall dicht liegen, so ist $\varphi(x)$ wegen seiner Stetigkeit überall erklärt und hat dabei die Eigenschaft, daß die daraus zu bildenden Abstufungen $f^{[-k]}(x)$ jedenfalls für $k = m \cdot 2^{-n}$ (m, n natürliche Zahlen) vollmonoton steigen. Weil aber $f^{[-k]}(x)$ zufolge (4) auch in k stetig ist, so kommt diese gewünschte Eigenschaft allen Abstufungen $f^{[-k]}(x)$ mit $k > 0$ zu. Es genügt also, nach Vermutung 2 eine Funktion $g(x)$ eindeutig vollmonoton zur Hälfte stufen zu können, damit es zu $g^{[-1]}(x)$ eine Stufungsfunktion gibt, die den Bedingungen

---

[14]) Für die Funktion $g(x) = \log \text{nat}\, x$, auf welche die Voraussetzung der Vermutung 2 zutrifft, haben Herr Prof. MEIDELL und Herr Dr. GOTAAS (Oslo) eine sechsstellige Tafel der Funktion $g^{[0,5]}(x) = \text{hln}\, x$ („Halblogarithmus") auf Grund dieser Monotonieforderungen berechnet.

von Satz 7 (bzw. Satz 8) genügt — und umgekehrt. Da vollmonotone Funktionen analytisch sind [15]), so ergäbe sich dann auch eine ausgezeichnete analytische Stufungsfunktion. Ob es allgemein zu reellen analytischen S-Funktionen jeweils eine ausgezeichnete analytische Stufungsfunktion gibt, entsprechend den „Hauptlösungen" der linearen Differenzengleichungen, ist wohl noch nicht entschieden — an sich lassen sich nach Satz 1 aus einer analytischen Stufungsfunktion unendlich viele herstellen, wenn nur die Substitution $s(t)$ analytisch ist.

[15]) G. Grüss, Math. Zeitschr. 39 (1935), S. 732–741

(Eingegangen am 28. Mai 1943.)

Über Shodasche Matrizen und Polynome in einer Matrix.

Von

Edwin Wagner, z. Z. im Felde.

Einleitung.

Wir betrachten quadratische Matrizen von n Zeilen und Spalten, deren Elemente einem kommutativen Körper $\mathfrak{K}$ der Charakteristik 0 angehören

Die Eigenschaft eines Matrizenpaares A, B, die Gleichung

$$A = f(B) \tag{1}$$

zu erfüllen, wo $f(t)$ ein gegebenes Polynom des Ringes $\mathfrak{K}[t]$ bedeutet, bleibt erhalten bei gleichzeitiger Transformation beider Matrizen des Paares mit der gleichen Transformationsmatrix T. Fassen wir also alle geordneten Matrizenpaare A, B, die aus einem festen Paare A_0, B_0 durch gleichzeitige Transformation

$$\begin{aligned} A &= TA_0T^{-1}, \\ B &= TB_0T^{-1} \end{aligned} \tag{2}$$

entstehen, zu einer Klasse zusammen, so können wir sagen: Die Eigenschaft, der Gleichung (1) zu genügen, ist Klasseneigenschaft und muß sich als solche an geeigneten Klasseninvarianten ablesen lassen.

Die Frage der Klassifikation der Matrizenpaare A, B ist durch die Arbeit von S. Kantor über „Die Äquivalenz von linearen ∞^2-Schaaren bilinearer Formen“ (Sitzungsber. der Bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 98, 1897) im wesentlichen gelöst. Bequemere Invarianten für den hier allein in Frage kommenden Fall vertauschbarer Matrizen liefern indessen die Shodaschen Matrizen der Paare vertauschbarer Matrizen, wie im folgenden gezeigt werden soll.

§ 1.

S-Ideale und Shodasche Matrizen.

Gegeben sei ein System von Polynomen des Ringes $\mathfrak{K}[t]$ mit dem höchsten Koeffizient 1, von denen jedes folgende Teiler des vorhergehenden ist:

$$\begin{aligned} &a_0(t),\quad a_1(t), \ldots a_{s-1}(t) \\ &a_i(t) \mid a_{i-1}(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Unter einer zur Reihe (3) gehörigen SHODAschen Matrix (Sh. M.) verstehen wir eine quadratische Matrix von s Zeilen und Spalten, deren Elemente $g_{ij}(t)$ Polynome des Ringes $\mathfrak{R}[t]$ sind, wobei $g_{ij}(t)$ teilbar ist durch $\frac{a_j}{a_i}$, wenn $j < i$.

$$(4)\quad \mathsf{B} = \begin{Bmatrix} h_{00}(t) & h_{01}(t) & h_{02}(t) & \dots & h_{0,s-1}(t) \\ \frac{a_0}{a_1} h_{10}(t) & h_{11}(t) & h_{12}(t) & \dots & h_{1,s-1}(t) \\ \frac{a_0}{a_2} h_{20}(t) & \frac{a_1}{a_2} h_{21}(t) & h_{22}(t) & \dots & h_{2,s-1}(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots & & & & \\ \frac{a_0}{a_{s-1}} h_{s-1,0}(t) & \frac{a_1}{a_{s-1}} h_{s-1,1}(t) & \frac{a_2}{a_{s-1}} h_{s-1,2}(t) & \dots & h_{s-1,s-1}(t) \end{Bmatrix}.$$

Matrizen der Gestalt (4) treten in der Literatur wohl zum erstenmal in der Arbeit von K. SHODA[1]), „Über die mit einer Matrix vertauschbaren Matrizen" [Math. Zeitschr. Bd. 29, S. 700, Gleichung (1)] auf, wo gezeigt wird, daß jeder Automorphismus B einer Elementarteilergruppe $\mathfrak{A}_A$ mit dem Operatorenbereich $\mathfrak{R}_A = \mathfrak{R}[A]$ (siehe W. KRULL, Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen. Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wissensch., Jahrg. 1926) durch eine Matrix der Form (4) eindeutig bestimmt ist. Ein ähnliches Resultat enthält die Arbeit von O. SCHREIER und B. L. VAN DER WAERDEN, „Die Automorphismen der projektiven Gruppe" (Abh. aus dem Mathem. Seminar der Hamburger Universität, Bd. 6).

Der tiefere Grund für das Auftreten der Matrix (4) ist aber idealtheoretischer Natur, wie im folgenden gezeigt wird:

Wir betrachten jene vom Einheitsideal verschiedenen Ideale des Polynomringes $\mathfrak{R}[x, t]$, welche sowohl ein Polynom $u(t)$, welches nur von t, als auch ein Polynom $v(t, x)$, dessen Koeffizient bei der höchsten x-Potenz nicht von t abhängt, enthalten. Solche Ideale seien zur Abkürzung S-Ideale genannt (S-I.). Sie sind offenbar die nulldimensionalen Ideale von $\mathfrak{R}[x, t]$. Zwischen S-I und Sh.M. besteht eine einfache Beziehung, wie der folgende Satz zeigt:

1. Satz. *Jedes S-Ideal des Ringes $\mathfrak{R}[x, t]$ wird durch eine SHODAsche Matrix eindeutig bestimmt und jede SHODAsche Matrix bestimmt eindeutig ein S-Ideal.*

Beweis. 1. Sei $\mathfrak{a}$ ein S-I. des Ringes $\mathfrak{R}[x, t]$. Es besitzt eine endliche Basis. Wir führen nach dem im folgenden geschilderten Verfahren eine „ausgezeichnete $\mathfrak{a}$-Basis" ein: a) $\mathfrak{a}$ enthält nach Voraussetzung Polynome $f(t)$,

[1]) Siehe außerdem: K. SHODA, Über die Automorphismen einer endlichen Abelschen Gruppe. Math. Annalen **100**, und K. SHODA, Über die charakteristischen Untergruppen einer endlichen Abelschen Gruppe. Math. Zeitschr. **31**.

die von x nicht abhängen. Dasjenige unter ihnen $-f_0(t)-$, das einen möglichst niedrigen Grad in t besitzt, ist bis auf einen Faktor aus $\mathfrak{R}$ eindeutig bestimmt und soll so normiert werden, daß der höchste Koeffizient das Einselement von $\mathfrak{R}$ wird. Alle anderen Polynome $f(t)$ von $\mathfrak{a}$ sind dann Vielfache von $f_0(t)$.

b) $\mathfrak{a}$ enthält Polynome vom ersten Grad in x, $f_1(t, x) = a_1(t) \cdot x + p_{10}(t)$. Durch die Forderung, daß $a_1(t)$ in t von möglichst niedrigem Grade und sein höchster Koeffizient das Einselement von $\mathfrak{R}$ sei, ist $f_1(t, x)$ bis auf Vielfache von $f_0(t)$ bestimmt. Diese Unbestimmtheit durch zusätzliche Forderung an $p_{10}(t)$ wegzuschaffen, ist nicht zweckmäßig.

c) $\mathfrak{a}$ enthält Polynome vom zweiten Grade in x:

$$f_2(t, x) = a_2(t)x^2 + p_{21}(t) \cdot x + p_{20}(t).$$

Durch die Forderung, daß $a_2(t)$ in t von möglichst niedrigem Grade und sein höchster Koeffizient das Einselement sei, ist $f_2(t, x)$ bis auf Vielfache von $f_1(t, x)$ und $f_0(t)$ bestimmt.

d) Schließlich kommt man nach endlich viel Schritten zu einem Polynom $f_s(t, x)$, das als erstes einen von t freien Koeffizienten bei der höchsten Potenz von x enthält, der wieder als das Einselement angenommen wird, wodurch

$$f_s(t, x) = x^s + p_{s,s-1}(t) \cdot x^{s-1} + \cdots + p_{s,0}(t) \tag{5}$$

bis auf Vielfache der $f_i(t, x)$, $(i = 0, 1, \ldots, s-1)$ bestimmt wird. Das Verfahren endet spätestens bei dem nach Voraussetzung existierenden Polynom $v(t, x)$.

Ist $f(t, x)$ ein beliebiges Polynom aus $\mathfrak{a}$, so dividieren wir es durch $f_s(t, x)$ und erhalten einen Teilquotienten $q_s(t, x)$ und einen Rest $g_{r_1}(t, x)$ vom Grade $r_1 < s$ in x; darauf dividieren wir den Koeffizienten bei der höchsten x-Potenz von $g_{r_1}(t, x)$ durch $a_{r_1}(t)$ und erhalten einen Quotienten $q_{r_1}(t)$ und den Rest 0, weil sonst $g_{r_1}(t, x) - q_{r_1}(t) \cdot f_{r_1}(t, x)$ ein Polynom vom Grade r_1 in x mit einem Koeffizient bei x^{r_1} von noch niedrigerem Grade als $a_{r_1}(t)$ in t wäre, gegen die über f_{r_1} getroffene Voraussetzung.

$g_{r_2}(t, x) = g_{r_1}(t, x) - q_{r_1}(t) \cdot f_{r_1}(t, x)$ ist also in x vom Grade $r_2 < r_1$. Wir dividieren seinen Koeffizient bei x^{r_2} durch $a_{r_2}(t)$, erhalten den Quotient $q_{r_2}(t)$ und den Rest 0 usw. Auf diese Weise gewinnen wir für $f(t, x)$ eine Darstellung

$$f(t, x) = q_s(t, x) \cdot f_s(t, x) + q_{r_1}(t) \cdot f_{r_1}(t, x) + q_{r_2}(t) \cdot f_{r_2}(t, x) + \cdots, \tag{6}$$

womit gezeigt ist, daß die Polynome

$$f_0(t),\ f_1(t, x),\ f_2(t, x), \ldots f_s(t, x) \tag{7}$$

tatsächlich eine Basis von $\mathfrak{a}$ bilden. Die Koeffizienten $q(t)$ der Darstellung (6) sind eindeutig.

Wenden wir Gleichung (6) auf das Polynom $f(t, x) = x \cdot f_i$ an, so erhalten wir

$$x \cdot f_i(t,x) = q_{i,i-1}(t) \cdot f_{i+1}(t, x) + h_{ii}(t) \cdot f_i(t, x) + \sum_{j=0}^{i-1} h_{ij}(t) \cdot f_j(t, x) \tag{8}$$
$$(i = 0, 1, \ldots s - 1).$$

Aus der Rekursionsformel (8) folgt zunächst

$$q_{i,i+1} \cdot a_{i+1} = a_i, \tag{9}$$

es ist also a_{i+1} Teiler von a_i, also auch alle a_k Teiler von $a_0 = f_0(t)$. Darauf sieht man, daß $f_i(t, x)$ den Teiler $a_i(t)$ enthält, also

$$f_i(t, x) = a_i(t) \cdot f_0^*(t, x); \quad f_i^* = 1 = \text{Einselement von } \mathfrak{R} \tag{10}$$
$$(i = 0, 1, \ldots, s - 1).$$

Setzt man (10) in (8) ein, und spaltet den gemeinsamen Faktor $a_i(t)$ ab, so erhält man

$$f_{i+1}^* + (h_{ii} - x) \cdot f_i^* + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{a_j}{a_i} h_{ij} \cdot (t) \cdot f_j^* = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, s - 1). \tag{11}$$

Da man aus den Gleichungen (9), (10), (11) umgekehrt wieder Gleichung (8) gewinnen kann, garantieren sie, daß die Polynome (7) eine ausgezeichnete Basis des von ihnen erzeugten Ideals, das sofort als S-Ideal kenntlich ist, abgeben [d. h. daß jedes Polynom des Ideals eindeutig nach (6) ausgedrückt werden kann].

Infolge der in ihrer Erklärung steckenden Unbestimmtheit sind zwar nicht die Polynome (7) an sich, wohl aber die Ideale $\mathfrak{a}_i = (f_0, f_1, \ldots f_i)$ durch $\mathfrak{a}$ eindeutig bestimmt.

Aus Gleichung (11) können die f_k^* durch die a_i und die h_{ij} leicht ausgedrückt werden; schreibt man (11) der Reihe nach für $i = 0, 1, 2, \ldots,$ $k - 1$ an, so erhält man ein Gleichungssystem, aus dem sich sofort ergibt:

$$f_k^*(t, x) = \pm \begin{vmatrix} h_{00} - x & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{a^0}{a_1} h_{10} & h_{11} - x & 1 & \ldots & 0 \\ \frac{a_0}{a_2} h_{20} & \frac{a_1}{a_2} h_{21} & h_{22} - x & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{a_0}{a_{k-1}} h_{k-1,0} & \frac{a_1}{a_{k-1}} h_{k-1,1} & \frac{a_2}{a_{k-1}} h_{k-1,2} & \ldots & h_{k-1,k-1,} - x \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Das S-Ideal $\mathfrak{a}$ ist also durch die Sh.M.

$$(12\,a)\quad \begin{Bmatrix} h_{00} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_0}{a_1} h_{10} & h_{11} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_0}{a_2} h_{20} & \frac{a_1}{a_2} h_{21} & h_{22} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_0}{a_{s-1}} h_{s-1,0} & \frac{a_1}{a_{s-1}} h_{s-1,1} & \frac{a_2}{a_{s-1}} h_{s-1,2} & \frac{a_3}{a_{s-1}} h_{s-1,3} & \dots & h_{s-1,s-1} \end{Bmatrix}$$

eindeutig bestimmt.

2. Ist nun umgekehrt eine zur Polynomreihe (3) gehörige Sh.M. B beliebig gegeben, so nennen wir den aus den ersten i Zeilen und Spalten von $\mathsf{B}_x = \mathsf{B} - x\,\mathsf{E}$ (E = Einheitsmatrix) gebildeten Hauptminor (mit dem Faktor ± 1) $f_i^*(t, x)$ und setzen mit $f_0^* = 1$

$$(10)\quad \begin{cases} f_i(t, x) = a_i(t) \cdot f_i^*(t, x) & (i = 0, 1, 2, \dots, s-1) \\ f_s(t, x) = f_s^*(t, x) \end{cases}$$

Das von den Polynomen

$$(7)\qquad f_0(t),\quad f_1(t, x),\quad f_2(t, x),\quad \dots\ f_s(t, x)$$

erzeugte Ideal ist offenbar ein S-Ideal. Wir zeigen, daß (7) eine ausgezeichnete Idealbasis bilden, indem wir — nach einer beim Beweis von 1. gemachten Anmerkung — das Bestehen der Gleichungen (9) und (11) nachweisen. Gleichung (9) gilt nach Voraussetzung [siehe (3)]; Gleichung (11) aber folgt aus bekannten Beziehungen über die Hauptminoren $f_i^*(t, x)$:

Bedeutet $H_k^{(i)}$ die Summe aller Hauptminoren k-ten Grades, die aus den ersten i Zeilen und Spalten von B gebildet werden können, und

$$D_k^{(i+1)} = H_k^{(i+1)} - H_k^{(i)} \qquad (i + 1 > k)$$
$$D_{i+1}^{(i+1)} = H_{i+1}^{(i+1)},$$

so gilt

$$(13)\qquad f_i^* = x^i - H_1^{(i)} x^{i-1} + H_2^{(i)} x^{i-2} - + \cdots (-1)^i H_1^{(i)}$$

daher

$$f_{i+1}^* - x f_i^* = - D_1^{(i+1)} x + D_2^{(i+1)} x^{i-1} - + \dots + (-1)^{i+1} D_{i+1}^{(i+1)},$$

woraus durch Elimination der x^k die Beziehung (14) folgt:

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} -D_1^{(i+1)} & D_2^{(i+1)} & -D_3^{(i+1)} & \dots & (-1)^{i+1} & D_{i+1}^{(i+1)} & f_{i+1}^* - x\cdot f_i^* \\ 1 & -H_1^{(i)} & H_2^{(i)} & \dots & (-1)^i & H_i^{(i)} & f_i^* \\ 0 & 1 & -H_1^{(i-1)} & \dots & (-1)^{i-1} & H_{i-1}^{(i-1)} & f_{i-1}^* \\ & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & & & & 1 & & f_0^* \end{vmatrix} = 0.$$

(14) hat bereits die Form (11); denn der Koeffizient von $f_{i+1}^* - x\cdot f_i^*$ bzw. f_{i-k}^* der Entwicklung von (14) nach der letzten Spalte ist — bis aufs Vorzeichen — gleich 1 bzw.

$$\begin{vmatrix} -D_1^{(i+1)} & D_2^{(i+1)} & \dots & (-1)^{k+1}\cdot D_{k+1}^{(i+1)} \\ 1 & -H_1^{(i)} & \dots & (-1)^k\cdot H_k^{(i)} \\ 0 & 1 & \dots & (-1)^{k-1}\cdot H_{k-1}^{(i-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -H_1^{(i-k+1)} \end{vmatrix}.$$

Daß dieser durch $\frac{a_{i-k}}{a_i}$ teilbar ist, weist man durch Induktion nach. Damit ist alles bewiesen.

Aus den Gleichungen (6) bis (11) ziehen wir einige einfache Folgerungen:

1. Hilfssatz. *Das Ideal* $\mathfrak{a}_i^* = \left(f_i^*, \frac{f_{i-1}}{a_i}, \dots, \frac{a_0}{a_i}\right)$ *ist, wenn* $a_i \neq a_0$, *ein S-Ideal; man bekommt eine ausgezeichnete Basis, wenn man in der angegebenen Basis alle* $\frac{f_k}{a_i}$, *deren höchster Koeffizient von t unabhängig ist, bis auf jenes vom niedrigsten Grade in x streicht.*

Beweis. Aus der aus (11) folgenden Gleichung $f_{k+1}^* + (h_{k,k} - x) f_k^* + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(a_j : a_i)}{(a_k : a_i)} \cdot h_{kj} \cdot f_j^* = 0$ ersieht man, daß die gestrichenen Glieder der Basis überflüssig sind. Die verbleibenden bilden aber eine ausgezeichnete Basis, weil die den Gleichungen (9) und (11) entsprechenden Gleichungen

$$(a_{k+1} : a_i) \cdot q_{k,k+1} = (a_k : a_i)$$

und

$$f_{k+1}^* + (h_{kk} - x) f_k^* + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(a_j : a_i)}{(a_k : a_i)} h_{kj} \cdot f_j^* = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

gelten.

2. Hilfssatz. *Ist* $f(x,t) \equiv 0\,(\mathfrak{a}_i)$ *und* $f(x,t)$ *vom Grade* $k < i$ *in* x, *so gilt bereits* $f(x,t) \equiv 0\,(\mathfrak{a}_k)$.

Beweis. Das Polynom $\frac{f(x,t)}{a_i(t)}$ gehört dem Ideal $\mathfrak{a}_i^*$ an. Wir können $a_i \neq a_0$ voraussetzen; im anderen Falle ist der Satz klar. In seiner eindeutig bestimmten Darstellung durch die Polynome der ausgezeichneten Basis kommen nur die Polynome $\frac{a_0}{a_i}, \frac{f_1}{a_i}, \ldots \frac{f_k}{a_i}$ vor; daher gilt bereits $\frac{f(x,t)}{a_i(t)} \equiv 0\,(\mathfrak{a}_k^*)$ und $f(x,t) \equiv 0\,(\mathfrak{a}_k)$.

3. Hilfssatz. *Ersetzt man die Elemente der* k*-ten Spalte des Minors* $f_i^*(x,t)$ *der Sh. M.* B_x *durch irgendwelche Elemente, z. B. die entsprechenden Elemente einer späteren Spalte, so erhält man einen Ausdruck von der Form*

$$(15_1) \qquad \sum_{j=0}^{i-1} \frac{a_j}{a_{k-1}} l_{ij}(t) \cdot f_j^*(t,x);$$

ersetzt man die Elemente einer beliebigen Zeile des Minors $f_i^*(t,x)$ *durch die entsprechenden Elemente der* M*-ten Zeile von* B_x, *so erhält man einen Ausdruck der Form*

$$(15_2) \qquad \sum_{j=0}^{i-1} \frac{a_j}{a_{M-1}} l_{ij}(t) \cdot f_j^* \qquad (M > i).$$

Beweis. Gleichung (11) könnte gewonnen werden durch Entwicklung des Minors f_{i+1}^* nach den Elementen seiner letzten Zeile (bzw. Spalte) und nachträgliches Ersetzen der Potenzen x^k durch Linearkombinationen der f_l^* $(l \leqq k)$ vermöge der aus (13) folgenden Beziehung

$$(16) \qquad x^k = \pm \begin{vmatrix} -H_1^{(i)}, & +H_2^{(i)} & \ldots & (-1)^i & H_i^{(i)}, & f_i^* \\ 1, & -H_1^{(i-1)} & \ldots & (-1)^{i-1} & H_{i-1}^{(i-1)}, & f_{i-1}^* \\ 0, & 1 & \ldots & (-1)^{i-2} & H_{i-2}^{(i-2)}, & f_{i-2}^* \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0, & 0 & \ldots & 1 & , & f_0^* \end{vmatrix}.$$

Da diese Entwicklung unabhängig von den Elementen $\frac{a_{k-1}}{a_i} h_{i,k-1}$ der letzten Zeile (bzw. $h_{k-1,i}$ der letzten Spalte), $(k = 1, \ldots i)$, stets zu einer Gleichung der Form (11) führen muß, müssen die algebraischen Komplemente der $\frac{a_{k-1}}{a_i} h_{i,k-1}$ (bzw. der $h_{k-1,i}$), $(k = 1, \ldots i)$, jedes einzeln nach der Einsetzung von (16) die Gestalt $\sum_{j=0}^{i-1} \frac{a_j}{a_{k-1}} l_{ij} \cdot f_j^*$ $\left(\text{bzw. } \sum_{j=0}^{i-1} \frac{a_j}{a_i} l_{ij} \cdot f_j^*\right)$ annehmen; bei Änderung der $h_{k-1,i}$ der letzten Spalte (bzw. der $h_{i,k-1}$ der

letzten Zeile) ändert sich nur f^*_{i+1} und die Größen l_{ij}, während die $f^*_0, f^*_1, \ldots f^*_i$ und die Gestalt von (15) unberührt bleiben. Man bekommt also einen Ausdruck derselben Form, wenn man nachträglich noch die $h_{k-1,i}$ (bzw. die $h_{i,k-1}$) durch die Elemente $h_{K-1,i}\, K > i$ $\left(\text{bzw. } \frac{a_i}{a_{M-1}} \cdot h_{i,M-1}\right)$ ersetzt. (Im zweiten Falle kann dann noch der Faktor $\frac{a_i}{a_{M-1}}$ aus der neuen Zeile herausgehoben werden.)

4. Hilfssatz. *Der Minor $S_i(k_1, k_2, \ldots k_n)$, welcher entsteht, wenn man in dem Minor $f^*_i(t, x)$ die Elemente der k_1-ten, k_2-ten, $\ldots$ k_n-ten Spalte durch beliebige Elemente, z. B. die entsprechenden der K_1-ten, $\ldots$ K_n-ten Spalte von $\mathfrak{B}_x$ ersetzt, $(K_l > i)$, genügt der Kongruenz* $\frac{a_{k_1-1}\, a_{k_2-1} \cdots a_{k_n-1}}{a_i \cdot a_{i+1} \cdots a_{i+n-2}} \cdot S_i(k_1, \ldots k_n) \equiv 0\ (\mathfrak{a}_{i-n})$.

Beweis. Man ergänze die Reihe (3) durch eine ausreichende Anzahl von Polynomen $a_s = a_{s+1} = \cdots a_{s-1}$, ergänze durch Anfügen geeigneter Zeilen und Spalten die Matrix $\mathfrak{B}$ zu einer zur ergänzten Polynomreihe (3) gehörigen Matrix von hinreichend hohem Grade und nehme als Induktionsvoraussetzung den Satz für $S_{i+1}(k_1, k_2, \ldots k_{n-1})$ bereits als bewiesen an.

Die gleiche Überlegung wie beim Beweis des Hilfssatzes 3 liefert den Satz für $S_i(k_1, k_2, \ldots k_n)$, wenn man den Hilfssatz 2 heranzieht.

5. Hilfssatz. *Der Minor $Z_i(M_1, M_2, \ldots M_p)$, welcher entsteht, wenn man in $f^*_i(t, x)$ die Elemente beliebiger p Zeilen, z. B. der m_1-ten, m_2-ten, $\ldots$ m_p-ten, durch die entsprechenden Elemente der M_1-ten, M_2-ten, $\ldots$ M_p-ten Zeile ersetzt, genügt der Kongruenz* $\frac{a_{M_1-1} \cdot a_{M_2-1} \cdot \ldots \cdot a_{M_p-1}}{a_i \cdot a_{i+1} \cdot \ldots \cdot a_{i+p-1}} \cdot Z_i(M_1, \ldots M_p) \equiv 0\ (\mathfrak{a}_{i-p})$.

Beweis wie bei Hilfssatz 4.

6. Hilfssatz. *Der Minor* $U_i\left(\begin{matrix} m_1 \cdots m_p \\ M_1 \ldots M_p \end{matrix} \middle| \begin{matrix} k_1 \ldots k_n \\ K_i \ldots K_n \end{matrix}\right)$, *welcher entsteht, wenn man in $f^*_i(t, x)$ die Elemente der m_1-ten, $\ldots$ m_p-ten Zeile und nachher die Elemente der k_1-ten, k_2-ten, $\ldots$ k_n-ten Spalte durch die entsprechenden Elemente der M_1-ten, M_2-ten, $\ldots$ M_p-ten Zeile bzw. K_1-ten, K_2-ten, $\ldots$ K_n-ten Spalte ersetzt, genügt der Kongruenz* $a_i \frac{a_{k_1-1} \cdot \ldots \cdot a_{k_n-1}}{a_i \ldots a_{i+n-1}} \cdot U_i \equiv 0\ (\mathfrak{a}_g)$, *$g$ = Grad von U_i in x.*

Beweis wie bei den beiden vorhergehenden Hilfssätzen durch vollständige Induktion aus der aus Hilfssatz 5 folgenden Kongruenz $a_i\ Z_i(M_1, \ldots M_p) \equiv 0\ (\mathfrak{a}_{i-p})$.

7. Hilfssatz. *Der Minor, den man erhält, wenn man die Elemente der k_1-ten $\ldots$ k_n-ten Zeile des Hauptminors aus den ersten i Zeilen und Spalten*

einer beliebigen Sh. M. B *durch die entsprechenden Elemente der* K_1*-ten,* K_2*-ten, ...* K_n*-ten Zeile derselben Matrix ersetzt, genügt der Kongruenz* $Z_i\binom{k_1 \dots k_n}{K_1 \dots K_n} \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ \frac{a_{k_1-1} \cdot a_{k_2-1} \cdot \dots \cdot a_{k_n-1}}{a_{K_1-1} \cdot a_{K_2-1} \cdots a_{K_n-1}}\right)$.

Beweis durch Entwicklung nach den Majoren aus den eingetauschten Zeilen.

Für die Anwendungen auf Elementarteilergruppen ist folgende Begriffsbildung zweckmäßig:

1. *Zwei Sh. M.,* $\mathsf{B} = (g_{ij})$ *und* $\tilde{\mathsf{B}} = (\tilde{g}_{ij})$*, die zur gleichen Reihe* (3) *gehören, heißen S-gleich (geschrieben:* $\mathsf{B} = \tilde{\mathsf{B}}$*), wenn*

$$g_{ij} \equiv \tilde{g}_{ij} \pmod{a_j}.$$

2. *Eine Sh. M. heißt regulär, wenn ihre Determinante zu* $a_0(t)$ *teilerfremd ist*

Zu einer regulären Sh. M. B gibt es eine bis auf S-Gleichheit eindeutig bestimmte, zur gleichen Polynomreihe (3) gehörige reguläre Sh. M. B^{-1}, so daß $\mathsf{B} \cdot \mathsf{B}^{-1} = \mathsf{B}^{-1} \cdot \mathsf{B} = \mathsf{E}$. (Siehe die angeführte Arbeit von K. Shoda sowie O. Schreier und B. L. van der Waerden.)

3. *Zwei Sh. M.,* B, $\tilde{\mathsf{B}}$*, die zur gleichen Polynomreihe* (3) *gehören, heißen ähnlich, wenn eine zur gleichen Polynomreihe gehörige reguläre Sh. M.* T *existiert, so daß* $\tilde{\mathsf{B}} = \mathsf{T}^{-1} \cdot \mathsf{B} \cdot \mathsf{T}$.

2. Satz. *S-gleiche Sh. M. bestimmen dasselbe S-I.*

Beweis. Man zerlege den Minor $\tilde{f}_i^*(t, x)$ nach dem bekannten Additionssatz für Determinanten und wende auf die Summanden den Hilfssatz 4 an.

3. Satz. *Ähnliche Sh. M. bestimmen dasselbe S-I.*

Beweis. Sei $\mathsf{B}_x = \mathsf{B} - x\,\mathsf{E}$ und $\tilde{\mathsf{B}} = \mathsf{T}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{T}$; zu B_x mögen die $f_i^*(t, x)$ und zu $\mathsf{T}^{-1}\mathsf{B}_x\mathsf{T}$ die $\tilde{f}_i^*(t, x)$ gehören (nach Satz 2 kann an Stelle von $\tilde{\mathsf{B}}_x = \tilde{\mathsf{B}} - x\,\mathsf{E}$ die Matrix $\mathsf{T}^{-1}\mathsf{B}_x\mathsf{T}$ betrachtet werden). Entwickelt man $\tilde{f}_i^*(t, x)$ nach i-reihigen Minoren der Matrizen T^{-1}, B_x, T, so erhält man einen Ausdruck der Form

$$\tilde{f}_i^*(t, x) = \sum S_i\binom{m_1 \dots m_\varrho}{M_1 \dots M_\varrho} \cdot U_i\binom{m_1 \dots m_\varrho \mid k_1 \dots k_n}{M_1 \dots M_\varrho \mid K_1 \dots K_n} \cdot Z_i\binom{k_1 \dots k_n}{K_1 \dots K_n}.$$

Aus den Hilfssätzen 6 und 7 folgt daher

$$a_i(t) \cdot \tilde{f}_i^*(t, x) \equiv 0\ (\mathfrak{a}),$$

also

$$\tilde{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{a}.$$

Da die Ähnlichkeit eine symmetrische Eigenschaft ist, gilt auch umgekehrt

$$\mathfrak{a} \subseteq \tilde{\mathfrak{a}},$$

also

$$\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}.$$

Daß Satz 3 nicht umgekehrt werden kann, zeigen die beiden zur Reihe $a_0(t) = t^2$, $a_1(t) = t$ gehörigen Sh.M.

$$\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

welche dasselbe S-I. $\mathfrak{a} = (x^2, tx, t^2)$ bestimmen, ohne ähnlich zu sein; denn jede zu B_1 ähnliche hat die Form

$$\tilde{\mathsf{B}}_1 = \begin{pmatrix} \frac{b}{a_0} t & 0 \\ \frac{d}{a_0} t & 0 \end{pmatrix},$$

wenn die Transformationsmatrix T in der Gestalt

$$\mathsf{T} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t, & b \\ ct & d \end{pmatrix}, \quad a_0 \neq 0 \\ d \neq 0, \qquad \mathsf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_0} + \frac{bc - a_1 d}{a_0^2 d} t, & -\frac{b}{a_0 d} \\ -\frac{c}{a_0 d} t, & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$$

angenommen wird.

Faßt man alle Sh.M., die dasselbe S-I. bestimmen, zu einer *Ordnung* und alle Sh.M., die zu einer bestimmten ähnlich sind, zu einer *Klasse* zusammen, so kann also eine Ordnung mehrere Klassen enthalten. Wir denken uns von nun an das S-I. des Satzes 1 der ganzen Klasse (oder Ordnung) zugeordnet und nennen es das charakteristische Ideal der Klasse (oder Ordnung).

Von idealtheoretischen Operationen sind für das Folgende der Durchschnitt und das Produkt von Bedeutung.

Nach einem allgemeinen Satz ist jedes Ideal des Ringes $\mathfrak{R}[x, t]$ eindeutig als Durchschnitt von teilerfremden Idealen darstellbar. Eine Verschärfung dieses Satzes bei S-Idealen ermöglichen die folgenden

Hilfssätze über S-Ideale:

1. *Der Durchschnitt von endlich vielen Idealen ist dann und nur dann S-I., wenn alle Ideale S-I. waren.*

2. *Jedes S-I. enthält ein Polynom $b_0(x)$ niedrigsten Grades, das nicht von t abhängt. Es ist bis auf einen Faktor aus $\mathfrak{R}$ eindeutig bestimmt. Wir normieren es so, daß der Koeffizient bei der höchsten x-Potenz gleich* 1 *wird.*

3. *Ein S-I.* $\mathfrak{q}$ *ist dann und nur dann nicht mehr als Durchschnitt von teilerfremden S-I. darstellbar, wenn sowohl* $a_0(t)$ *als auch* $b_0(x)$ *Potenzen irreduzibler Polynome sind, also* $\mathfrak{q}$ *einartig ist.*

Beweis. Punkt 1, 2 ist klar, da es sich um nulldimensionale Ideale handelt. Wir beweisen gleich Punkt 3:

a) Es sei $a_0 = a_0' \cdot a_0''$ und die a_0', a_0'' teilerfremd. Wir denken uns die übrigen $a_i(t)$ in teilerfremde Faktoren zerlegt $a_i = a_i' \cdot a_i''$ derart, daß $a_i' \mid a_{i-1}'$, $a_i'' \mid a_{i-1}''$. In der Reihe der a_i' oder a_i'' können unter Umständen von einem gewissen ab lauter 1 vorkommen. Sei

$$\mathfrak{a}' = (a_0', a_1' f_1^*, a_2' f_2^*, \ldots),$$
$$\mathfrak{a}'' = (a_0'', a_1'' f_1^*, a_2'' f_2^*, \ldots);$$

dann ist

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{a}'' \quad \text{und} \quad (\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'') = (1).$$

War $b_0(x)$ ein Produkt von teilerfremden Faktoren, so arbeiten wir mit einer ausgezeichneten Idealbasis, in der t und x ihre Rollen vertauscht haben, genau so wie oben.

b) Sei andererseits $\mathfrak{q}$ ein S-I., bei dem $a_0(t)$ und $b_0(x)$ Potenzen irreduzibler Polynome $a^n(t)$ und $b^m(x)$ sind.

Ist $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$, so muß notwendig $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ von der gleichen Art sein wie $\mathfrak{q}$, das heißt, ihre $a_0(t)$ und $b_0(x)$ sind Potenzen derselben irreduziblen Polynome $a(t)$ und $b(x)$ wie jene von $\mathfrak{q}$. Zwei derartige Ideale haben aber das von (1) verschiedene S-Ideal $\mathfrak{p} = (a(t), b(x))$ als gemeinsamen Teiler.

Die Beziehung zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ ist nämlich die folgende:

1) $\mathfrak{p} = (a(t), b(x))$ ist ein nulldimensionales, daher teilerloses Primideal,

2) $\mathfrak{q}$ ist ein einartiges, daher Primärideal, das zum Primideal $\mathfrak{p}$ gehört.

Aus den Hilfssätzen folgt:

4. Satz. *Jedes S-Ideal läßt sich eindeutig als Durchschnitt (Produkt) von teilerfremden einartigen Primär-S-Idealen darstellen. Diese können nicht weiter als Durchschnitt teilerfremder Ideale dargestellt werden.*

5. Satz. *Die Polynome* f_i^* *der ausgezeichneten Basis eines einartigen S-Ideals erfüllen die Bedingungen:*

$$f_i^* \equiv 0 \ (\mathfrak{p}), \quad \text{wenn } a_i \neq a_0, \tag{17}$$

$$q(x,t) \cdot f_i^* \equiv b^m(x) \pmod{a(t)}, \quad \text{wenn } a_i \neq a_{i-1}, \tag{18}$$

mit einem gewissen $q(x,t)$ *und ganzzahligem* m.

Beweis. a) Da $a_i f_i^* \equiv 0\,(\mathfrak{q})$ und $a_i \not\equiv a_0$, also

$$a_i \not\equiv 0\,(\mathfrak{q}),$$

folgt:

$$f_i^* \equiv 0\,(\mathfrak{p}).$$

b) Das Ideal $\mathfrak{q}_i^* = \left(f_i^*, \frac{f_{i-1}}{a_i}, \frac{f_{i-2}}{a_i}, \cdots \frac{a_0}{a_i}\right)$ ist wegen $a_0 \not\equiv a_i$ ein S-Ideal; nach (17) hat es den Teiler $\mathfrak{p}$. Hätte es noch einen anderen Primidealteiler $\mathfrak{p}'$, so wäre nach (11)

$$f_{i+1}^* \equiv 0\,(\mathfrak{p}').$$

daher

$$\mathfrak{q}_{i+1}^* = \left(f_{i+1}^*, \frac{a_i}{a_{i+1}} \cdot f_i^*, \frac{a_i}{a_{i+1}} \cdot \frac{f_{i-1}}{a_i}, \cdots \frac{a_i}{a_{i+1}} \cdot \frac{a_0}{a_i}\right) \equiv 0\,(\mathfrak{p}').$$

Daraus würde wieder folgen:

$$f_{i+2}^* \equiv 0\,(\mathfrak{p}') \text{ usw.}$$

und schließlich

$$\mathfrak{q} \equiv 0\,(\mathfrak{p}')$$

im Widerspruch zur Einartigkeit von $\mathfrak{q}$. Daher ist auch $\mathfrak{q}_i^*$ einartig, also Primärideal zum Primideal $\mathfrak{p}$ und daher Teiler einer Potenz $\mathfrak{p}^m$, wobei m so hoch gewählt werden kann, daß der Grad von $b^m(x)$ größer wird als i. Dann folgt nach Gleichung (6) die behauptete Bedingung.

Zusatz. Die Bedingung (18) des Satzes 5 ist im Falle eines abgeschlossenen Körpers $\mathfrak{K}$ besonders leicht zu übersehen: Es ist

$$a(t) = t - \alpha,$$
$$b(x) = x - \beta,$$

und die Bedingung (18) liefert die Gleichung

$$f_i^*(t, x) = (x - \beta)^i + (t - \alpha)^{k_i} \cdot g_i(t, x), \tag{18'}$$

wo $k_i \not\equiv 0$ und $g_i(t, x)$ in x höchstens vom Grade $i - 1$ ist.

6. Satz. *Aus* $f(t, x) \equiv 0\,(\mathfrak{a})$ *folgt*

$$f(t, \mathsf{B}) = 0 \tag{19}$$

im Sinne der S-Gleichheit.

Beweis. Wir verbinden in bekannter Weise mit der Matrix B eine lineare Abbildung eines Vektorraumes von s Dimensionen auf sich selbst vermöge der Gleichungen

$$\mathsf{B} \cdot (r)_i = \sum_{l=0}^{s-1} g_{il}(t) \cdot (r)_l \qquad i = 0, 1, \ldots, s-1. \tag{20}$$

Dem Sinne der S-Gleichheit werden wir gerecht durch die Setzung $a_j(t) \cdot (r)_j = 0$. (Eine Realisierung eines derartigen „Vektorraumes" siehe in § 2.) Es gilt dann für jedes $l = 0, 1, \ldots, s-1$:

$$a_l(t) \cdot (r)_j = 0 \qquad (j = l, l+1, \ldots s-1)$$

daher auch

$$a_l(t) \cdot f_l^*(t, \mathsf{B}) \cdot (r)_j = 0 \quad (j = l, l+1, \ldots s-1). \tag{21}$$

Aus Gleichung (20) folgt:

$$\mathsf{B} \cdot a_l(t) \cdot (r)_i = \sum_{j=0}^{l-1} g_{ij}(t) \cdot a_l(t) \cdot (r)_j \quad (i = 0, \ldots l-1).$$

Behandeln wir dieses Gleichungssystem rein formal wie ein System von l linearen Gleichungen in den l Unbekannten $(r)_i$ $(i = 0, 1, \ldots, l-1)$, so erhalten wir

$$f_l^*(t, \mathsf{B}) \cdot a_l(t) \cdot (r)_i = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots l-1). \tag{22}$$

Aus (21) und (22) folgt die S-Gleichheit (19) für alle Polynome der ausgezeichneten Basis von $\mathfrak{a}$, somit gilt sie für alle Polynome von $\mathfrak{a}$.

7. Satz. *Das Ideal* $\mathfrak{m}$ *aller Polynome* $f(t, x)$, *welche die Gleichung* (19) *erfüllen, ist eine Klasseninvariante; wir nennen es das Minimalideal der Klasse.*

Beweis. Aus $f(t, \mathsf{B}) = 0$ folgt $f(t, \mathsf{T}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{T}) = \mathsf{T}^{-1} f(t, \mathsf{B})\,\mathsf{T} = 0$ und umgekehrt.

Zusatz. Daß $\mathfrak{m}$ nicht auch Ordnungsinvariante ist, zeigen z. B. die beiden zur Polynomreihe

$$a_0(t) = t^2, \quad a_1(t) = t$$

gehörigen Sh. M.

$$\mathsf{B}_1 = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}, \qquad \mathsf{B}_2 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix},$$

die zur gleichen Ordnung mit dem charakteristischen Ideal $\mathfrak{a} = (t^2, tx, x^2)$ gehören, während die Minimalideale ihrer Klassen

$$\mathfrak{m}_1 = (t^2, tx, x^2)$$

und

$$\mathfrak{m}_2 = (t^2, x)$$

sind. Aus Satz 6 folgt:

8. Satz. *Das Minimalideal einer Klasse ist Teiler des charakteristischen Ideals*: $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$.

§ 2.

Elementarteilergruppen zweiter Art und Polynome in einer Matrix.

Unter einer Elementarteilergruppe zweiter Art (ETG 2. A) wollen wir — in Erweiterung der KRULLschen Begriffsbildung (siehe a. a. O.) — einen $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{A}$ vom Range n verstehen, der einen von zwei miteinander und den Elementen von $\mathfrak{R}$ vertauschbaren, in $\mathfrak{R}$ nicht enthaltenen Operatoren A, B erzeugten Ring $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}[A, B]$ als Operatorenbereich zuläßt.

Sehen wir von der Wirkung des Operators B ab, betrachten also den Ring $\mathfrak{R}_A = \mathfrak{R}[A]$ als Operatorenbereich, so geht $\mathfrak{A}$ in eine Elementarteilergruppe im KRULLschen Sinne $\mathfrak{A}_A$ über, für die B die Rolle eines Automorphismus pielt.

$\mathfrak{A}_A$ läßt sich nach bekannten Sätzen als direkte Summe von zyklischen Elementarteilergruppen $\mathfrak{A}_A^{(0)}$, $\mathfrak{A}_A^{(1)}$, $\ldots$ $\mathfrak{A}_A^{(s-1)}$ darstellen, deren annullierende Ideale Hauptideale

(3)′ $$(a_0(t)),\ (a_1(t)),\ \ldots\ (a_{s-1}(t))$$

sind, wobei

$$a_i(t) \mid a_{i-1}(t).$$

Diese Zerlegung ist bis auf Isomorphie eindeutig. Wird $\mathfrak{A}_A^{(i)}$ von dem Element r_i erzeugt (das heißt: $\mathfrak{A}_A^{(i)}$ besteht aus allen Elementen der Form $f(A) \cdot r_i$, $f(t)$ ein Polynom aus $\mathfrak{R}[t]$), so gelten Gleichungen der Gestalt

(23) $$B \cdot r_i = \sum_{j=0}^{s-1} g_{ij}(A) \cdot r_j \qquad (i = 0, 1, \ldots, s-1),$$

wobei

$$g_{ij}(t) = \frac{a_j(t)}{a_i(t)} \cdot h_{ij}(t) \quad \text{für } j < i$$

(siehe K. SHODA, a. a. O.).

Durch (23) ist B (infolge der verlangten Vertauschbarkeit mit A) eindeutig bestimmt. Die Sh.M. $\mathsf{B} = (g_{ij})$ ist bis auf S-Gleichheit bestimmt und geht bei Anwendung eines holoedrischen Automorphismus T, der durch die Sh.M. T gemäß (23) bestimmt sei, in die ähnliche $\mathsf{B} = \mathsf{T}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{T}$ über.

Zu jeder ETG 2. A gehört demnach eine Klasse von Sh. M. und umgekehrt; wir nennen sie die *charakteristische Klasse von* $\mathfrak{A}$, ihr charakteristisches und Minimalideal das *charakteristische und Minimalideal von* $\mathfrak{A}$.

Legen wir eine $\mathfrak{A}$-Basis von n linear unabhängigen Elementen zugrunde, so sind die Operatoren A und B durch zwei vertauschbare Matrizen vom Grade n dargestellt, die bei Übergang zu einer anderen Basis eine gleichzeitige Transformation (2) erleiden, also in ein Paar der gleichen Klasse übergehen. *Zu jeder ETG 2. A gehört demnach eine Klasse von Paaren von vertauschbaren quadratischen Matrizen und umgekehrt.*

Nach dem KRULLschen Fundamentalsatz über *verallgemeinerte endliche ABELsche Gruppen* (Mathem. Zeitschr. Bd. 23, 1925) läßt sich $\mathfrak{A}$ in bis auf Isomorphie eindeutiger Weise in eine direkte Summe von ETG 2. A zerlegen, die nicht weiter als direkte Summen von ETG 2. A dargestellt werden können; die charakteristischen Klassen, charakteristischen Ideale und Minimalideale der unzerlegbaren Summanden sind durch $\mathfrak{A}$ eindeutig bestimmt.

Da es also auf den Zerlegungsweg nicht ankommt, schlagen wir den folgenden ein: Wir zerlegen das Minimalideal $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{A}$ nach Satz 4 in ein Produkt von teilerfremden einartigen S-Idealen

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{q}_1 \cdot \mathfrak{q}_2 \cdot \ldots \mathfrak{q}_t. \tag{24}$$

Mit der multiplikativen Zerlegung (24) geht in bekannter Weise eine additive Zerlegung des Ringes $\mathfrak{R}$ in eine direkte Summe von Ringen $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots \mathfrak{R}_t$, die sich gegenseitig annullieren, einher (siehe z. B. L. B. VAN DER WAERDEN, Moderne Algebra II, § 85):

$$\begin{cases} \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \dotplus \mathfrak{R}_2 \dotplus \mathfrak{R}_3 \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{R}_t \\ \mathfrak{R}_i \cdot \mathfrak{R}_j = 0 \qquad (i \neq j). \end{cases} \tag{25}$$

Mit der Zerlegung (25) wiederum ist in bekannter Weise eine Zerlegung des Moduls $\mathfrak{A}$ in eine direkte Summe verbunden:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \dotplus \mathfrak{A}_2 \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{A}_t. \tag{26}$$

Die ETG 2. A $\mathfrak{A}_i$ haben dann zu Minimalidealen einartige, also Primär-S-Ideale.

Wir können also weiterhin voraussetzen, daß das Minimalideal der betrachteten ETG 2. A $\mathfrak{A}$ einartig sei, woraus folgt, daß die Polynome der Reihe (3′) Potenzen ein- nnd desselben irreduziblen Polynoms $a(t)$ sind.

Im folgenden betrachten wir *zyklische* ETG 2. A, das sind solche, deren Elemente r alle aus einem r_0 nach der Gleichung

$$r = f(A, B) \cdot r_0, \quad f(t, x) \text{ Polynom aus } \mathfrak{R}[t, x]$$

erzeugt werden.

G. KÖTHE hat gezeigt, daß eine bis auf Isomorphie eindeutige Zerlegung von $\mathfrak{A}$ in zyklische, direkt unzerlegbare Gruppen dann und nur dann existiert, wenn $\mathfrak{R}$ ein „einreihiger Ring" ist, d. h. ein Ring, der direkte Summe von primären Idealen mit Haupteinheit ist, in denen jedes primitive Idempotent ein Ideal erzeugt, das nur eine einzige Kompositionsreihe besitzt [ABELsche Gruppen mit hyperkomplexem Operatorenring. (Math. Zeitschr. Bd. 39, 1934.) Wir machen im folgenden von diesem Satze keinen Gebrauch].

Für zyklische ETG 2. A gilt als Verschärfung des Satzes 8 der

9. Satz. *Das charakteristische Ideal und das Minimalideal einer zyklischen ETG 2. A stimmen überein.*

Beweis. Seien $\mathfrak{m}$ das Minimalideal von $\mathfrak{A}$ und $a_i(t) \cdot f_i^*(t, x)$, $(i = 0, \ldots, s-1)$ und $f_s^*(t, x)$ die Polynome einer ausgezeichneten Basis von $\mathfrak{m}$. Wir betrachten die Elemente

$$r_i = f_i^*(A, B) \cdot r_0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, s-1).$$

Sie erzeugen s elementenfremde Zyklen der ETG $\mathfrak{A}_A$, $\mathfrak{A}_A^{(i)}$ mit den annullierenden Idealen $(a_i(t))$, die der Bedingung (3′) genügen, und es ist

$$\mathfrak{A}_A = \mathfrak{A}_A^{(0)} \dotplus \mathfrak{A}_A^{(1)} \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{A}_A^{(s-1)}.$$

Die Gleichungen (23) in diesem r-System sind die Gleichungen (11) des Satzes 1 und die Sh.M. der ETG 2. A $\mathfrak{A}$ ist die Matrix (12a) des Satzes 1. Das Minimalideal und das charakteristische Ideal von $\mathfrak{A}$ werden also durch dieselbe Sh.M. (12a) bestimmt, sind daher identisch.

Des eben besprochenen Zusammenhanges wegen wollen wir Shodasche Matrizen der speziellen Form (12a) zyklische Sh.M. nennen.

Zusatz. Daß Satz 9 nicht umgekehrt werden kann, zeigt z. B. die zu dem bekannten Frobeniusschen Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB = BA = 0,$$

gehörige ETG 2. A, deren charakteristische Klasse die Klasse der zur Polynomreihe

$$a_0(t) = t^2, \quad a_1(t) = t$$

gehörigen Sh.M.

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

ist, deren charakteristisches Ideal und Minimalideal

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{m} = (t^2, tx, x^2)$$

sind. Diese ETG 2. A ist direkt unzerlegbar, aber nicht zyklisch.

10. Satz. *Jedes beliebige S-Ideal $\mathfrak{a}$ kann charakteristisches Ideal (und zugleich Minimalideal) einer zyklischen ETG 2. A sein.*

Beweis. Man bilde eine ausgezeichnete Basis von $\mathfrak{a}$ nach Satz 1, bilde eine ETG $\mathfrak{A}_A$, deren direkte zyklische Summanden annullierende Ideale besitzen, die von den Polynomen $a_i(t)$ der Gleichung (10) des Satzes 1 erzeugt

werden und adjungiere zum Operatorenbereich $\mathfrak{R}_A$ den durch die zyklische Matrix (12a) des Satzes 1 nach (23) bestimmten Automorphismus B.

Zu den ETG 2. A, welche die KÖTHEsche Bedingung erfüllen, gehören die beiden folgenden wichtigen Gruppen:

I) $B = f(A)$, $f(t)$ ein Polynom aus $\mathfrak{R}[t]$,

II) $A = g(B)$, $g(x)$ ein Polynom aus $\mathfrak{R}[x]$.

Die direkt unzerlegbaren zyklischen Summanden sind im ersten Falle die unzerlegbaren A-Zyklen von $\mathfrak{A}_A$, im zweiten Falle die unzerlegbaren B-Zyklen von $\mathfrak{A}_B$. Wir berechnen im folgenden das charakteristische und Minimalideal dieser ETG 2. A, wobei wir zunächst den Körper $\mathfrak{R}$ als *algebraisch abgeschlossen* voraussetzen:

I. Es sei $\mathfrak{A}$ ein unzerlegbarer A-Zyklus, $((t-\alpha)^{n_0})$ sein annullierendes Ideal und $B = f(A)$. Ist

$$f_0(t) \equiv f(t) \pmod{(t-\alpha)^{n_0}}, \tag{27}$$

so ist offenbar

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{m} = ((t-\alpha)^{n_0},\ x - f_0(t)).$$

Man sieht, daß $\mathfrak{m}$ tatsächlich den Bedingungen des Satzes 5 genügt: Es ist

$$\begin{aligned} x - f_0(t) &= x - f_0(\alpha) - [f_0(t) - f_0(\alpha)]\,. \\ &= (x-\beta) - (t-\alpha)^k \cdot g_0(t) \qquad (\beta = f_0(\alpha) = f(\alpha)). \end{aligned}$$

Das zugehörige Primideal ist $\mathfrak{p} = ((t-\alpha), (x-\beta))$. Die zugehörige Sh.M. ist vom ersten Grade, besteht also aus dem einzigen Element $h_{00}(t) = f_0(t)$.

II. Es sei $\mathfrak{A}$ ein unzerlegbarer B-Zyklus, $((x-\beta)^m)$ sein annullierendes Ideal und $A = g(B)$. Wir setzen:

$$g(\beta) = \alpha, \quad A - \alpha = A', \quad B - \beta = B'.$$

Ferner sei

$$g(x) - g(\beta) = (x-\beta)^s \cdot g_0(t), \quad g_0(\beta) \neq 0. \tag{28}$$

Ist $s \geqq m$, so gilt $A = \alpha$; schließen wir diesen trivialen Fall aus, so können wir $s < m$ voraussetzen. Dann existiert ein Polynom $p(t)$ derart, daß

$$g_0(t) \cdot p(t) \equiv 1 \pmod{(x-\beta)^m}; \qquad p(\beta) \neq 0.$$

Aus (28) folgt

$$(x-\beta)^s \equiv [g(x) - \alpha] \cdot p(x) \pmod{(x-\beta)^m}. \tag{29}$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$(B')^s = A' \cdot p(B). \tag{30}$$

Setzen wir

$$p(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-\beta) + \cdots + p_{s-1} \cdot (x-\beta)^{s-1} + (x-\beta)^s \cdot p_s(x),$$

so wird aus (30)

$$(31)\qquad (B')^s = A' \cdot [p_0 + p_1 \cdot B' + \cdots + p_{s-1} \cdot (B')^{s-1}] + \\ + A' \cdot (B')^s \cdot p_s(B); \quad p_0 \not\equiv 0.$$

Im zweiten Gliede können wir für $(B')^s$ wieder (30) einsetzen, ein Glied mit dem Faktor $(B')^s$ abspalten und wieder (30) einsetzen usf.; da sich bei jedem Schritt die Potenz des Faktors A' bei $(B')^s$ immer um 1 erhöht, wird schließlich diese Potenz $(A')^m = 0$, sobald $n \cdot s \geqq m$, und wir erhalten:

$$(B')^s - A' [q_0(A') + q_1(A') \cdot B' + \cdots + q_{s-1}(A') \cdot (B')^{s-1}] = 0; \\ q_0(0) = p_0 \not\equiv 0.$$

Das auf diese Weise gewonnene Polynom

$$(32)\qquad f_s^*(x,t) = (x-\beta)^s - (t-\alpha) \cdot [q_0(t-\alpha) + \\ + q_1(t-\alpha) \cdot (x-\beta) + \cdots + q_{s-1}(t-\alpha) \cdot (x-\beta)^{s-1}]$$

ist das niedrigste in x des Minimalideals $\mathfrak{m}$, dessen höchster x-Koeffizient von t unabhängig ist. Die übrigen Polynome der ausgezeichneten Basis von $\mathfrak{m}$ haben ersichtlich die Gestalt

$$(33)\qquad f_i(x,t) = (t-\alpha)^{n_i} \cdot (x-\beta)^i, \qquad i = 0, 1, \ldots, s-1,$$

wo n_i durch die Bedingungen (34) eindeutig festgelegt ist:

$$(34)\qquad \frac{m-i}{s} \leqq n_i < \frac{m-i}{s} + 1.$$

Es sind wieder alle Bedingungen des Satzes 5 erfüllt. Das zugehörige Primideal ist wieder $\mathfrak{p} = ((t-\alpha), (x-\beta))$. Die zugehörige zyklische Sh.M. hat die Gestalt

$$\mathfrak{B} = \begin{Bmatrix} \beta, & 1, & 0, & \cdots & 0 \\ 0, & \beta, & 1, & \cdots & 0 \\ 0, & 0, & \beta, & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \cdots & 1 \\ (t-\alpha) \cdot q_0, & (t-\alpha) q_1, & (t-\alpha) \cdot q_2, & \cdots & (t-\alpha) q_{s-1} + \beta \end{Bmatrix}.$$

Damit haben wir den folgenden Satz gewonnen:

1. Hauptsatz. *Ist $\mathfrak{A}$ eine direkt unzerlegbare zyklische ETG 2. A und $B = f(A)$ bzw. $A = g(B)$, so ist ihr charakteristisches und Minimalideal bei algebraisch abg. $\mathfrak{R}$*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{m} = ((t-\alpha)^{n_0},\ x - f_0(t))$$

bzw.

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{m} = \big((t-\alpha)^{n^0},\ (t-\alpha)^{n_1}\cdot(x-\beta),$$
$$(t-\alpha)^{n_2}\cdot(x-\beta)^2,\ \ldots\ (t-\alpha)^{n_s-1}\cdot(x-\beta)^{s-1},\ f_s^*(x,t)\big)$$

mit den Bedingungen (27) *bis* (34).

Der 1. Hauptsatz läßt nun eine weitgehende Umkehrung zu:

2. Hauptsatz. *Sei $\mathfrak{A}$ eine ETG 2. A, von der weder vorausgesetzt wird, daß sie zyklisch, noch daß sie unzerlegbar sei. Enthält ihr charakteristisches Ideal $\mathfrak{a}$ ein Polynom $(t-\alpha)^{n_0}$ und ein Polynom $x - f_0(t)$ bzw. ein Polynom $(t-\alpha)^{n_0}$ und ein Polynom*

$$f_s^*(x,t) = (x-\beta)^s - (t-\alpha)\cdot F(x,t),\quad F(\beta,\alpha) \neq 0,$$

so ist $B = f(A)$ bzw. $A = g(B)$ mit den Bedingungen (27), (28), (32), *und $\mathfrak{A}$ genügt der Kötheschen Bedingung, d. h. sie ist zyklisch oder (bis auf Isomorphie eindeutig) Summe von direkt unzerlegbaren zyklischen Summanden.*

Beweis:

1) Aus Satz 6 folgt:

$$(A-\alpha)^{n_0} = 0$$
$$B - f_0(A) = 0,$$

daher auch

$$B = f(A).$$

2) Aus Satz 6 folgt zunächst:

$$(35)\qquad \begin{cases} (A-\alpha)^{n_0} = 0 \\ (B-\beta)^{s\cdot n_0} = (A-\alpha)^{n_0}\cdot F^{n_0}(B,A) = 0; \end{cases}$$

sodann mit $A - \alpha = A'$, $B - \beta = B'$:

$$(B')^s = A'\,[q_0(A') + q_1(A')\cdot B' + \cdots + q_{s-1}(A')\cdot(B')^{s-1}],$$
$$q_0(0) \neq 0,$$

also

$$(36)\qquad A'\cdot q_0(A') = (B')^s + A'\cdot B'\cdot[q_1(A') + \cdots + q_{s-1}(A')\cdot(B')^{s-2}].$$

Bestimmen wir das Polynom $g_1(t)$ derart, daß

$$g_1(t-\alpha)\cdot q_0(t-\alpha) \equiv 1 \pmod{(t-\alpha)^{n_0}},\quad g_1(0) \neq 0,$$

so gewinnen wir aus (36)

$$(37)\quad A' = (B')^s \cdot g_1(A') + A' \cdot B' \cdot [q_1(A')\, g_1(A') + \cdots + q_{s-1}(A') \cdot g_1(A') \cdot (B')^{s-2}].$$

Setzen wir hierin für A' wieder (37) ein usf., so erhalten wir nach endlich viel Schritten wegen (35) schließlich

$$A' = (B')^s \cdot g_0(B'), \quad g_0(0) \neq 0,$$

also

$$A = \alpha + (B - \beta)^s \cdot g_0(B - \beta),$$
$$A = g(B).$$

Alles weitere folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden.

Nebenbei gewannen wir beim Beweise des 1. Hauptsatzes den für viele Untersuchungen über Polynome in einer Matrix recht brauchbaren

Elementarteilersatz. *Ist* $A = g(B)$ *mit Bedingung* (28), *so gibt es zu jedem Elementarteiler* $(x - \beta)^m$ *von* B *die Elementarteiler*

$$(t - \alpha)^{n_i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, s-1)$$

von A *mit Bedingung* (34) und $\alpha = g(\beta)$.

Im Falle eines Körpers $\mathfrak{R}$, der *nicht* algebraisch abgeschlossen ist, verursacht der entsprechende Elementarteilersatz etwas mehr Mühe. Ich verweise auf meine Arbeit über *die Elementarteiler eines Polynoms in einer Matrix*. Danach gestalten sich die Fälle I und II folgendermaßen:

I. Das anullierende Ideal des unzerlegbaren A-Zyklus ist $(a^n(t))$ mit einem irreduziblen Polynom $a(t)$. Es gibt ein eindeutig bestimmtes irreduzibles Polynom $b(x)$ derart, daß

$$b(f(t)) \equiv 0 \pmod{a(t)}.$$

Das Primideal der Gruppe ist

$$\mathfrak{p} = (a(t), \quad b(x)),$$

das charakteristische und Minimalideal

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{m} = (a^n(t), \quad x - f(t)).$$

II. Das annullierende Ideal des unzerlegbaren B-Zyklus ist $b^m(x)$ mit einem irreduziblen Polynom $b(x)$. Es gibt ein eindeutig bestimmtes irreduzibles Polynom $a(t)$ derart, daß

$$a(g(x)) \equiv 0 \pmod{b(x)};$$

es sei

$$(28')\qquad a(g(x)) = b^s(x) \cdot q(x),$$

$q(x)$ nicht weiter durch $b(x)$ teilbar. s^* sei die kleinere der beiden Zahlen s und m. Der Grad N_1 von $a(t)$ ist Teiler des Grades N von $b(x)$, $\frac{N}{N_1} = M$. Es gibt dann ein Polynom M-ten Grades in x

$$f^*_M(x,t) = x^M + v_0(t) \cdot x^{M-1} + \cdots + v_{M-1}(t)$$

so, daß $f^*_M(x, g(x))$ durch $b(x)$, aber durch keine höhere Potenz von $b(x)$ teilbar ist; ein Polynom niedrigeren Grades mit t-freiem höchsten Koeffizienten von dieser Eigenschaft existiert nicht.

Außerdem gibt es ein Polynom vom Grade $M \cdot s^*$ in x mit dem höchsten Koeffizienten 1, $f^*_{M \cdot s^*}(t, x)$, so, daß $f^*_{M \cdot s^*}(g(x), x)$ teilbar ist durch $b^m(x)$. Setzen wir

$$f^*_{M \cdot i + k}(t, x) = x^k \cdot [f^*_M(x,t)]^i \qquad \begin{cases} k = 0, 1, \ldots m-1, \\ i = 0, 1, \ldots, s^* - 1, \end{cases}$$

und bestimmen n_i aus der Bedingung (34')

$$\frac{m-i}{s^*} \leqq n_i < \frac{m-i}{s^*} + 1, \tag{34'}$$

so ist

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{m} = (a^{n_0}(t),\ a^{n_1}(t) \cdot f^*_1, \ldots a^{n_M \cdot s^* - 1}(t) \cdot f^*_{M \cdot s^* - 1},\ f^*_{M \cdot s^*})$$

$$\mathfrak{p} = (a(t),\ b(x)).$$

Auch die zugehörige Sh.M. kann leicht angegeben werden.

Die Umkehrung gelingt im Falle I mühelos, und Fall II kann durch Vertauschung der Rollen der beiden Operatoren A und B immer auf den Fall I zurückgeführt werden.

Einer weiteren Mitteilung bleibe die Aufgabe der Charakterisierung ähnlicher Shodascher Matrizen und der unzerlegbaren Elementarteilergruppen zweiter Art vorbehalten, was erst einen endgültigen Abschluß der hier behandelten Frage ermöglicht.

(Eingegangen am 27. Dezember 1942.)

Zur Theorie der C- und H-Summierbarkeit negativer Ordnung.

Von

Gerhard Lyra in Göttingen.

Einleitung.

Der Begriff der Cesàroschen Limitierbarkeit einer Zahlenfolge s_n zum Werte s ist ursprünglich von E. Cesàro[1]) 1889 nur für positiv-ganzzahlige Limitierungsordnung r durch die Konvergenz der Mittel

$$(1) \qquad C_r(s_n) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+r-1}{n-\nu} s_\nu \Big/ \binom{n+r}{n} \to s$$

erklärt worden. K. Knopp[2]) hat 1907 diese Definition auf nicht-ganzzahlige $r > -1$ erweitert und damit erstmalig den Begriff der C-Limitierbarkeit beliebig reeller Ordnung $r > -1$ eingeführt. Wie Knopp a. a. O. gezeigt hat, bleiben bei dieser Verallgemeinerung alle bekannten Eigenschaften des C-Verfahrens erhalten[3]).

Nun sind durch (1) die Cesàroschen Mittel auch noch für alle nicht-ganzzahligen $r < -1$ definiert. Trotzdem kann der Begriff der C-Limitierbarkeit für diese Ordnungen nicht allein durch die Konvergenz der Cesàroschen Mittel (1) erklärt werden, da sonst nicht einmal die Permanenzbedingung, d. h. die Forderung, daß aus der C_r-Limitierbarkeit einer Folge zum Werte s für $r' > r$ ihre $C_{r'}$-Limitierbarkeit zum gleichen Werte folgt, erfüllt wäre. In der Tat gibt es zu jedem beliebigen nicht-ganzzahligen $r < -1$ Zahlenfolgen s_n, welche C_r-limitierbar und doch nicht konvergent sind, im Widerspruch zu dieser Permanenzforderung. Z. B. hat die Zahlenfolge

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu-r-1}{n-\nu} \Big/ \binom{\nu-r}{\nu},$$

wie man mit Hilfe der erzeugenden Funktion leicht erkennt, die Cesàroschen Mittel $C_r(s_n) = 1 \Big/ \binom{n-r}{n} \binom{n+r}{n}$, welche für $n \to \infty$ gegen $\Gamma(1-r)\,\Gamma(1+r)$

[1]) E. Cesàro, Sur la multiplication des séries. Bull. des sciences math. (2) **14** (1890), S. 119.

[2]) K. Knopp, Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze. Inauguraldissertation, Berlin 1907, ferner: Multiplikation divergenter Reihen. Sitzungsber. d. Berliner Mathematischen Gesellschaft, Jahrgang 7 (1907), S. 1—12.

[3]) Unabhängig von Knopp hat später S. Chapman in der in Fußnote 4 genannten Arbeit die C-Limitierbarkeit nicht-ganzzahliger Ordnung $r > -1$ untersucht.

$= r\pi/\sin r\pi$ konvergieren. Andererseits ist $s_n \geqq \binom{n-r-1}{n}$, die Folge s_n also gewiß nicht konvergent. Um solche Fälle auszuschließen, muß in der Definition der C-Limitierbarkeit nicht-ganzzahliger Ordnung $r < -1$ zur Konvergenz der CESÀROschen Mittel (1) noch eine weitere Forderung hinzukommen. Als geeignete Zusatzforderung hat zuerst S. CHAPMAN [4]) 1910 die A-Beschränktheit der Folge s_n, d. h. die Beschränktheit von $(1-x)\sum_0^\infty s_n x^n$ in $0 \leqq x < 1$ gefordert und gezeigt, daß unter dieser Voraussetzung alle wesentlichen Eigenschaften des CESÀROschen Limitierungsverfahrens gültig bleiben. Damit war der Begriff der C-Limitierbarkeit für reelle Ordnung $r \neq -1, -2, \ldots$ erklärt [5]). Wegen des für ihn gültigen Permanenzsatzes folgt insbesondere aus der Konvergenz der CESÀROschen Mittel $C_r(s_n)$ nicht-ganzzahliger Ordnung $r < -1$ und der A-Beschränktheit der s_n die Konvergenz der Folge s_n zum selben Wert.

Um schließlich den Begriff der C-Limitierbarkeit auf den allgemeinen Fall beliebig reeller Ordnung r zu verallgemeinern, bedarf es noch einer Definition der C-Limitierbarkeit negativ-ganzzahliger Ordnung $r = -k$ ($k > 0$ ganz). Zunächst erscheint für diesen Zweck der Ausdruck (1) unbrauchbar, da er wegen des für negativ-ganzzahlige r verschwindenden Nenners $\binom{n+r}{n}$ nicht definiert ist. Im Gegensatz hierzu kann die Definition der HÖLDERschen Limitierbarkeit bekanntlich ohne weiteres auf negativ-ganzzahlige Ordnung ausgedehnt werden, wie schon 1916 W. H. YOUNG [6]) für die Ordnung -1 bemerkt hat. Denn der Übergang von den HÖLDERschen Mitteln $H_k(s_n)$ der positiv-ganzzahligen Ordnung k zu denjenigen der Ordnung $k-1$ wird durch die zur arithmetischen Mittelbildung inversen Operation $H_{-1}(H_k(s_n)) = (n+1)H_k(s_n) - nH_k(s_{n-1}) = H_{k-1}(s_n)$ vermittelt, so daß die HÖLDERschen Mittel negativ-ganzzahliger Ordnung $-k$ einer Zahlenfolge s_n rekursiv durch die Ausdrücke

$$(2) \qquad H_{-k}(s_n) = (n+1)H_{1-k}(s_n) - nH_{1-k}(s_{n-1}) \to s$$
$$\text{mit } k = 1, 2, 3, \ldots \text{ und } H_0(s_n) = s_n$$

---

[4]) S. CHAPMAN, On non-integral orders of summability of series and integrals. Proc. of the London Math. Soc. (2) 9 (1911), S. 369–409.

[5]) Allerdings hat CHAPMAN unter C-Limitierbarkeit nicht-ganzzahliger Ordnung $r < -1$ doch nur die Konvergenz der CESÀROschen Mittel verstanden und die A-Beschränktheit als eine zusätzliche Bedingung aufgefaßt. Unabhängig von CHAPMAN hat F. HAUSDORFF in der in Fußnote 11 genannten Arbeit dieselbe Zusatzbedingung angegeben und zum ersten Male ausdrücklich in die Definition der C-Limitierbarkeit mit einbezogen.

[6]) W. H. YOUNG, On the convergence of the derived series of Fourier series. Proc. of the London Math. Soc. (2) 17 (1918), S. 210.

zu erklären sind, aus denen man entnimmt, daß $H_{-k}(s_n)$ die zu $H_k(s_n)$ inverse Transformation der Folge s_n ist. Der auf Grund von (2) erklärte Begriff der H-Limitierbarkeit negativ-ganzzahliger Ordnung genügt trivialerweise der Permanenzforderung. HAUSDORFF[7]) hat 1921 diese Definition der HÖLDERschen Mittel und der H-Limitierbarkeit auf beliebig reelle Ordnung verallgemeinert.

In einer Untersuchung des Zusammenhangs einiger Reihensätze hat der Verfasser 1940[8]) den folgenden Satz mitgeteilt, dessen Beweis erstmalig in der vorliegenden Untersuchung erbracht wird:

Es ist $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \Delta^k a_n = s$ *dann und nur dann, wenn ein Polynom* P_n *höchstens* $(k-1)$*-ten Grades in* n *existiert, so daß* $\sum_{0}^{\infty} (a_n - P_n) = s$ *und* $\Delta^{k-1}(a_n - P_n) = o(n^{-k})$ *ist.*

Aus einem Vergleich dieses Satzes mit dem folgenden Satz von A. F. ANDERSEN[9]):

Es ist $C_{r+k}\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \Delta^k a_n = s$ *dann und nur dann, wenn ein Polynom* P_n *höchstens* $(k-1)$*-ten Grades in* n *existiert, so daß* $C_r\text{-}\sum_{0}^{\infty} (a_n - P_n) = s$ *ist,* hat der Verfasser a. a. O. die folgende Definition für den Begriff der C-Summierbarkeit negativ-ganzzahliger Ordnung $-k$ entnommen: Eine Reihe $\sum_{0}^{\infty} a_n$ heißt C_{-k}-summierbar zur Summe s, wenn $\sum_{0}^{\infty} a_n = s$ konvergent und $\Delta^{k-1} a_n = o(n^{-k})$ ist[10]). Andererseits wird durch die Tatsache, daß der durch (2) erklärte Ausdruck $H_{-k}(s_n)$ die zur HÖLDERschen Mittelbildung $H_k(s_n)$ inverse Transformation darstellt, nahegelegt, die C_{-k}-Limitierbarkeit einer Folge s_n durch die Konvergenz der zur CESÀROschen Mittelbildung $C_k(s_n)$ inversen Bildung $C_k^{-1}(s_n) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu-k-1}{n-\nu} \binom{\nu+k}{k} s_\nu = \Delta^k \left[\binom{n+k}{k} s_n\right] \to s$

[7]) F. HAUSDORFF, Summationsmethoden und Momentfolgen I. Math. Zeitschr. 9 (1921), S. 83.

[8]) G. LYRA, Über den Zusammenhang einiger Reihensätze. Math. Zeitschr. 45 (1940), S. 633f.

[9]) A. F. ANDERSEN, Comparison theorems in the theory of CESÀRO summability. Proc. of the London Math. Soc. (2) 27 (1927), S. 44. In der in Fußnote 8 zitierten Arbeit des Verf. wird a. a. O., S. 630ff. der genannte Satz unabhängig von ANDERSEN aus einem älteren Satz des Verf. gefolgert. Vgl. daselbst den Zusatz bei der Korrektur.

[10]) Für $k = 1$ erhält man eine Definition der C_{-1}-Summierbarkeit, welche schon seit der in Fußnote 6 genannten Arbeit von W. H. YOUNG aus dem Jahre 1916 vor allem durch G. H. HARDY gebräuchlich geworden ist, und offenbar mit der durch die Konvergenz $H_{-1}(s_n) = s_n + n a_n \to s$ definierten H_{-1}-Summierbarkeit äquivalent ist.

zu definieren. (Wegen der Bedeutung der Differenzensymbole Δ und Δ s. u. I, 3.) Beide Erklärungen erweisen sich als äquivalent mit der folgenden schon 1929 von F. HAUSDORFF [11]) gegebenen Definition der C-Limitierbarkeit negativ-ganzzahliger Ordnung.

Zunächst war für nicht-ganzzahlige Limitierungsordnung $r < -1$ nach CHAPMAN die C-Limitierbarkeit einer Folge s_n durch die Konvergenz der CESÀROschen Mittel (1) und die A-Beschränktheit dieser Folge s_n definiert. HAUSDORFF schreibt nun die erste dieser beiden Forderungen in der Form

$$\frac{n!}{\Gamma(n+r+1)} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+r-1}{n-\nu} s_\nu \to \frac{s}{\Gamma(r+1)}, \tag{3}$$

wodurch die linke Seite dieser Grenzwertbeziehung auch noch für negativ-ganzzahliges $r = -k$ und $n \geqq k$ definiert ist. Die rechte Seite aber strebt für $r \to -k$ ($k > 0$ ganz) gegen Null, weshalb HAUSDORFF die Forderung (3) im Fall negativ-ganzzahliger Ordnung $r = -k$ durch

$$\frac{n!}{(n-k)!} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu-k-1}{n-\nu} s_\nu \to 0 \tag{4}$$

ersetzt. Als Zusatzforderung reicht aber die A-Beschränktheit der s_n nicht mehr aus, da dann die Permanenzbedingung nicht erfüllt wäre. Z. B. braucht eine Reihe Σa_n nicht zu konvergieren, wenn ihre Teilsummen s_n beschränkt sind und $n a_n \to 0$ strebt, wie leicht aus Gegenbeispielen ersichtlich ist; die Teilsummen einer solchen Reihe sind aber erst recht A-beschränkt und erfüllen die Bedingung (4) für $k = 1$. Daher wählt HAUSDORFF als zusätzliche Forderung die A-Limitierbarkeit der Folge s_n, d. h. die Existenz des $\lim (1-x) \sum_0^\infty s_n x^n = s$ für $x \to 1-0$. HAUSDORFF definiert also die C_{-k}-Limitierbarkeit der Folge s_n zum Werte s durch (4) und A-$\lim s_n = s$. Wegen der nunmehr bestehenden Permanenzeigenschaft [11a]) der so erklärten C_{-k}-Limitierbarkeit folgt insbesondere die Konvergenz der Folge $s_n \to s$. Also ist HAUSDORFFS Erklärung gleichbedeutend damit, daß

$$\frac{n!}{(n-k)!} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu-k-1}{n-\nu} s_\nu \to 0 \quad \text{und} \quad s_n \to s \tag{5}$$

konvergiert. Hierin ist die Zusatzforderung $s_n \to s$ zwar wesentlich enger als diejenige HAUSDORFFS. Da aber beide Forderungen (5) zusammen gleichwertig

---

[11]) F. HAUSDORFF, Die Äquivalenz der HÖLDERschen und CESÀROschen Grenzwerte negativer Ordnung. Math. Zeitschr. 31 (1930), S. 186–196. Diese Arbeit ist dem Verf. erst nach Abschluß der vorliegenden Untersuchung durch freundlichen Hinweis von Herrn Prof. K. KNOPP zur Kenntnis gekommen.

[11a]) Vgl. HAUSDORFF, a. a. O., S. 193, Satz V.

mit denjenigen HAUSDORFFS und einfacher als diese sind, so definieren wir die C-Limitierbarkeit negativ-ganzzahliger Ordnung $-k$ durch (5) als eine Verstärkung der Konvergenz, indem wir nicht die zweite der beiden Forderungen (5), sondern die erste als die Zusatzforderung auffassen. Diese ist wegen $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu-k-1}{n-\nu} s_\nu = \Delta^k s_n$ und $\frac{n!}{(n-k)!} \cong n^k$ gleichbedeutend mit $\Delta^k s_n = o(n^{-k})$, so daß schließlich die C_{-k}-Limitierbarkeit der Folge s_n zum Werte s durch

$$s_n \to s \quad \text{und} \quad \Delta^k s_n = o(n^{-k}) \tag{6}$$

definiert ist[12]). Die oben gegebene Erklärung des Verf. ist also in der Tat mit derjenigen HAUSDORFFS äquivalent. HAUSDORFF hat a. a. O. unabhängig von CHAPMAN auch die C-Limitierbarkeit nicht-ganzzahliger negativer Ordnung erklärt und bereits gezeigt, daß der KNOPP-SCHNEESche Äquivalenzsatz auch für beliebig negative Limitierungsordnung gültig ist. Weil der Beweis dieses Äquivalenzsatzes für negativ-ganzzahlige Ordnung unter Zugrundelegung der Definition (6) des C_{-k}-lim s_n besonders einfach wird, ist er in der folgenden Untersuchung mit aufgenommen worden, in welcher wir uns auch sonst auf ganzzahlige Summationsordnung beschränken. Doch gelten die wesentlichen Ergebnisse mutatis mutandis auch für beliebig reelle Ordnung.

Da eine Reihe, welche C-summierbar negativer Ordnung ist, stets konvergiert, so handelt es sich bei der Ausdehnung des Begriffs der C-Summierbarkeit auf negative Ordnung nicht eigentlich um ein „Summierungsverfahren", sondern um eine Verallgemeinerung des Summationsbegriffs, die einen besseren Einblick in die Natur der Konvergenz gewährt, als das bei Beschränkung auf die C-Summierbarkeit positiver Ordnung möglich ist. Es lassen sich nämlich nicht nur bekannte Sätze über C- und H-summierbare Reihen auf beliebig ganzzahlige Summationsordnung verallgemeinern, sondern es werden auch solche Sätze der klassischen Reihenlehre, welche unter Beschränkung auf positive Summierbarkeitsordnung kein Analogon in der Theorie der C- und H-summierbaren Reihen haben konnten, sich nunmehr auf C- und H-summierbare Reihen verallgemeinern lassen. Vor allem aber soll an Beispielen gezeigt werden, daß sich manche Reihensätze unter Verwendung des Begriffs der C_{-k}-Summierbarkeit wesentlich einfacher und durchsichtiger formulieren lassen, und daß sich zuweilen zwei ganz verschiedene Sätze aus der Theorie der C-summierbaren Reihen als die beiden, der negativen und der positiven Summationsordnung entsprechenden Hälften

[12]) Zahlenfolgen mit der Eigenschaft (6) nennt A. F. ANDERSEN „regulär von der Ordnung k"; vgl. die Berichte über Den sjette skandinaviske Matematikerkongres i København (1925), S. 458.

eines einzigen Satzes über C-summierbare Reihen beliebig ganzzahliger Ordnung erweisen. Damit trägt der Begriff der C-Summierbarkeit negativer Ordnung dazu bei, in der Theorie der C-summierbaren Reihen eine weitgehende Analogie zur Theorie der konvergenten Reihen herzustellen und neue Zusammenhänge zwischen bekannten Reihensätzen aufzufinden.

I. Die C_{-k}-Summierbarkeit und äquivalente Eigenschaften.

1. Wie bereits einleitend bemerkt, beschränken wir uns durchweg auf ganzzahlige Summationsordnung und legen der Betrachtung die folgende Form der Hausdorffschen Definition für die C-Summierbarkeit negativ ganzzahliger Ordnung $-k$ zugrunde: Eine Reihe $\sum_0^\infty a_n$ heißt C_{-k}-summierbar zur Summe s, wenn $\sum_0^\infty a_n = s$ konvergent und $\Delta^{k-1} a_n = o(n^{-k})$ ist. Aus dieser so erklärten C_{-k}-Summierbarkeit ersieht man leicht die Gültigkeit des Permanenzsatzes für negative Ordnung, wonach $C_{-k+1}\text{-}\sum_0^\infty a_n = s$ aus $C_{-k}\text{-}\sum_0^\infty a_n = s$ folgt; denn ist $k \geqq 2$ (für $k = 1$ ist der Satz trivial), dann folgt aus $\Delta^{k-1} a_n = o(n^{-k})$, daß

$$\Delta^{k-2} a_n = K' + \sum_{\nu=0}^{n} \Delta^{k-1} a_\nu = K' + \sum_{\nu=0}^{n} o(\nu^{-k}) = K + \sum_{\nu=n}^{\infty} o(\nu^{-k})$$
$$= K + o(n^{-k+1});$$

wegen der Konvergenz von $\sum_0^\infty a_n$ strebt $\Delta^{k-2} a_n \to 0$, so daß $K = 0$ sein muß. Auch die Erweiterungsbedingung ist erfüllt, da für jedes ganzzahlige k die Reihe $\sum_0^\infty (-1)^n (n+1)^{-k}$ C_{-k+1}-summierbar ist, nicht aber C_{-k}-summierbar, wie aus der leicht zu verifizierenden Abschätzung

$$(1) \quad n^{k-1} \Delta^{k-2} \frac{(-1)^n}{n^k} = O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ und } n^k \Delta^{k-1} \frac{(-1)^n}{n^k} = 2^{k-1}(-1)^n + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

hervorgeht. Für die C_{-k}- und H_{-k}-Summierbarkeit als verstärkte Konvergenz gilt trivialerweise auch die Verträglichkeitsbedingung.

Hausdorff hat die Gültigkeit des Knopp-Schnee'schen Äquivalenzsatzes für beliebig negative Summationsordnung nachgewiesen. Bei Beschränkung auf negativ-ganzzahlige Summationsordnung läßt sich der Beweis des Äquivalenzsatzes sehr einfach und in vollkommener Analogie zu demjenigen[13])

[13]) Vgl. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl., Berlin 1931, S. 499ff.

von I. Schur und A. F. Andersen für positiv-ganzzahlige Ordnung führen. Wir beweisen zunächst die beiden folgenden Identitäten für $k \geqq 1$:

$$(2)\quad -k\binom{n}{k}\Delta^k s_n + \binom{n}{k-1}\Delta^{k-1}(s_n + n a_n) = k\binom{n}{k-1}\Delta^{k-1} s_n,$$

$$(3)\quad -k\binom{n}{k}\Delta^k s_n + \binom{n}{k-1}\Delta^{k-1}(s_n + n a_n) = k\frac{\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu}{k-1}\Delta^{k-1}(s_\nu + \nu a_\nu)}{n+1}.$$

Die Beziehung (2) geht aus der Identität

$$(4)\quad -(n-k+1)\Delta^k s_n + \Delta^{k-1}(s_n + n a_n) = k\Delta^{k-1} s_n$$

durch Multiplikation mit $\binom{n}{k-1}$ hervor. (4) ist für $k = 1$ richtig; aus dem Bestehen der Identität (4) für ein bestimmtes $k \geqq 1$ folgt ihre Richtigkeit für $k+1$ statt k durch einmalige Ausübung der Differenzenbildung auf (4) und nachfolgende Addition von $\Delta^k s_n$ auf beiden Seiten. Zum Beweise von (3) setze man in (4) $\Delta^k s_n = \Delta^{k-1} s_n - \Delta^{k-1} s_{n-1}$ und erhält

$$-(n+1)\Delta^{k-1} s_n + (n-k+1)\Delta^{k-1} s_{n-1} + \Delta^{k-1}(s_n + n a_n) = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\binom{n}{k-1}$, so wird

$$(n+1)\binom{n}{k-1}\Delta^{k-1} s_n - n\binom{n-1}{k-1}\Delta^{k-1} s_{n-1} = \binom{n}{k-1}\Delta^{k-1}(s_n + n a_n),$$

woraus durch Aufsummieren nach n und nachfolgende Division mit $n+1$ die Übereinstimmung der beiden rechten Seiten von (2) und (3) folgt, womit alles bewiesen ist.

Zunächst ergibt sich aus diesen beiden Beziehungen (2) und (3) fast unmittelbar der

Hilfssatz. *Ist die Folge s_n C_{-k}-limitierbar zum Werte s, so ist die Folge $H_{-1}(s_n) = s_n + n a_n$ erst C_{-k+1}-limitierbar zum selben Werte und umgekehrt.*

Denn strebt $s_n \to s$ und $n^k \Delta^k s_n \to 0$ und ist $k \geqq 2$ (für $k = 1$ ist der Hilfssatz trivial), so strebt nach dem Permanentsatz auch $n^{k-1}\Delta^{k-1} s_n \to 0$ und somit nach (2) auch $n^{k-1}\Delta^{k-1}(s_n + n a_n) \to 0$. Da $n \Delta s_n \to 0$ strebt zufolge der Permanenz und damit auch $s_n + n a_n \to s$, so ist $C_{-k+1}\text{-}\lim(s_n + n a_n) = s$. Strebt umgekehrt $s_n + n a_n \to s$ und $n^{k-1}\Delta^{k-1}(s_n + n a_n) \to 0$, dann bilden auch die arithmetischen Mittel der $n^{k-1}\Delta^{k-1}(s_n + n a_n)$ eine Nullfolge, so daß nach (3) $n^k \Delta^k s_n \to 0$ strebt. Da mit $s_n + n a_n \to s$ auch $s_n \to s$ strebt, so ist also $C_{-k}\text{-}\lim s_n = s$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Nun folgt aber aus diesem Hilfssatz eine jede der Beziehungen

$$C_{-k}(H_0(s_n)) \to s,\quad C_{-k+1}(H_{-1}(s_n)) \to s,\quad C_{-k+2}(H_{-2}(s_n)) \to s,\quad \ldots,$$
$$C_0(H_{-k}(s_n)) \to s$$

aus jeder der übrigen, insbesondere die erste aus der letzten Beziehung und umgekehrt. Das ist aber gerade der Äquivalenzsatz für $p = -k$.

Auch das Analogon zum KRONECKERschen Satz, daß bei einer C_p-summierbaren Reihe $\sum_0^\infty a_n$ notwendig $C_p\text{-}\lim \frac{1a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n+1} = 0$ sein muß, gilt jetzt auch für negativ-ganzzahlige Ordnung $p = -k$. Denn für $k = 1$ folgt aus $s_n \to s$ und $n^k \Delta^k s_n \to 0$ nach obigem Hilfssatz, daß $n^{k+1} \Delta^{k+1} \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} \to 0$ und $\frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} \to s$ strebt und hieraus $n^k \Delta^k \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} \to 0$ nach dem Permanenzsatz. Daher strebt auch

$$n^k \Delta^k s_n - n^k \Delta^k \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} = n^k \Delta^k \frac{1a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n+1} \to 0$$

w. z. b. w.

Ein anderes Beispiel zur Ausdehnung der C-Summierbarkeit auf negativ-ganzzahlige Ordnung ist der Satz, wonach die DIRICHLETsche Reihe $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n/n^s$ für alle der Bedingung

$$-p < s \leqq -p + 1$$

genügenden Punkte s genau C_p-summierbar ist. Es besteht nähmlich die für alle ganzen $r \geqq 1$ gültige Abschätzung

$$n^r \Delta^{r-1} \frac{(-1)^n}{n^s} = \frac{2^{r-1}(-1)^n + O\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{s-r}}.$$

Denn die Gleichung $\Delta^{r-1} \frac{(-1)^n}{n^s} = 2^{r-1} \frac{(-1)^n}{n^s} + O\left(\frac{1}{n^{s+1}}\right)$ gilt für alle $r \geqq 1$, da sie für $r = 1$ richtig ist und durch einmalige Differenzenbildung ihre Richtigkeit für $r + 1$ statt r folgt. Multiplikation mit n^r ergibt die behauptete Abschätzung. Aus ihr folgt aber, daß $n^r \Delta^{r-1} \frac{(-1)^n}{n^s} \to 0$ strebt für $r < s$, jedoch nicht mehr für $r \geqq s$. Also ist $r = -k$ mit $k < s \leqq k + 1$ die genaue Summierbarkeitsordnung.

2. Für die Auffindung etwaiger Zusammenhänge von Reihensätzen ist die Feststellung weiterer Eigenschaften von Bedeutung, welche mit der C-Summierbarkeit negativ-ganzzahliger Ordnung äquivalent sind. Wir definieren die C_k^{-1}-Summierbarkeit durch die Konvergenz der zur CESÀROschen Mittelbildung inversen Transformation und beweisen den folgenden

Satz 1. *Ist für ein $k \geqq 0$ die Reihe $\sum_0^\infty a_n$ C_k^{-1}-summierbar zur Summe s, so ist sie auch C_{-k}-summierbar zur selben Summe und umgekehrt.*

Zum Beweise folgern wir zunächst die Permanenzeigenschaft der C_k^{-1}-Summierbarkeit am einfachsten aus der für positive Ordnung bekannten

Matrizengleichung $H_1 C_{k-1} = C_{k-1} H_1$ durch Übergang zur Reziproken $C_{k-1}^{-1} H_{-1} = H_{-1} C_{k-1}^{-1}$ oder

$$(\xi)\quad \Delta^{k-1}\left[\binom{n+k-1}{k-1}\Delta(n+1)s_n\right] = (n+1)\Delta^{k-1}\left[\binom{n+k-1}{k-1}s_n\right] - n\Delta^{k-1}\left[\binom{n+k-2}{k-1}s_{n-1}\right].$$

Addiert man auf beiden Seiten $(k-1)\Delta^{k-1}\left[\binom{n+k-1}{k-1}s_n\right]$, so findet man

$$(n+k)\Delta^{k-1}\left[\binom{n+k-1}{k-1}s_n\right] + n\Delta^{k-1}\left[\binom{n+k-2}{k-1}s_{n-1}\right] = k\Delta^k\left[\binom{n+k}{k}s_n\right].$$

Multiplikation dieser Gleichung mit $\frac{(n+k-1)!}{n!\,k!}$ liefert

$$(6)\qquad \Delta\left[\binom{n+k}{k}C_{k-1}^{-1}(s_n)\right] = \binom{n+k-1}{k-1}C_k^{-1}(s_n).$$

Hieraus folgt durch Aufsummieren nach n und nachfolgende Division mit $\binom{n+k}{k}$ die Beziehung

$$C_{k-1}^{-1}(s) = \frac{\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu+k-1}{k-1}C_k^{-1}(s_\nu)}{\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu+k-1}{k-1}}.$$

Hieraus ist wegen der bekannten Verallgemeinerung des Cauchy-Toeplitzschen Grenzwertsatzes die behauptete Permanenz abzulesen.

Die Äquivalenz der C_{-k}- und C_k^{-1}-Summierbarkeit folgt nun unmittelbar aus den beiden Relationen

$$(7)\qquad \Delta^k\left[\binom{n+k}{k}s_n\right] = s_n + \binom{k}{1}\binom{n}{1}\Delta s_n + \binom{k}{2}\binom{n}{2}\Delta^2 s_n + \cdots + \binom{k}{k}\binom{n}{k}\Delta^k s_n,$$

$$(8)\qquad (-1)^k\binom{n}{k}\Delta^k s_n = s_n - \binom{k}{1}\Delta\left[\binom{n+1}{1}s_n\right] + \binom{k}{2}\Delta^2\left[\binom{n+2}{2}s_n\right] - \cdots + (-1)^k\binom{k}{k}\Delta^k\left[\binom{n+k}{k}s_n\right],$$

deren erste unter Anwendung der bekannten Formel

$$\Delta^k\alpha_n\beta_n = \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\Delta^\nu\alpha_n\Delta^{k-\nu}\beta_{n-\nu} \quad\text{und}\quad \Delta^k\binom{n+r}{n} = \binom{n+r-k}{n}$$

erhalten wird, und deren zweite die eindeutig vorhandene Auflösung des durch die erste Beziehung für $k = 0, 1, 2, \ldots$ gegebenen Gleichungssystems nach den $\binom{n}{k}\Delta^k s_n$ darstellt. Ist $C_{-k}\text{-}\sum_0^\infty a_n = s$, d. h. strebt $s_n \to s$ und $n^k\Delta^k s_n \to 0$, so strebt zufolge der Permanenz auch $n^\varkappa\Delta^\varkappa s_n \to 0$ für $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$ und also nach der ersten Beziehung $\Delta^k\binom{n+k}{k}s_n \to s$, d. h.

es ist $C_k^{-1}\text{-}\sum_0^\infty a_n = s$. Wegen der Permanenz der C_k^{-1}-Summierbarkeit trifft nach der zweiten Beziehung auch der umgekehrte Schluß zu, womit die Äquivalenz der C_{-k}- und C_k^{-1}-Summierbarkeit bewiesen ist. Der Äquivalenzbeweis kann aber auch leicht direkt erbracht werden. Denn es bestehen für die C_k^{-1}-Mittel die beiden Relationen

$$k\,C_k^{-1}(s_n) - C_{k-1}^{-1}(s_n + na_n) = (k-1)\,C_{k-1}^{-1}(s_n), \tag{9}$$

$$k\,C_k^{-1}(s_n) - C_{k-1}^{-1}(s_n + na_n) = (k-1)\frac{\sum_{\nu=0}^{n} C_{k-1}^{-1}(s_\nu + \nu a_\nu)}{n+1}. \tag{10}$$

Erstere geht aus der trivialen Identität $(n+k)\,s_n - n s_{n-1} - (s_n + na_n) = (k-1)\,s_n$ durch Multiplikation mit $\binom{n+k-1}{k-1}$ und nachfolgende Ausübung der Differenzenbildung Δ^{k-1} hervor. Die zweite Relation folgt aus (5) durch Aufsummieren nach n und nachfolgende Division mit $n+1$. Dadurch erhält man die Gleichheit der rechten Seiten beider Relationen, die somit bewiesen sind.

Aus diesen beiden Relationen ist unmittelbar der dem früheren analoge Hilfssatz abzulesen, daß aus der C_k^{-1}-Limitierbarkeit der Folge s_n die C_{k-1}^{-1}-Limitierbarkeit der Folge $H_{-1}(s_n) = s_n + na_n$ folgt und umgekehrt. Hiernach ist wieder jede der Beziehungen

$$C_k^{-1}(s_n) \to s,\ C_{k-1}^{-1}\left(H_{-1}(s_n)\right) \to s,\ C_{k-2}^{-1}\left(H_{-2}(s_n)\right) \to s,\ \ldots,$$
$$C_1^{-1}\left(H_{-k+1}(s_n)\right) \equiv H_{-k}(s_n) \to s$$

eine Folge der übrigen; insbesondere ist die erste eine Folge der letzten Beziehung und umgekehrt, w. z. b. w.

3. Für die weitere Untersuchung enpfiehlt es sich, die beiden Differenzenbildungen $\Delta x_n = x_n - x_{n+1}$ und $\triangle x_n = x_n - x_{n-1}$ nebeneinander zu gebrauchen und durch die angegebenen Bezeichnungen zu unterscheiden. Es soll nun gezeigt werden, daß die C_{-k}-Summierbarkeit einer Reihe $\sum_0^\infty a_n = s$ im wesentlichen äquivalent ist mit der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\Delta^k a_n = s.$$

Es gilt nämlich der

Satz 2 [14]). *Es ist* $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\Delta^k a_n = s$ *dann und nur dann konvergent, wenn ein Polynom* P_n *höchstens* $(k-1)$*-ten Grades existiert, so daß* $\sum_0^\infty (a_n - P_n) = s$ C_{-k}*-summierbar ist.*

[14]) Dieser Satz findet sich ohne Beweis in der in Fußnote 3 zitierten Arbeit des Verfassers.

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\Delta^k(a_n - P_n)$ die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}\Delta^{k-1}(a_n - P_n)$ zur selben Summe folgt, wo P_n ein beliebiges Polynom höchstens $(k-1)$-ten Grades in n ist. Zwischen den Teilsummen beider Reihen besteht die Beziehung

$$(11)\quad \sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu+k-1}{\nu-1}\Delta^{k-1}(a_\nu - P_\nu) = \frac{k}{k+1}\binom{n+k}{k}\sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{\sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{\mu+k}{k}\Delta^k(a_\mu - P_\mu)}{\binom{\nu+k+1}{k+1}},$$

welche durch den Schluß von n auf $n+1$ bewiesen werde: für $n = 0$ geht (11) über in

$$(12)\quad \Delta^{k-1}(a_0 - P_0) = \frac{k}{k+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{\mu+k}{k}\Delta^k(a_\mu - P_\mu)}{\binom{\nu+k+1}{k+1}}.$$

Wie sich durch einmalige Ausübung der Abelschen partiellen Summation auf die Summe $\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu+k}{k}\Delta^k(a_\nu - P_\nu)\Big/\binom{\nu+k}{k}$ und nachfolgenden Grenzübergang für $n \to \infty$ ergibt, ist die rechte Seite der Gleichung (12) gleich $\sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta^k(a_\nu - P_\nu) = \Delta^{k-1}(a_0 - P_0)$. Also ist (11) für $n = 0$ richtig. Aus der Gültigkeit der Beziehung (11) für ein bestimmtes $n \geqq 0$ folgt dann durch Multiplikation mit $\frac{n+k+1}{k+1}$ und nachfolgendes Hinüberschaffen des ersten Reihengliedes auf die linke Seite die Gleichung

$$\frac{n+k+1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu+k-1}{k-1}\Delta^{k-1}(a_\nu - P_\nu) - \frac{k}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu+k}{k}\Delta^k(a_\nu - P_\nu) = \frac{k}{k+1}\binom{n+1+k}{k}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{\mu+k}{k}\Delta^k(a_\mu - P_\mu)}{\binom{\nu+k+1}{k+1}}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung erhält aber nach einmaliger Anwendung der partiellen Summation die Gestalt

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu+k}{k}\Delta^k(a_\nu - P_\nu) + \frac{n+k+1}{n+1}\binom{n+k}{k}\Delta^{k-1}(a_{n+1} - P_{n+1}) = \sum_{\nu=0}^{n+1}\binom{\nu+k}{k}\Delta^k(a_\nu - P_\nu).$$

Somit hat man (11) für $n+1$ statt n erhalten, womit (11) bewiesen ist. Die rechte Seite der Gleichung (11) stellt eine lineare Transformation der Zahlenfolge $\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu+k}{k}\Delta^k(a_\nu - P_\nu)$ dar mit der Matrix $T_{n\nu}=0$ oder $=\frac{k}{k+1}\binom{n+k}{k}\Big/\binom{\nu+k+1}{k+1}$, je nachdem $\nu<n$ oder $\nu\geqq n$ ist. Nun ist diese Matrix regulär, weil

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|T_{n\nu}|\equiv\sum_{\nu=0}^{\infty}T_{n\nu}=\frac{k}{k+1}\binom{n+k}{k}\sum_{\nu=n}^{\infty}1\Big/\binom{\nu+k+1}{k+1}=1$$

und $\lim_{n\to\infty}T_{n\nu}=0$ ist für jedes $\nu\geqq 0$, wegen $T_{n\nu}=0$ für $n>\nu$. Wegen der vorausgesetzten Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\Delta^k(a_n-P_n)$ strebt daher die rechte Seite von (11) gegen s, d. h. es ist $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}\Delta^{k-1}(a_n-P_n)$ konvergent, wie behauptet.

Nun folgt Satz 2 fast unmittelbar aus den beiden Identitäten

$$(13)\quad \sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu+k-1}{k-1}\Delta^{k-1}(a_\nu-P_\nu)$$
$$=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu+k}{k}\Delta^k(a_\nu-P_\nu)+\binom{n+k}{k}\Delta^{k-1}(a_{n+1}-P_{n+1}),$$

$$(14)\quad \sum_{\nu=0}^{n}(a_\nu-P_\nu)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu+k}{k}\Delta^k(a_\nu-P_\nu)+$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{k}\binom{n+\lambda}{\lambda}\Delta^{\lambda-1}(a_{n+1}-P_{n+1}),$$

welche aus den Summen $\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu+k-1}{k-1}\Delta^{k-1}(a_\nu-P_\nu)$ und $\sum_{0}^{n}(a_\nu-P_\nu)$ durch ein- bzw. k-malige Ausübung der partiellen Summation hervorgehen. Denn ist C_{-k}-$\sum_{0}^{\infty}(a_n-P_n)=s$, d. h. $\sum_{0}^{\infty}(a_n-P_n)=s$ konvergent und $n^k\Delta^{k-1}(a_n-P_n)\to 0$, so strebt wegen der Permanenz der C_{-k}-Summierbarkeit auch $n^\lambda\Delta^{\lambda-1}(a_n-P_n)\to 0$ für $\lambda=1,2,\ldots,k$, so daß $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\Delta^k(a_n-P_n)$ nach (14) zur Summe s konvergiert. Sei umgekehrt $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\Delta^k a_n=s$ konvergent vorausgesetzt. Dann ist wegen der Perma-

nenz des C_k-Verfahrens auch $C_k\text{-}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\Delta^k a_n = s$, so daß nach Satz 1 ein Polynom P_n höchstens $(k-1)$-ten Grades in n existiert, für das $\sum_0^{\infty}(a_n - P_n) = s$ konvergiert. Ferner strebt $n^k\Delta^{k-1}(a_n - P_n) \to 0$ nach (13), da mit $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\Delta^k(a_n - P_n) = s$ auch $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}\Delta^{k-1}(a_n - P_n) = s$ konvergiert. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Schließlich merken wir noch den allgemeinen Satz an, welcher für $p = -k$ den Satz 2 als Spezialfall enthält:

Satz 3. *Ist $k \geqq 0$ und p beliebig, so ist $C_{p+k}\text{-}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\Delta^k a_n = s$ dann und nur dann, wenn ein Polynom höchstens $(k-1)$-ten Grades in n existiert, so daß $C_p\text{-}\sum_0^{\infty}(a_n - P_n) = s$ ist.*

Für positive p ist der Satz bereits 1926 von A. F. Andersen[15]) bewiesen worden. Für $p \geqq -k$ folgt er unmittelbar aus Satz 2 unter Benutzung des von Andersen herrührenden Satzes: Es ist $C_{p+1}\text{-}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k+1}{k+1}\Delta a_n = s$ dann und nur dann, wenn eine Konstante A existiert, so daß $C_p\text{-}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}(a_n - A) = s$ ist. Hierin ist $p \geqq -1$ vorausgesetzt. Doch gilt er für alle ganzzahligen p, woraus dann Satz 3 auch für $p < -k$ gefolgert werden kann. Ist $C_{p+k}\text{-}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\Delta^k a_n = s$, so ist das Polynom $P_n = A_1 n^{k-1} + A_2 n^{k-2} + \cdots + A_k$ eindeutig bestimmt. Die Koeffizienten lassen sich durch die Rekursionsformel

$$A_\lambda = \frac{(-1)^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!}C_p\text{-}\lim \Delta^{k-\lambda}[a_n - (A_1 n^{k-1} + A_2 n^{k-2} + \cdots + A_{\lambda-1}n^{k-\lambda+1})]$$

$$\text{mit } \lambda = 2, 3, \ldots, k \quad \text{und} \quad A_1 = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}C_p\text{-}\lim \Delta^{k-1} a_n$$

darstellen, wie durch vollständige Induktion leicht bestätigt werden kann.

Macht man in Satz 3 die Voraussetzung, daß $V\text{-}\lim a_n = 0$ ist, wo V ein willkürliches (lineares und permanentes) Limitierungsverfahren bezeichnet, so verschwindet das Polynom P_n identisch; denn ist $V\text{-}\lim a_n = 0$, so

[15]) Vgl. Fußnote 9.

folgt aus $\lim (a_n - P_n) = 0$ wegen der Permanenz und Linearität des V-Verfahrens $V\text{-}\lim P_n = 0$ also $P_n \equiv 0$. Es gilt also der

Satz 4. *Ist* $k \geqq 0$, p *beliebig und* $V\text{-}\lim a_n = 0$, *so ist* $C_{p+k}\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \Delta^k a_n = s$ *dann und nur dann, wenn* $C_p\text{-}\sum_0^\infty a_n = s$ *ist.*

Unter den engeren Voraussetzungen $p = -k$ und $\lim a_n = 0$ statt $V\text{-}\lim a_n = 0$ ist Satz 4 schon von ANDERSEN[16]) bewiesen worden.

II. Die absolute C_{-k}-Summierbarkeit und äquivalente Eigenschaften.

1. In der Theorie der C-Summierbarkeit negativ-ganzzahliger Ordnung $-k$ fehlt bislang der Begriff der absoluten C-Summierbarkeit. Bevor wir diesen Begriff einführen, geben wir von dem bereits von HAUSDORFF a. a. O. erklärten Begriff der C_{-k}-Beschränktheit eine Definition, welche derjenigen HAUSDORFFS äquivalent ist. Bekanntlich versteht man unter der C_k-Beschränktheit einer Folge s_n positiver Ordnung k die Beschränktheit der CESÀROschen Mittel $C_k(s_n)$. Da nun die C_{-k}-Summierbarkeit nicht durch die Konvergenz einer einzelnen Zahlenfolge erklärt ist, so wird von dem Begriff der C_{-k}-Beschränktheit einer Folge s_n jedenfalls gefordert werden müssen, daß er mit der Beschränktheit der Folge $C_k^{-1}(s_n)$ äquivalent ist. In der Tat erweist sich die folgende naheliegende Definition als gleichwertig mit der Beschränktheit der C_k^{-1}-Mittel.

Definition. Die Folge der Teilsummen s_n einer Reihe $\sum_0^\infty a_n$ heißt C_{-k}-beschränkt, wenn die Folgen s_n und $n^k \triangle^{k-1} a_n$ beide beschränkt sind.

Satz 5. *Eine Folge* s_n *ist dann und nur dann* C_{-k}*-beschränkt, wenn die Folge* $C_k^{-1}(s_n)$ *beschränkt ist.*

Denn sei zunächst $s_n = a_0 + \cdots + a_n$ C_{-k}-beschränkt vorausgesetzt. Dann folgt der Reihe nach für $k \geqq 1$

$$\triangle^{k-1} a_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right),$$

$$\triangle^{k-2} a_n = O\left(\frac{1}{n^{k-1}}\right) + A_1,$$

$$\triangle^{k-3} a_n = O\left(\frac{1}{n^{k-2}}\right) + A_1 n + A_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) + A_1 n^{k-2} + A_2 n^{k-3} + \cdots + A_{k-1},$$

$$s_n = O(\ln n) + A_1 n^{k-1} + A_2 n^{k-2} + \cdots + A_{k-1} n.$$

[16]) Vgl. die in Fußnote 12 genannte Arbeit.

Wegen $s_\nu = O(1)$ muß $A_1 = A_2 = \cdots = A_{k-1} = 0$ sein, so daß $n^\lambda \Delta^{\lambda-1} a_n = O(1)$ ist für $\lambda = 1, 2, \ldots, k-1$. Daher folgt aus der Identität

$$(15)\quad C_k^{-1}(s_n) = s_n + \binom{k}{1}\binom{n}{1} a_n + \binom{k}{2}\binom{n}{2} \Delta a_n + \cdots + \binom{k}{k}\binom{n}{k} \Delta^{k-1} a_n$$

die Beschränktheit der Folge $C_k^{-1}(s_n)$.

Sei umgekehrt $C_k^{-1}(s_n)$ beschränkt vorausgesetzt. Dann folgt aus der Identität (vgl. S. 546)

$$C_{k-1}^{-1}(s_n) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+k-1}{k-1} C_k^{-1}(s_\nu) \Big/ \binom{n+k}{k},$$

daß auch $C_{k-1}^{-1}(s_n)$, $C_{k-2}^{-1}(s_n)$, $\ldots$, $C_0^{-1}(s_n) \equiv s_n$ beschränkte Folgen sind. Schließlich folgt aus der Identität

$$(-1)^k \binom{n}{k} \Delta^{k-1} a_n = s_n - \binom{k}{1} C_1^{-1}(s_n) + \binom{k}{2} C_2^{-1}(s_n) - \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} C_k^{-1}(s_n)$$

die Beschränktheit der Folge $n^k \Delta^{k-1} a_n$, w. z. b. w.

Ferner gilt der folgende

Satz 6. *Die Folge s_n der Teilsummen einer Reihe $\sum_0^\infty a_n$ ist dann und nur dann C_{-k}-beschränkt, wenn die Teilsummen der Reihen $\sum_0^\infty a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \Delta^k a_n$ beide beschränkt sind.*

Denn ist die Folge s_n C_{-k}-beschränkt, so folgt aus Gleichung (14) für $P_n = 0$ und wegen $n^\lambda \Delta^{\lambda-1} a_n = O(1)$ für $\lambda = 1, 2, \ldots, k-1$, daß die Folge $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+k}{k} \Delta^k a_\nu$ beschränkt ist. Ist umgekehrt s_n und $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+k}{k} \Delta^k a_\nu$ beschränkt vorausgesetzt, dann folgt aus (11), daß für $\lambda = 1, 2, \ldots, k$ auch $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+\lambda-1}{\lambda-1} \Delta^{\lambda-1}(a_\nu - P_\nu)$ beschränkt ist, wo P_n ein gewisses Polynom höchstens $(k-1)$-ten Grades in n ist. Insbesondere ist also $\sum_0^n (a_\nu - P_\nu) = s_n - Q_n$ beschränkt, wo $Q_n = \sum_0^n P_\nu$ ein Polynom höchstens k-ten Grades in n ist. Wegen der Beschränktheit von s_n muß aber Q_n vom 0-ten Grade sein und also P_n identisch verschwinden. Aus der Beschränktheit der Folge s_n und $\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+k}{k} \Delta^k a_\nu$ folgt also, daß $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+k-1}{k-1} \Delta^{k-1} a_\nu$ beschränkt ist. Hieraus ergibt sich aber wegen Gleichung (13) die Beschränktheit der Folge $n^k \Delta^{k-1} a_n$, womit alles bewiesen ist.

Allgemeiner soll unter der einseitigen C_{-k}-Beschränktheit einer Folge s_n verstanden werden, daß die Folgen s_n und $n^k \Delta^k s_n$ beide nach derselben Seite beschränkt sind. Wie aus der Beziehung (15) hervorgeht, verlangt diese Eigenschaft nicht weniger als die Forderung $C_k^{-1}(s_n) > -K$.

2. In der Theorie der C-Summierbarkeit wird in Analogie zur absoluten Konvergenz die absolute C_k-Summierbarkeit durch die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |C_k(s_n) - C_k(s_{n-1})|$ definiert. Da aber die C-Summierbarkeit negativer Ordnung nicht durch die Konvergenz einer einzelnen Zahlenfolge erklärt ist, jedoch mit der Konvergenz der C_k^{-1}-Mittel äquivalent ist, so liegt es nahe, den Begriff der „absoluten C_{-k}-Summierbarkeit" durch die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |C_k^{-1}(s_n) - C_k^{-1}(s_{n-1})| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \Delta^{k+1} \binom{n+k}{k} s_n \right|$ zu definieren. Auf Grund dieser

Definition. Eine Reihe $\sum_0^{\infty} a_n$ heißt absolut C_{-k}-summierbar, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \Delta^{k+1} \binom{n+k}{k} s_n \right|$ konvergiert, gilt der

Satz 7. *Für die absolute C_{-k}-Summierbarkeit einer Reihe $\sum_0^{\infty} a_n$ ist notwendig und hinreichend, daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \binom{n+k}{k} \Delta^k a_n \right|$ konvergiert und $V\text{-}\lim a_n = 0$ ist.*

Hierin bezeichnet V wieder ein beliebiges Limitierungsverfahren. Zum Beweise dieses Satzes gebrauchen wir die in den folgenden beiden Sätzen ausgesprochene Permanenzeigenschaft der Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \Delta^{k+1} \binom{n+k}{k} s_n \right|$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \binom{n+k}{k} \Delta^k a_n \right|$.

Hilfssatz 1. *Ist für ein $k \geqq 1$ die Reihe $\sum_{n=0} \left| \binom{n+k}{k} \Delta^k a_n \right|$ konvergent, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \binom{n+k-1}{k-1} \Delta^{k-1}(a_n - A_1 n^{k-1}) \right|$, wo $A_1 = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \lim_{n \to \infty} \Delta^{k-1} a_n$ ist.*

Nach Voraussetzung ist $\lim_{n \to \infty} \Delta^{k-1} a_n = (-1)^{k-1}(k-1)!\, A_1$ sicher vorhanden und daher

$$\sum_{\lambda=\nu}^{\infty} \Delta^k a_\lambda = \Delta^{k-1} a_\nu - (-1)^{k-1}(k-1)!\, A_1 = \Delta^{k-1}(a_\nu - A_1 \nu^{k-1}),$$

oder

$$\binom{\nu+k-1}{k-1}\Delta^{k-1}(a_\nu - A_1\nu^{k-1}) = \binom{\nu+k-1}{k-1}\sum_{\lambda=\nu}^{\infty}\frac{1}{\binom{\lambda+k}{k}}\binom{\lambda+k}{k}\Delta^k a_\lambda.$$

Aus dieser trivialen Identität ergibt sich die Abschätzung

$$\sum_{\nu=0}^{n}\left|\binom{\nu+k-1}{k-1}\Delta^{k-1}(a_\nu - A_1\nu^{k-1})\right| \leqq \sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu+k-1}{k-1}\sum_{\lambda=\nu}^{\infty}\frac{1}{\binom{\lambda+k}{k}}\left|\binom{\lambda+k}{k}\Delta^k a_\lambda\right|$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\nu}\frac{\binom{\lambda+k-1}{k-1}}{\binom{\nu+k}{k}}\left|\binom{\nu+k}{k}\Delta^k a_\nu\right| = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\binom{\nu+k}{k}\Delta^k a_\nu\right|.$$

Also ist $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}\Delta^{k-1}(a_n - A_1 n^{k-1})$ absolut konvergent und

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\binom{n+k-1}{k-1}\Delta^{k-1}(a_n - A_1 n^{k-1})\right| \leqq \sum_{n=0}^{\infty}\left|\binom{n+k}{k}\Delta^k a_n\right|.$$

Durch Iteration des Hilfssatzes ergibt sich: Ist $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\binom{n+k}{k}\Delta^k a_n\right|$ konvergent, so konvergieren die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\binom{n+\mu}{\mu}\Delta^\mu(a_n - P_n)\right|$ für $0 \leqq \mu \leqq k$, wo $P_n - A_1 n^{k-1} + A_2 n^{k-2} + \cdots + A_k$ ein Polynom höchstens $(k-1)$-ten Grades ist, welches durch die Rekursionsformel

$$A_\lambda = \frac{(-1)^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!}\lim_{n\to\infty}\Delta^{k-\lambda}[a_n - (A_1 n^{k-1} + \cdots + A_{\lambda-1}n^{k-\lambda+1})]$$

für $\lambda = 2, 3, \ldots, k$ und $A_1 = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\lim_{n\to\infty}\Delta^{k-1}a_n$ eindeutig bestimmt ist. Besteht über die a_n die Voraussetzung $V\text{-}\lim a_n = 0$, wo V wieder ein beliebiges Limitierungsverfahren bezeichnet, so ist auch $V\text{-}\lim \Delta^{k-\lambda}a_n = 0$ für $1 \leqq \lambda \leqq k$ und also $A_1 = A_2 = \cdots = A_k = 0$, d. h. $P_n \equiv 0$.

Hilfssatz 2. *Ist für ein $k \geqq 1$ die Reihe $\sum_0^\infty a_n$ absolut C_{-k}-summierbar, so ist sie auch absolut C_{-k+1}-summierbar.*

Zunächst beweisen wir die Identität

$$\text{(16)}\qquad \Delta\binom{n+k}{k}n\,\Delta\,C_{k-1}^{-1}(s_n) = n\binom{n+k-1}{k-1}\Delta\,C_k^{-1}(s_n).$$

Subtrahiert man von der mit n multiplizierten Gleichung (6) diejenige Gleichung, welche aus (6) durch Einsetzen von $n-1$ statt n und nachfolgender Multiplikation mit $n+k-1$ hervorgeht, so erhält man die Gleichung

$$n \Delta \binom{n+k}{k} C_{k-1}^{-1}(s_n) - (n+k-1) \Delta \binom{n+k-1}{k} C_{k-1}^{-1}(s_{n-1}) = n \binom{n+k-1}{k-1} \Delta C_k^{-1}(s_n).$$

Die Übereinstimmung der linken Seiten von (16) und dieser Gleichung bestätigt man leicht durch Ausführung der Differenzen. Durch Aufsummieren der Gleichung (16) nach n und nachfolgende Division mit $n \binom{n+k}{k}$ ergibt sich

$$\Delta C_{k-1}^{-1}(s_\nu) = \frac{1}{\nu \binom{\nu+k}{k}} \sum_{\lambda=1}^{\nu} \lambda \binom{\lambda+k-1}{k-1} \Delta C_k^{-1}(s_\lambda). \tag{17}$$

Der Übergang zur Ungleichung zwischen den Beträgen der linken Seite und den Gliedern der rechten Seite und nochmaliges Aufsummieren über ν von 1 bis n liefert die Abschätzung

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left| \Delta C_{k-1}^{-1}(s_\nu) \right| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu \binom{\nu+k}{k}} \sum_{\lambda=1}^{\nu} \lambda \binom{\lambda+k-1}{k-1} \left| \Delta C_k^{-1}(s_\lambda) \right|$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\lambda=\nu}^{n} \frac{\nu \binom{\nu+k-1}{k-1}}{\lambda \binom{\lambda+k}{k}} \left| \Delta C_k^{-1}(s_\nu) \right| = \sum_{\nu=1}^{n} \left[1 - \frac{\binom{\nu+k-1}{k}}{\binom{n+k}{k}} \right] \left| \Delta C_k^{-1}(s_\nu) \right|.$$

Da für $1 \leqq \nu \leqq n$ die Faktoren $1 - \binom{\nu+k-1}{k} \Big/ \binom{n+k}{k} \leqq 1$ sind, so folgt

$$\sum_{\nu=0}^{n} | \Delta C_{k-1}^{-1}(s_\nu) | \leqq \sum_{\nu=0}^{n} | \Delta C_k^{-1}(s_\nu) |, \tag{18}$$

woraus die behauptete Permanenzeigenschaft unmittelbar abzulesen ist.

Der Beweis des Satzes 7 gelingt nun mit Hilfe der folgenden Beziehung:

$$\sum_{\nu=0}^{n-k} \binom{\nu+k}{k} \Delta^k a_\nu - \sum_{\nu=0}^{n-k} \binom{\nu+k-1}{k-1} \Delta^{k-1} a_\nu = s_n - \binom{k}{1} C_1^{-1}(s_n) + \binom{k}{2} C_2^{-1}(s_n) - \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} C_k^{-1}(s_n). \tag{19}$$

Diese Relation folgt unmittelbar aus den Gleichungen (8) und (13), wenn man die Identität

$$(-1)^k \binom{n}{k} \Delta^k s_n = - \binom{n-k+k}{k} \Delta^{k-1} a_{n-k+1}$$

berücksichtigt. Aus (19) findet man durch einmalige Ausübung der Differenzenbildung, Übergang zur Ungleichung zwischen den Beträgen der Differenzen und nachfolgende Aufsummierung nach n die beiden Abschätzungen

$$(20)\quad \sum_{\nu=0}^{n-k}\left|\binom{\nu+k}{k}\Delta^k a_\nu\right| \leqq \sum_{\nu=0}^{n-k}\left|\binom{\nu+k-1}{k-1}\Delta^{k-1}a_\nu\right| + \\ + \sum_0^n |a_\nu| + \binom{k}{1}\sum_0^n |\Delta C_1^{-1}(s_\nu)| + \cdots + \binom{k}{k}\sum_{\nu=0}^n |\Delta C_k^{-1}(s_\nu)|,$$

$$(21)\quad \sum_{\nu=0}^n |\Delta C_k^{-1}(s_\nu)| \leqq \sum_{\nu=0}^{n-k}\left|\binom{\nu+k}{k}\Delta^k a_\nu\right| + \sum_{\nu=0}^{n-k}\left|\binom{\nu+k-1}{k-1}\Delta^{k-1}a_\nu\right| + \\ + \sum_0^n |a_\nu| + \binom{k}{1}\sum_0^n |\Delta C_1^{-1}(s_\nu)| + \cdots + \binom{k}{k-1}\sum_{\nu=0}^n |\Delta C_{k-1}^{-1}(s_\nu)|.$$

Hieraus ergibt sich Satz 7 fast unmittelbar durch den Schluß von m auf $m+1$: Sei der Satz für ein bestimmtes $k = m$ bereits bewiesen. Dann folgt aus der absoluten $C_{-(m+1)}$-Summierbarkeit der Reihe $\sum_0^\infty a_n$ ihre absolute $C_{-\mu}$-Summierbarkeit für $0 \leqq \mu \leqq m$ nach Hilfssatz 2 und damit wegen der Induktionsvoraussetzung die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^\infty \left|\binom{n+m}{m}\Delta^m a_n\right|$. Somit ist nach Ungleichung (20) die Reihe $\sum_{n=0}^\infty \left|\binom{n+m+1}{m+1}\Delta^{m+1}a_n\right|$ konvergent. Trivialerweise ist auch $V\text{-}\lim a_n = 0$. Umgekehrt folgt aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^\infty \left|\binom{n+m+1}{m+1}\Delta^{m+1}a_n\right|$ und $V\text{-}\lim a_n = 0$ die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^\infty \left|\binom{n+m}{m}\Delta^m a_n\right|$ nach Hilfssatz 1 und daraus wegen der Induktionsvoraussetzung die absolute C_{-m}-Summierbarkeit der Reihe $\sum_0^\infty a_n$. Wegen Hilfssatz 2 ist dann $\sum_0^\infty a_n$ auch absolut $C_{-\mu}$-summierbar für $0 \leqq \mu \leqq m$ und somit nach Ungleichung (21) auch absolut $C_{-(m+1)}$-summierbar. Also gilt Satz 7 für $k = m+1$, falls er für $k = m$ richtig ist. Für $k = 1$ ist aber der Satz gewiß richtig. Denn in diesem Fall lauten die Abschätzungen (20) und (21):

$$\sum_0^{n-1} |(\nu+1)\,\Delta a_\nu| \leqq 2\sum_0^n |a_\nu| + \sum_0^n |s_\nu + \nu a_\nu|$$

$$\sum_0^n |s_\nu + \nu a_\nu| \leqq 2\sum_0^n |a_\nu| + \sum_0^{n-1} |(\nu+1)\,\Delta a_\nu|,$$

aus denen die Gültigkeit des Satzes 6 für $k = 1$ abzulesen ist. Damit ist Satz 7 für alle $k \geqq 1$ bewiesen.

3. Schließlich beweisen wir noch die folgende Ausdehnung des Satzes von der Äquivalenz der absoluten C- und H-Summierbarkeit auf den Fall beliebig ganzzahliger Ordnung p.

Satz 8. *Ist für ein beliebig ganzzahliges p die Reihe $\sum_0^\infty a_n$ absolut H_p-summierbar, so ist sie auch absolut C_p-summierbar und umgekehrt.*

Der Beweis dieses Äquivalenzsatzes stützt sich auf den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz. *Ist eine Reihe $\sum_0^\infty a_n$ absolut C_{-k}-summierbar, so ist die Reihe $\sum_0^\infty \Delta\,(s_n + n a_n) = \sum_0^\infty \Delta\, H_{-1}(s_n)$ erst absolut C_{-k+1}-summierbar und umgekehrt.*

Denn nach diesem Hilfssatz folgt aus der Konvergenz irgendeiner der Reihen

$$\sum_0^\infty |\,\Delta\, C_k^{-1}(s_n)\,|,\ \sum_0^\infty |\,\Delta\, C_{k-1}^{-1}(H_{-1}(s_n))\,|,\ \sum_0^\infty |\,\Delta\, C_{k-2}^{-1}(H_{-2}(s_n))\,|,\ \cdots,$$

$$\sum_0^\infty |\,\Delta\, C_1^{-1}(H_{-k+1}(s_n))\,| \equiv \sum_0^\infty |\,\Delta\,(H_{-k}(s_n))\,|$$

die Konvergenz jeder anderen Reihe. Insbesondere ist für die Konvergenz der letzten Reihe, d. h. für die absolute H_{-k}-Summierbarkeit von $\sum_0^\infty a_n$ die Konvergenz der ersten Reihe, d. h. die absolute C_{-k}-Summierbarkeit von $\sum_0^\infty a_n$, notwendig und hinreichend. Das ist aber der Inhalt des Satzes 8 für negative Ordnung $p = -k$.

Zum Beweise des Hilfssatzes bestätigen wir zunächst die beiden Formeln

$$\Delta\, C_{k-1}^{-1}(s_n + n a_n) = k\,\Delta\, C_k^{-1}(s_n) + (1-k)\,\Delta\, C_{k-1}^{-1}(s_n), \tag{22}$$

$$\Delta\, C_k^{-1}(s_n) = \frac{1}{k}\,\Delta\, C_{k-1}^{-1}(s_n + n a_n) + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu}{n\,(n+1)}\,\Delta\, C_{k-1}^{-1}(s_\nu + \nu a_\nu). \tag{23}$$

Erstere ist nur eine triviale Umformung der Gleichung (9). Zum Beweise der zweiten Formel machen wir von der einfachen Identität $\Delta\,[(n+1)\,n\,\Delta\, x_n] = n\,\Delta^2(n+1)\,x_n$ Gebrauch, indem wir

$$x_n = \frac{\sum_{\nu=0}^{n} C_{k-1}^{-1}(s_\nu + \nu a_\nu)}{n+1}$$

setzen, dann nach n aufsummieren und die erhaltene Gleichung mit $n(n+1)$ dividieren. Setzt man die so gewonnene Umformung

$$\Delta \frac{\sum_{\nu=0}^{n} C_{k-1}^{-1}(s_\nu + \nu a_\nu)}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{\nu=0}^{n} \nu \Delta C_{k-1}^{-1}(s_\nu + \nu a_\nu)$$

in diejenige Gleichung ein, welche aus (20) durch einmalige Ausübung der Differenzenbildung hervorgeht, dann ergibt sich die Formel (22). Nun bekommt man aus (22) und (23) durch Bildung der absoluten Beträge und nachfolgende Aufsummierung nach n die beiden Abschätzungen

$$\sum_{\nu=0}^{n} |\Delta C_{k-1}^{-1}(s_\nu + \nu a_\nu)| \leqq k \sum_{\nu=0}^{n} |\Delta C_k^{-1}(s_\nu)| + (k-1) \sum_{\nu=0}^{n} |\Delta C_{k-1}^{-1}(s_\nu)|,$$

$$\sum_{\nu=1} |\Delta C_k^{-1}(s_\nu)| \leqq \frac{1}{k} \sum_{\nu=1}^{n} |\Delta C_{k-1}^{-1}(s_\nu + \nu a_\nu)| +$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{\nu} \frac{\lambda}{\nu(\nu+1)} |\Delta C_{k-1}^{-1}(s_\lambda + \lambda a_\lambda)|.$$

Erstere geht mit Rücksicht auf Ungleichung (18) über in

$$\sum_{\nu=0}^{n} |\Delta C_{k-1}^{-1}(s_\nu + \nu a_\nu)| \leqq (2k-1) \sum_{\nu=0}^{n} |\Delta C_k^{-1}(s_\nu)|. \tag{24}$$

Die zweite Abschätzung geht wegen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{\nu} \frac{\lambda}{\nu(\nu+1)} |\Delta C_{k-1}^{-1}(s_\lambda + \lambda a_\lambda)| = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\lambda=\nu}^{n} \frac{\nu}{\lambda(\lambda+1)} |\Delta C_{k-1}^{-1}(s_\nu + \nu a_\nu)|$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) |\Delta C_{k-1}^{-1}(s_\nu + \nu a_\nu)| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} |\Delta C_{k-1}^{-1}(s_\nu + \nu a_\nu)|$$

in

$$\sum_{\nu=0}^{n} |\Delta C_k^{-1}(s_\nu)| \leqq \sum_{\nu=0}^{n} |\Delta C_{k-1}^{-1}(s_\nu + \nu a_\nu)| \tag{25}$$

über. Aus (24) und (25) folgt unmittelbar der behauptete Hilfssatz, womit der Beweis des Satzes 8 erbracht ist.

III. Weitere Anwendungen des Begriffs der C_{-k}-Summierbarkeit.

1. Zunächst soll als ein weiteres Beispiel eines Reihensatzes, welcher auf C-summierbare Reihen beliebig ganzzahliger Summabilitätsordnung verallgemeinert werden kann, ein Umkehrsatz gewählt werden, nämlich der

Umkehrsatz von DOETSCH[17]). *Ist die Reihe* $\sum_0^\infty a_n$ C_k*-summierbar zur Summe* s *und einseitig* C_{k-2}*-beschränkt, so ist sie schon* C_{k-1}*-summierbar zur selben Summe.*

Dieser Satz, welcher für $k = 1$ den HARDY-LANDAUschen O_L-$C_1 \to K$-Satz als Spezialfall enthält, behält auch für negativ-ganzzahliges k seine Gültigkeit. Dies ergibt sich aus dem folgenden, gleichfalls von G. DOETSCH[18]) bewiesenen sehr allgemeinen Grenzwertsatz:

Strebt $c_n/n^p \to A$ und ist $\Delta^2 c_n/n^{p-2} > -K$, so strebt $\Delta c_n/n^{p-1} \to Ap$, wo p, A und K beliebig reell sind. Setzt man hierin $p = -k$, $A = 0$ und $c_n = \Delta^k s_n$ für $k \geqq 1$ und fügt noch die Aussage $s_n \to s$ zur Voraussetzung und Behauptung des Grenzwertsatzes hinzu, so geht dieser gerade in den Umkehrsatz für $-k$ statt k über. Der Umkehrsatz besteht also für beliebig ganzzahliges k. Zugleich erscheinen damit beide Sätze als Spezialfälle eines einzigen Satzes.

Das folgende Beispiel zeigt, daß der Begriff der C_{-k}-Summierbarkeit dazu beiträgt, auch zur klassischen Reihenlehre eine weitergehende Analogie herzustellen. In der Theorie der C-Summierbarkeit positiver Ordnung konnte es kein Analogon zu dem Satz geben, wonach aus $\lim A_n = A$ und $\lim B_n = B$ der $\lim A_n B_n = AB$ folgt, da ja aus der C-Limitierbarkeit positiver Ordnung der Folgen A_n und B_n nicht notwendig die C-Limitierbarkeit der Folge $A_n B_n$ folgt. Die Verallgemeinerung auf beliebig ganzzahlige Limitierungsordnung k lautet:

Satz 9. *Aus* $C_k\text{-}\lim A_n = A$ *und* $C_{-k}\text{-}\lim B_n = B$ *folgt*

$$C_{|k|}\text{-}\lim A_n B_n = AB.$$

Zum Beweise dieses Satzes bestätigen wir für positives k zunächst die Formel

$$A_n B_n = \sum_{\lambda=0}^{k} C_\lambda^{-1}\Big[C_k(A_n) \cdot \binom{n+k}{k-\lambda} \Delta^{k-\lambda} B_{n+\lambda}\Big], \tag{26}$$

welche durch leichte Umformung aus der Beziehung

$$A_n B_n = \sum_{\lambda=0}^{k} \binom{k}{\lambda} \Delta^\lambda [A_n^{(k)} \Delta^{k-\lambda} B_{n+\lambda}] \tag{27}$$

hervorgeht. Darin ist, wie üblich, $A_n^{(\varkappa)} = A_0^{(\varkappa-1)} + \cdots + A_n^{(\varkappa-1)}$ für $\varkappa \geqq 1$ und $A_n^{(0)} = A_n$ gesetzt. (27) ist für $k = 0$ gewiß richtig. Sei (27) für ein be-

[17]) G. DOETSCH, Über die CESÀROsche Summabilität bei Reihen und eine Erweiterung des Grenzwertbegriffs bei integrablen Funktionen. Math. Zeitschr. 11 (1921), S. 166.

[18]) G. DOETSCH, a. a. O., S. 161.

stimmtes $k \geqq 0$ bereits bewiesen. Dann folgt durch Anwendung der einfachen Umformung $x_n y_n = (x_0 + \cdots + x_n)\, \Delta y_n + \Delta\,[(x_0 + \cdots + x_n) y_{n+1}]$ auf das Produkt $A_n^{(k)} \Delta^{k-\lambda} B_{n+\lambda}$ in (27),

$$A_n B_n = \sum_{\lambda=0}^{k+1} \binom{k}{\lambda} \Delta^\lambda [A_n^{(k+1)} \Delta^{k+1-\lambda} B_{n+\lambda}] + \sum_{\lambda=0}^{k} \binom{k}{\lambda} \Delta^{\lambda+1} [A_n^{(k+1)} \Delta^{k-\lambda} B_{n+\lambda+1}]$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{k+1} \binom{k}{\lambda} \Delta^\lambda [A_n^{(k+1)} \Delta^{k+1-\lambda} B_{n+\lambda}] + \sum_{\lambda=0}^{k+1} \binom{k}{\lambda-1} \Delta^\lambda [A_n^{(k+1)} \Delta^{k+1-\lambda} B_{n+\lambda}]$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{k+1} \left[\binom{k}{\lambda} + \binom{k}{\lambda-1}\right] \Delta^\lambda [A_n^{(k+1)} \Delta^{k+1-\lambda} B_{n+\lambda}]$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{k+1} \binom{k+1}{\lambda} \Delta^\lambda [A_n^{(k+1)} \Delta^{k+1-\lambda} B_{n+\lambda}].$$

Also ist (27) auch für $k+1$ statt k richtig, w. z. b. w. Somit ist (26) für alle $k \geqq 0$ bewiesen. Nun folgt aus der Voraussetzung $C_{-k}\text{-}\lim B_n = B$ nach Definition und der Permanenzeigenschaft des C_{-k}-Limes, daß

$$\lim_{n \to \infty} \binom{n+\varkappa}{\varkappa} \Delta^\varkappa B_n = B \quad \text{oder} \quad = 0$$

ist, je nachdem $\varkappa = 0$ oder $1 \leqq \varkappa \leqq k$.

Andererseits liest man aus (26) unmittelbar ab, daß die C_λ-Mittel des λ-ten Gliedes der $(k+1)$-gliedrigen Summe (26) offenbar

$$= C_k(A_n) \cdot \binom{n+\lambda+k-\lambda}{k-\lambda} \Delta^{k-\lambda} B_{n+\lambda}$$

sind und also für $n \to \infty$ gegen AB oder 0 streben, je nachdem $\lambda = k$ oder $0 \leqq \lambda \leqq k-1$ ist. Also sind alle Glieder der Summe (26) C_k-limitierbar und damit auch die Folge $A_n B_n$ C_k-limitierbar zum Werte $0 + 0 + \cdots + 0 + AB = AB$, was zu beweisen war.

2. Ein weiterer Satz der Reihenlehre, dessen Verallgemeinerung auf C-summierbare Reihen nur mit Hilfe des Begriffs der C-Summierbarkeit negativer Ordnung gelingt, ist das bekannte Konvergenzkriterium von Du Bois-Reymond und Dedekind:

Die Reihe $\sum_0^\infty a_n b_n$ *konvergiert, wenn* $\sum_0^\infty a_n$ *konvergent und* $\sum_0^\infty (b_n - b_{n+1})$ *absolut konvergent ist.*

Es besteht das folgende, für beliebig ganzzahlige k gültige Analogon:

Satz 10. *Die Reihe* $\sum_0^\infty a_n b_n$ *ist* $C_{|k|}$*-summierbar, wenn* $\sum_0^\infty a_n$ C_k*-summierbar und* $\sum_0^\infty (b_n - b_{n+1})$ *absolut* C_{-k}*-summierbar ist.*

Die beiden, den positiven und negativen Werten von k entsprechenden Hälften dieses Satzes sind aber — wie im folgenden nachgewiesen werden soll — wegen der Sätze 3 und 7 nur eine andere Formulierung der beiden folgenden Sätze, deren erster im wesentlichen schon 1909 von H. BOHR[19]) und G. H. HARDY[20]) herrührt, und deren zweiter von A. F. ANDERSEN[21]) 1934 bewiesen wurde:

Satz von BOHR-HARDY. *Ist für ein ganzzahliges* $k \geqq 0$

1. $\sum_0^\infty a_n$ *C_k-summierbar und*

2. $\sum_{n=0}^\infty \left| \binom{n+k}{k} \Delta^k (b_n - b_{n+1}) \right|$ *konvergent und die Folge* b_n *beschränkt.*

dann ist $\sum_0^\infty a_n b_n$ *C_k-summierbar.*

Satz von ANDERSEN. *Ist für ein ganzzahliges* $k \geqq 0$

1. $\sum_0^\infty a_n$ *absolut C_k-summierbar und*

2. $\sum_{n=0}^\infty \binom{n+k}{k} \Delta^k (b_n - b_{n+1})$ *konvergent und die Folge* b_n *beschränkt,*

dann ist $\sum_0^\infty a_n b_n$ *C_k-summierbar.*

Da mit $b_n = O(1)$ insbesondere $C_1\text{-}\lim (b_n - b_{n+1}) = 0$ ist, so folgt wegen Satz 7 aus der Voraussetzung 2 des BOHR-HARDYschen Satzes, daß $\sum_0^\infty (b_n - b_{n+1})$ absolut C_{-k}-summierbar ist. Umgekehrt folgt aus der absoluten C_{-k}-Summierbarkeit der Reihe $\sum_0^\infty (b_n - b_{n+1})$ die Voraussetzung des BOHR-HARDYschen Satzes, da die Folge b_n dann gewiß beschränkt ist. Also besagt der BOHR-HARDYsche Satz gerade die den positiven Werten von k entsprechende Hälfte des Satzes 10.

Um nachzuweisen, daß die andere Hälfte des Satzes 10 sich mit dem Inhalt des ANDERSENschen Satzes deckt, beachte man zunächst, daß die Voraussetzung 2 dieses Satzes wegen der Sätze 3 und 4 mit der C_{-k}-Summierbarkeit der Reihe $\sum_0^\infty (b_n - b_{n+1})$ gleichwertig ist. Ersetzt man dann a_n durch

---

[19]) H. BOHR, Bidrag til de DIRICHLET'ske Roekkers Theori, S. 61 (København 1910).

[20]) G. H. HARDY, Generalization of a theorem in the theory of divergent series. Proc. Lond. Math. Soc. (2) 6 (1908), S. 255.

[21]) A. F. ANDERSEN, Über die Anwendung von Differenzen nicht ganzer Ordnung in der Reihentheorie. Ättonde skandinaviska Matematikerkongressen i Stockholm 1934, S. 345.

$b_n - b_{n+1}$ und zugleich b_n durch $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, so erhält der Andersensche Satz die Form: Ist 1. $\sum_0^\infty (b_n - b_{n+1})$ absolut C_k-summierbar und 2. $\sum_0^\infty a_n$ C_{-k}-summierbar, dann ist $\sum_0^\infty (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)(b_n - b_{n+1})$ C_k-summierbar. — Nun ist wegen der beiden Voraussetzungen 1 und 2 dieses Satzes die Folge $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ C_{-k}-limitierbar und die Folge $\sum_0^n (b_\nu - b_{\nu+1}) = -b_{n+1}$ C_k-limitierbar und daher nach Satz 9 auch die Folge $(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) b_{n+1}$ C_k-limitierbar. Also ist wegen der Identität

$$\sum_0^n (a_0 + a_1 + \cdots + a_\nu)(b_\nu - b_{\nu+1}) = \sum_0^n a_\nu b_\nu - (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) b_{n+1}$$

die Reihe $\sum_0^\infty (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)(b_n - b_{n+1})$ dann und nur dann C_k-summierbar, wenn $\sum_0^\infty a_n b_n$ C_k-summierbar ist. Damit ist gezeigt, daß der Andersensche Satz gerade die den negativen Werten von k entsprechende Hälfte des Satzes 10 darstellt. Unter Verwendung des Begriffs der C-Summierbarkeit negativer Ordnung lassen sich also auch der Bohr-Hardysche und der Andersensche Satz zu dem einen Satz 10 von besonders einfacher Form verschmelzen.

(Eingegangen am 2. September 1943.)

Über eine algebraische Identität zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel von n positiven Zahlen.

Von

Alexander Dinghas in Berlin.

1. In der vorliegenden kurzen Note[1]) wird eine algebraische Identität zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel von n positiven Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gegeben, die als eine unmittelbare Verallgemeinerung der längst bekannten Identität

$$a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2} = (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1})^2 \tag{1.1}$$

angesehen werden kann, und die folgendermaßen lautet:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \sum_{k=2}^{n} (a_k^{\frac{1}{k}} - G_{k-1}^{\frac{1}{k}})^2 P_{k-2}(a_k^{\frac{1}{k}}, G_{k-1}^{\frac{1}{k}}). \tag{1.2}$$

Dabei bedeutet G_k das geometrische Mittel der k ersten Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(k \leqq n)$ und $P_k(x, a)$ das Polynom

$$x^k + 2x^{k-1}a + \cdots + (k+1)a^k, \qquad P_0(x, a) = 1.$$

2. Zum Beweis von (1.2) gelangen wir durch Induktion. Da (1.2) für $n = 2$ in (1.1) übergeht, so können wir annehmen, daß $n \geqq 3$ und (1.2) richtig sei, wenn man dort $n - 1$ an Stelle von n schreibt. Setzt man dann

$$F_n(a) = a_1 + \cdots + a_n - n\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n},$$

$$F_{n-1}(a) = a_1 + \cdots + a_{n-1} - (n-1)\sqrt[n-1]{a_1 \ldots a_{n-1}},$$

[1]) Der Inhalt dieser Note wurde im Juni 1943 Herrn Prof. PERRON brieflich mitgeteilt. Die Anregung zu dieser Note verdanke ich Herrn Prof. VON LAUE, der mir einen interessanten Beweis (mittels Determinanten) von

$$a_1 + \cdots + a_n - n\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \geqq 0$$

mitteilte.

so wird

$$F_n(a) = F_{n-1}(a) + a_n - n a_n^{\frac{1}{n}} G_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} + (n-1) G_{n-1}{}^2), \tag{2.1}$$

oder

$$F_n(a) = \sum_{k=2}^{n-1} \left(a_k^{\frac{1}{k}} - G_{k-1}^{\frac{1}{k}}\right)^2 P_{k-2}\left(a_k^{\frac{1}{k}}, G_{k-1}^{\frac{1}{k}}\right) + \tag{2.2}$$

$$+ a_n - n a_n^{\frac{1}{n}} G_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} + (n-1) G_{n-1}.$$

Nun ist allgemein für ein ganzzahliges k $(k \geqq 2)$

$$x^k - k x a^{k-1} + (k-1) a^k = (x-a)^2 P_{k-2}(x, a); \tag{2.3}$$

es wird also tatsächlich, wenn man hier $k = n$, $x = a_n^{\frac{1}{n}}$, $a = G_{n-1}^{\frac{1}{n}}$ setzt,

$$F_n(a) = \sum_{k=2}^{n} \left(a_k^{\frac{1}{k}} - G_{k-1}^{\frac{1}{k}}\right)^2 P_{k-2}\left(a_k^{\frac{1}{k}}, G_{k-1}^{\frac{1}{k}}\right). \tag{2.4}$$

Somit ist der Beweis von (1. 2) erbracht worden. Da die rechte Seite von (1. 2) nicht negativ ist, so folgt hieraus die klassische Ungleichung $F_n(a) \geqq 0$ unmittelbar. Das Gleichheitszeichen tritt dann und nur dann ein, wenn $a_2 = G_1 = a_1, a_3 = G_2, \ldots, a_n = G_{n-1}$ wird, also genau dann, wenn $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ ist.

Zum Schluß möchte ich noch bemerken, daß man aus (2. 4) eine interessante Abschätzung von $F_n(a)$ nach unten erhält, wenn man von der Ungleichung

$$P_{k-2}(x, a) \geqq (k-1) \sqrt[k-1]{(k-1)!}\, (xa)^{\frac{k-2}{2}}$$

ausgeht [die durch Anwendung von $F_n(a) \geqq 0$ auf die Summanden von $P_{k-2}(x, a)$ folgt] und diese für jedes Polynom $P_k\left(a_k^{\frac{1}{k}}, G_{k-1}^{\frac{1}{k}}\right)$, $(k = 2, 3, \ldots, n)$ anschreibt.

Man erhält dann die Ungleichung

$$F_n(a) \geqq \sum_{k=2}^{n} (k-1) \sqrt[k-1]{(k-1)!} \left(a_k^{\frac{1}{k}} - G_{k-1}^{\frac{1}{k}}\right)^2 (a_k G_{k-1})^{\frac{k-2}{2k}} \geqq 0.$$

---

[3]) Die Ungleichung $F_n(a) - F_{n-1}(a) = a_n - n a_n^{\frac{1}{n}} G_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} + (n-1) G_{n-1} \geqq 0$ und der damit verbundene Beweis von $F_n(a) \geqq 0$, wurde zuerst von R. RADÒ (vgl. HARDY-LITTLEWOOD-POLYA, Inequalities, Cambridge 1934, S. 61, Aufgabe 60) gegeben. Das Neue der vorliegenden Note besteht in dem Beweis der Identität (1. 2), die ihrerseits sich auf die Identität (2. 3) stützt. — Eine algebraische Identität von ganz anderem Bau zwischen den beiden Mitteln gab A. HURWITZ [J. reine angew. Math. **108** (1891), 266—268; Werke II, S. 505—507].

(Eingegangen am 2. September 1943.)

Eine Verallgemeinerung des Rungeschen Satzes.

Von

Martin Eichler in Göttingen.

1. Formulierung des Satzes.

Der Rungesche Satz, nach dem sich jede in einem einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{G}$ der komplexen Zahlenebene reguläre analytische Funktion durch Polynome annähern läßt, kann auch folgendermaßen rein reell formuliert werden:

In der xy-Ebene sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{G}$ gegeben, und $u(x, y)$ sei eine in $\mathfrak{G}$ reguläre Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{1}$$

Dann läßt sich u durch spezielle Lösungen von (1) der Gestalt

$$U_\mu = \alpha_{\mu 0} + \sum_{\nu=1}^{\mu} (\alpha_{\mu\nu} \cos \nu\varphi + \beta_{\mu\nu} \sin \nu\varphi)\, r^\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

mit

$$r e^{i\varphi} = x + iy$$

gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teil von $\mathfrak{G}$ approximieren.

Es reicht also bereits ein einziges vollständiges Lösungssystem von (1) hin, um alle Lösungen für ein beliebiges Gebiet darzustellen; dies ist die eine Bedeutung des Rungeschen Satzes. Eine andere ist die folgende: Man kann jede in $\mathfrak{G}$ reguläre Lösung von (1) bzw. jede hier reguläre analytische Funktion durch solche Lösungen von (1) bzw. analytische Funktionen approximieren, die sich über $\mathfrak{G}$ hinaus analytisch fortsetzen lassen. Gerade diese letztere Bedeutung legt es nahe, sich bei dem Versuch, den Rungeschen Satz auf allgemeinere lineare partielle Differentialgleichungen zu übertragen, zunächst auf solche Differentialgleichungen zu beschränken, in deren Theorie der Begriff der analytischen Fortsetzung eine ähnlich wichtige Rolle spielt wie in der komplexen Funktionentheorie. Das sind gerade die elliptischen Differentialgleichungen mit analytischen Koeffizienten[1]).

[1]) Vgl. E. Hopf, Über den funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Zeitschr. **34** (1931), S. 194 und die weitere dort angegebene Literatur.

Zunächst formuliere ich die Voraussetzungen, unter denen ich den Rungeschen Satz hier in allgemeinerer Form beweisen will:

1) Im Raume der Cartesischen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ seien $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{G}$ nach Abschluß durch ihre Oberflächen zwei einfach zusammenhängende Gebiete und $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{R}$. Ihre Oberflächen seien glatt und endlich.

Die Punkte von $\mathfrak{R}$ werden als Vektoren $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ geschrieben.

2) Die Koeffizienten der Differentialgleichung

$$L[u] = \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_{j=1}^{n} B_j u_{x_j} + C u = 0 \tag{2}$$

seien in $\mathfrak{R}$ von den Koordinaten analytisch abhängig; (2) sei vom elliptischen Typus, und es sei

$$A_{ik} \geqq 0, \quad C \leqq 0. \tag{3}$$

3) Es sei $u_1(\mathfrak{x}), u_2(\mathfrak{x}), \ldots$ in $\mathfrak{R}$ ein System von linear unabhängigen Lösungen von (2) von folgender Beschaffenheit: Sie seien auf dem Rande $\mathfrak{k}$ von $\mathfrak{R}$ noch integrierbar, und wenn man sie hier nach dem Verfahren von Erh. Schmidt zu dem System $p_\nu(\mathfrak{x})$ orthogonalisiert, so entstehe ein vollständiges Funktionensystem, das also für jede auf $\mathfrak{k}$ noch integrierbare Funktion $u(\mathfrak{x})$ die Vollständigkeitsrelation erfüllt.

4) Für $\mathfrak{R}$ und alle in $\mathfrak{R}$ gelegenen Gebiete mit glattem Rand existiere die Greensche Funktion $G(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$.

Zu der vierten Voraussetzung werden im zweiten Abschnitt noch einige Bemerkungen zu machen sein.

Die Behauptung lautet:

I) Das System $u_1(\mathfrak{x}), u_2(\mathfrak{x}), \ldots$ ist auch auf dem Rande $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{G}$ im Sinne der Voraussetzung 3) vollständig.

II. Orthogonalisiert man die $u_\nu(\mathfrak{x})$ auf $\mathfrak{g}$ zu einem Funktionensystem $q_\nu(\mathfrak{x})$, und entwickelt man eine in $\mathfrak{G}$ reguläre [2]) und auf $\mathfrak{g}$ noch integrierbare Lösung $u(\mathfrak{x})$ von (2) auf $\mathfrak{g}$ in der Form

$$u(\mathfrak{x}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu q_\nu(\mathfrak{x}), \tag{4}$$

so konvergieren die Teilsummen von (4) in jedem abgeschlossenen Teil von $\mathfrak{G}$ gleichmäßig gegen $u(\mathfrak{x})$.

Die $u_\nu(\mathfrak{x})$ vertreten also die Rolle der Potenzen der komplexen Variablen im speziellen Rungeschen Satze; das Gebiet $\mathfrak{R}$ entspricht einem Kreise in der komplexen Zahlenebene um den Nullpunkt, der so groß ist, daß er $\mathfrak{G}$ ganz im Innern enthält. Die approximierende Funktionenfolge ist hier ähnlich

---

[2]) Unter einer regulären Lösung der Differentialgleichung (2) wird im folgenden eine solche verstanden, auf die der zitierte Analytizitätssatz anwendbar ist; z. B. setzt E. Hopf die Existenz von sechs stetigen Ableitungen voraus.

wie bei dem FABERschen Beweise des RUNGEschen Satzes[3]) ihrer Natur nach bereits durch das Gebiet $\mathfrak{G}$ vorgeschrieben; erst die Entwicklungskoeffizienten hängen von der zu approximierenden Funktion ab und sind auf Grund ihrer Konstruktion eindeutig festgelegt.

Der leitende Gedanke des Beweises ist durch die Behauptung II bereits angedeutet. Im dritten Abschnitt werde ich diesen Teil der Behauptung aus dem Teil I durch eine ganz leichte Schlußfolgerung herleiten. Der Schwerpunkt der Beweisführung liegt in der Begründung von I, und hierzu wird in drei Schritten vorgegangen. Im ersten wird zur Vorbereitung auf Späteres vorausgesetzt, daß die zu approximierende Funktion $u(\mathfrak{x})$ sogar in $\mathfrak{R}$ definiert ist und gezeigt, daß eine jetzt fast trivialerweise existierende approximierende Folge gerade in der unter II genannten Art erzeugt werden kann; auf diese Weise wird sich unter der gemachten Zusatzvoraussetzung die Vollständigkeit der $u_\nu(\mathfrak{x})$ auf $\mathfrak{g}$ ergeben. Genau umgekehrt wird in den beiden folgenden Schritten verfahren, von denen der eine das Vorliegen eines Spezialfalles annimmt und der andere die Zurückführbarkeit des allgemeinen Falles auf diesen speziellen zeigt. In beiden Schritten wird nämlich die Behauptung I direkt angesteuert, und zwar im zweiten, indem die Vollständigkeitsrelation für die in II genannten Funktionen $q_\nu(x)$ als eine Identität für analytische Funktionen einer komplexen Variablen geschrieben und mit Hilfe des Prinzips der analytischen Fortsetzung einer Funktionalgleichung bewiesen wird. Hierbei wird der obengenannte Satz über die Analytizität von Lösungen von (2) eine wesentliche Rolle spielen. Der dritte Schritt enthält demgegenüber elementare Überlegungen.

2. Eine Vorbemerkung.

Unter der GREENschen Funktion $G(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ ist für das Gebiet $\mathfrak{R}$ bekanntlich eine solche Funktion der zwei Variablenreihen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zu verstehen, die in der Variablenreihe $\mathfrak{x}$ eine in $\mathfrak{R}$ reguläre Lösung der zu (2) adjungierten Differentialgleichung ist, mit alleiniger Ausnahme des Punktes $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$, wo sie wie

$$\frac{1}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}'|^{n-2}} \text{ für } n > 2 \quad \text{bzw.} \quad \log|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}'| \text{ für } n = 2 \tag{5}$$

unendlich wird; dabei bedeuten $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{y}'$ geeignete mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ affin verwandte Vektoren. Liegt $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{k}$, so ist $G = 0$. Für jede in $\mathfrak{R}$ reguläre und auf $\mathfrak{k}$ noch integrierbare Lösung $u(x)$ von (2) gilt dann

$$u(\mathfrak{y}) = \int_{\mathfrak{k}} \frac{\partial G}{\partial n} u(\mathfrak{x})\, d\omega, \tag{6}$$

[3]) G. FABER, Über polynomische Entwicklungen. Math. Ann. **57** (1903), S. 389; **64** (1907), S. 116.

wenn die Bildung der Normalableitung und die Integration über die Oberfläche $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{R}$ auf die Variablenreihe $\mathfrak{x}$ bezogen wird.

Die GREENsche Funktion setzt sich aus zwei Teilen zusammen:

$$G(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = G_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + G_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}),$$

einem für $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ gemäß (5) unendlich werdenden Teil G_1 und einem überall beschränkten G_2. Man erhält den ersteren Teil durch den Ansatz

$$G_1 = \frac{\alpha_{n-2}}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}'|^{n-2}} + \frac{\alpha_{n-3}}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}'|^{n-3}} + \cdots + \alpha_1 \cdot |\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}'| + \beta \log |\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}'|,$$

wobei die Konstanten α_ν und β so zu bestimmen sind, daß $\overline{L}[G_1]$ im Punkte $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ endlich bleibt; $\overline{L}$ bedeutet die zu (2) adjungierte Differentialgleichung. Der andere Teil G_2 muß dann der Differentialgleichung

$$\overline{L}[G_1] = -\overline{L}[G_2]$$

genügen und solche Randwerte annehmen, daß G am Rande verschwindet.

Die Normalableitung $\frac{\partial G_1}{\partial n}$ hinsichtlich der Variablenreihe $\mathfrak{x}$ ist am Rande von $\mathfrak{R}$ gleichmäßig in $\mathfrak{y}$ beschränkt, wenn $\mathfrak{y}$ einem abgeschlossenen inneren Teilgebiet $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{R}$ angehört. Das gleiche gilt für die Tangentialableitungen von G_1 und folglich auch für die von G_2. Da G_2 einer elliptischen Differentialgleichung genügt, ist auch die Normalableitung von G_2 hier beschränkt. Es gibt also eine nur von $\mathfrak{R}'$ abhängige Konstante $M(\mathfrak{R}')$, so daß für alle $\mathfrak{y}$ in $\mathfrak{R}'$

$$\left|\frac{\partial G}{\partial n}\right| < M(\mathfrak{R}') \tag{7}$$

gilt.

Die Benutzung der Voraussetzung, daß die GREENsche Funktion existiert, ist aus zwei Gründen bedauerlich. Erstens stehen über die Existenz der GREENschen Funktion abschließende Sätze noch aus. Zweitens läßt ein wesentlicher Teil der Beweisanordnung vermuten, daß man gerade auf diesem Wege die Frage nach der Lösbarkeit der ersten Randwertaufgabe angreifen und somit die Existenz der GREENschen Funktion von hier aus begründen könnte[4]).

Die Ungleichung (3) der zweiten Voraussetzung steht im engen Zusammenhang mit der vierten. Man weiß, daß es für $C > 0$ Gebiete geben kann, in denen eine reguläre Lösung von (2) existiert, die auf dem Rande identisch

[4]) Hierzu ist zu bemerken, daß der zitierte HOPFsche Beweis im Gegensatz zu anderen die Lösung der ersten Randwertaufgabe nicht voraussetzt.

verschwindet; Beispiele kennt man bereits für die Differentialgleichung $\Delta u + u = 0$. In einem solchen Falle kann G jedenfalls nicht existieren. Gilt jedoch (3), so ist man vor dieser Möglichkeit sicher[5]).

3. Die Übertragung der Konvergenz vom Rande ins Gebietsinnere.

Die Behauptung I werde als richtig angenommen und die Funktionen $q_\nu(\mathfrak{x})$ gebildet, wie in II angegeben ist. Die Teilsummen der Orthogonalentwicklung von u nach den q_ν

$$U_\mu(\mathfrak{x}) = \sum_{\nu=1}^{\mu} \alpha_\nu q_\nu(\mathfrak{x}) \tag{8}$$

konvergieren dann auf $\mathfrak{g}$ im Mittel gegen $u(\mathfrak{x})$. Diese Funktionen werden nun durch die Formel (6) ins Innere von $\mathfrak{G}$ fortgesetzt. Nach der Ungleichung (7), angewandt auf $\mathfrak{G}$ an Stelle von $\mathfrak{R}$, gilt dann gleichmäßig für y in einem inneren Teilgebiet $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$

$$|U_\mu(\mathfrak{y}) - u(\mathfrak{y})| = \left| \int_{\mathfrak{g}} \frac{\partial G}{\partial \mathfrak{n}} (U_\mu(\mathfrak{x}) - u(\mathfrak{x}))\, d\omega \right| < M(\mathfrak{G}') \int_{\mathfrak{g}} |U_\mu(\mathfrak{x}) - u(\mathfrak{x})|\, d\omega$$

$$\leqq M(\mathfrak{G}') \sqrt{\int_{\mathfrak{g}} d\omega \cdot \int_{\mathfrak{g}} (U_\mu(\mathfrak{x}) - u(\mathfrak{x}))^2\, d\omega},$$

woraus sich die Behauptung bereits ergibt.

Das erhaltene Ergebnis wird für $\mathfrak{R}$ an Stelle von $\mathfrak{G}$ gleich im folgenden Abschnitt bei dem Beweise der Behauptung I benutzt, wenn auch nicht in vollem Umfange. Es würde nämlich genügen, nur die mittlere Konvergenz der ins Innere fortgesetzten Folge U_μ zu kennen.

4. Der erste Schritt.

Bei diesem Schritt wird gezeigt: Ist $u(\mathfrak{x})$ in $\mathfrak{G}$ regulär, und läßt sich $u(\mathfrak{x})$ auf $\mathfrak{g}$ im Mittel durch Ausdrücke der Form

$$U_\mu(\mathfrak{x}) = \sum_{\nu=1}^{\mu} \beta_{\mu\nu} u_\nu(\mathfrak{x})$$

approximieren, so sind die $u_\nu(\mathfrak{x})$ auf $\mathfrak{g}$ im Sinne der Behauptung vollständig. Dieser Sachverhalt liegt vor, wenn die in $\mathfrak{G}$ zu approximierende Funktion $u(\mathfrak{x})$ sogar in dem weiteren Gebiet $\mathfrak{R}$ noch eine reguläre Lösung von (2) ist. Dann kann man nämlich $u(\mathfrak{x})$ nach dem in der Voraussetzung (3) genannten orthogonalen Funktionensystem $p_\nu(\mathfrak{x})$ entwickeln. Die Teilsummen der so ent-

[5]) Vgl. etwa COURANT-HILBERT, Methoden der Mathematischen Physik, Bd. 2, Berlin 1937, S. 274–276.

stehenden Reihe, die mit $U_\mu(\mathfrak{x})$ bezeichnet seien, konvergieren auf $\mathfrak{k}$ im Mittel, und im Innern von $\mathfrak{K}$ nach dem Ergebnis des vorigen Abschnitts gleichmäßig, also auch im Mittel gegen $u(\mathfrak{x})$.

Für $\mathfrak{g}$ wird das normierte Orthogonalsystem $q_\nu(\mathfrak{x})$ gebildet, durch welches sich die $U_\mu(\mathfrak{x})$ wie folgt darstellen lassen:

$$U_\mu(\mathfrak{x}) = \sum_{\nu=1}^{\mu} \alpha_{\mu\nu}\, q_\nu(\mathfrak{x}). \tag{9}$$

Gleichzeitig mit den U_μ werden die Teilsummen

$$U_\mu^*(\mathfrak{x}) = \sum_{\nu=1}^{\mu} \alpha_\nu\, q_\nu(\mathfrak{x}) \tag{10}$$

der Entwicklung von u nach den q_ν betrachtet, deren Koeffizienten also

$$\alpha_\nu = \int_{\mathfrak{g}} u(\mathfrak{x})\, q_\nu(\mathfrak{x})\, d\omega$$

sind. Es ist die mittlere Konvergenz der Folge (10) gegen u zu beweisen.

Aus den Orthogonalitätsrelationen folgt nun

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{\mu} (\alpha_{\mu\nu} - \alpha_\nu)^2 &= \int_{\mathfrak{g}} (U_\mu - U_\mu^*)^2\, d\omega \\ &= \int_{\mathfrak{g}} (U_\mu - u)^2\, d\omega + \int_{\mathfrak{g}} (U_\mu^* - u)^2\, d\omega - 2\int_{\mathfrak{g}} (U_\mu - u)\,(U_\mu^* - u)\, d\omega,\end{aligned} \tag{11}$$

und die Besselsche Ungleichung besagt

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} (\alpha_{\mu\nu} - \alpha_\nu)^2 \leqq \int_{\mathfrak{g}} (U_\mu - u)^2\, d\omega. \tag{12}$$

Die rechte Seite von (12) läßt sich aber nach der Voraussetzung durch Vergrößerung von μ unter jede beliebige Schranke ε herabdrücken. Daher gibt (11)

$$\int_{\mathfrak{g}} (U_\mu^* - u)^2\, d\omega + \eta = 2\int_{\mathfrak{g}} (U_\mu - u)\,(U_\mu^* - u)\, d\omega$$

mit einer Zahl η, die ihrem Betrage nach höchstens gleich ε ist. Die hier verglichenen Größen können wegen (12) nicht negativ ausfallen. Dann kann man die Schwarzsche Ungleichung verwenden und erhält

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{g}} (U_\mu^* - u)^2\, d\omega + \eta &\leqq 2\sqrt{\int_{\mathfrak{g}} (U_\mu^* - u)^2\, d\omega \cdot \int_{\mathfrak{g}} (U_\mu - u)^2\, d\omega} \\ &\leqq 2\sqrt{\varepsilon}\,\sqrt{\int_{\mathfrak{g}} (U_\mu^* - u)^2\, d\omega},\end{aligned}$$

was nur für

$$\sqrt{\int_{\mathfrak{g}} (U_\mu^* - u)^2\, d\omega} \leqq \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon - \eta} \leqq 2\sqrt{\varepsilon}$$

möglich ist. Es strebt also die mittlere Abweichung von U_μ^* von u mit wachsendem μ gegen Null.

Aus dem Bewiesenen ergibt sich die Vollständigkeitsrelation

$$\int_{\mathfrak{g}} u^2\, d\omega = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\int_{\mathfrak{g}} u\, q_\nu\, d\omega\right)^2, \tag{13}$$

die von jetzt ab im Mittelpunkt der Beweisführung stehen soll.

5. Der zweite Schritt.

In diesem Schritt wird erstens vorausgesetzt, daß in (2)

$$B_1 = \cdots = B_n = C = 0 \tag{14}$$

ist. Zweitens wird $\mathfrak{G}$ als konvex angenommen. Drittens darf ohne weitere Beschränkung der Allgemeinheit der Punkt $\mathfrak{x} = (0, \ldots, 0)$ im Innern von $\mathfrak{G}$ angenommen werden. Die zu approximierende Funktion u sei nur noch in $\mathfrak{G}$ regulär und auf $\mathfrak{g}$ integrierbar.

Ist t eine beliebige reelle Zahl, so genügt wegen (14) zugleich mit $u(\mathfrak{x})$ auch $u(t\,\mathfrak{x})$ der Differentialgleichung (2); die letztere Funktion ist in einem Gebiet $\mathfrak{G}_t$ regulär, das aus allen Punkten $t^{-1}\mathfrak{x}$ besteht, wenn $\mathfrak{x}$ alle Punkte aus $\mathfrak{G}$ durchläuft. Das Gebiet $\mathfrak{G}_1$ stimmt mit $\mathfrak{G}$ überein. Mit abnehmendem t wächst $\mathfrak{G}_t$ an, infolge der Konvexheit von $\mathfrak{G}$ gilt dabei immer

$$\mathfrak{G}_t \supset \mathfrak{G}.$$

Es gibt eine Schranke T von der Art, daß sogar

$$\mathfrak{G}_t \supset \mathfrak{K} \tag{15}$$

ist, wenn nur

$$t < T$$

gilt.

Aber nicht nur für reelle t hat $u(t\,\mathfrak{x})$ einen Sinn, sondern auch für komplexe t eines gewissen Gebietes $\mathfrak{T}$ der komplexen t-Ebene, welches die Strecke $0 \leqq t < 1$ im Innern enthält. Die Gestalt von $\mathfrak{T}$ richtet sich natürlich im einzelnen nach der Gestalt des Gebietes im $2n$-dimensionalen komplexen Zahlenraum mit den komplexen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$, in das hinein $u(\mathfrak{x})$ analytisch fortgesetzt werden kann.

Für t in dem reellen Intervall $0 \leqq t < T$ läßt sich wegen (15) das im vorigen Abschnitt Bewiesene anwenden. Wenn also

$$\alpha_\nu(t) = \int_{\mathfrak{g}} u(t\mathfrak{x})\, q_\nu(\mathfrak{x})\, d\omega \tag{16}$$

gesetzt wird, gilt die Vollständigkeitsrelation

$$\int_{\mathfrak{g}} u(t\mathfrak{x})^2\, d\omega = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^2(t). \tag{17}$$

Die durch (16) und die linke Seite von (17) definierten Funktionen hängen nun aber für alle t aus $\mathfrak{T}$ von t analytisch ab. Ferner gilt für alle diese t die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu(t)|^2 \leqq \int_{\mathfrak{g}} |u(t\mathfrak{x})|^2 \, d\omega,$$

so daß auch die Reihe auf der rechten Seite von (17) in $\mathfrak{T}$ gleichmäßig konvergiert und daher eine analytische Funktion von t darstellt. Infolgedessen gilt (17) durchweg in $\mathfrak{T}$ und im Grenzwert auch für $t = 1$. In dieser Form sagt aber (17) gerade die behauptete Vollständigkeit der q_ν bzw. der u_ν aus, was zu beweisen war.

6. Der dritte Schritt.

Es bleibt jetzt zu zeigen übrig, wie man den allgemeinen Fall auf den im vorigen Abschnitt behandelten speziellen zurückführen kann. Setzt man zunächst $u = u_1 \cdot v$, wobei v der Differentialgleichung (2) genügt, so erfüllt u_1 eine Differentialgleichung desselben Typs, allein das Glied Cu_1 fehlt. Ebenso mache man für die u_ν den Ansatz $u_{1\nu} \cdot v$. Voraussetzungen und Behauptungen lauten jetzt für u und u_1 gleich, allein dafür hat man Sorge zu tragen, daß v in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{k}$ nirgends verschwindet. Gibt man für v auf $\mathfrak{k}$ die Werte überall positiv vor, so verschwindet v wegen (3) in der Tat in $\mathfrak{R}$ nirgends[5]). Es darf also von jetzt ab ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit $C = 0$ angenommen werden.

An Stelle der x_i werden ferner neue unabhängige Veränderliche ξ_ν eingeführt. Die Differentialgleichung (2) geht dann in

$$\sum_{\nu,\mu=1}^{n} A'_{\nu\mu} u_{\xi_\nu \xi_\mu} + \sum_{\varrho=1}^{n} B'_\varrho u_{\xi_\varrho} = 0$$

über mit

$$A'_{\nu\mu} = \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_k},$$

$$B'_\varrho = L[\xi_\varrho].$$

Verlangt man also, daß alle ξ_ϱ der Differentialgleichung (2) genügen, so geht (2) in die in (14) angenommene spezielle Gestalt über.

Die noch vorhandene Freiheit bei der Wahl der ξ_ν soll so ausgenutzt werden, daß $\mathfrak{k}$ bei der Transformation $x_i \to \xi_\nu$ auf eine beliebig vorzugebende glatte konvexe Fläche $\mathfrak{k}'$ des ξ_ν-Raumes abgebildet wird, die überall eine positive Gesamtkrümmung haben möge. Die Bestimmung der ξ_ν gemäß dieser Forderung bedeutet die Lösung des ersten Randwertproblems für jede der Funktionen $\xi_\nu(x_1, \ldots, x_n)$ und ist möglich, da die Existenz der Greenschen Funktion vorausgesetzt wurde. Die Abbildung $x_i \to \xi_\nu$ führt nun auch das

Innere $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{k}$ in das Innere $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{k}'$ über; hierbei muß man beachten, daß die Lösungen ξ_ν der Differentialgleichung (2) mit $C = 0$ sowie sämtliche Linearkombinationen $\Sigma \alpha_\nu \xi_\nu$ Maximum und Minimum nur am Rande annehmen[5]).

Das Gebiet $\mathfrak{G}$ und sein Rand $\mathfrak{g}$ gehen bei dieser Abbildung in ein Gebiet $\mathfrak{G}'$ mit dem Rand $\mathfrak{g}'$ über. Legt man die ξ_ν an Stelle der x_i als unabhängige Variable zugrunde und denkt sich $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{G}'$ ersetzt, so sind jetzt alle Bedingungen für den zweiten Schritt erfüllt, abgesehen eventuell von der Konvexheit von $\mathfrak{G}'$. Ich versuche nun den Beweis des behaupteten Satzes zu Ende zu bringen, indem ich zeige: gilt der Satz im Raume der ξ_ν, so gilt er im Raume der x_i, zweitens: er gilt im Raume der ξ_ν.

Der Erledigung dieser beiden Punkte ist eine Vorbemerkung vorauszuschicken. Die Abbildung $x_i \to \xi_\nu$ ist überall dort topologisch treu, wo die Funktionaldeterminante

$$D = \frac{\partial(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

von Null verschieden ist. Sie kann höchstens in einem $(n-1)$-dimensionalen Teil von $\mathfrak{R}$ verschwinden. Wäre sie nämlich in einem n-dimensionalen Teil identisch Null, so würde hier eine Abhängigkeit

$$F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$$

bestehen. Da nun aber die ξ_ν in $\mathfrak{R}$ analytisch sind, müßte diese Abhängigkeit von analytischer Natur sein und nach dem Prinzip von der Permanenz der Funktionalgleichung überall in $\mathfrak{R}$ bestehen. Infolgedessen würde $\mathfrak{R}$ in ein höchstens $(n-1)$-dimensionales Gebilde übergeführt, was wegen der Stetigkeit der ξ_ν unmöglich ist.

Sorgt man dafür, daß die Abbildung $\mathfrak{k} \to \mathfrak{k}'$ eindeutig ist, so verschwindet die Funktionaldeterminante D im Innern von $\mathfrak{R}$ höchstens an isolierten Punkten: Anderenfalls nämlich würden die Punktmengen von $\mathfrak{R}$, in denen $D = 0$ ist, und die auf je einen Punkt in $\mathfrak{R}'$ abgebildet werden, Mannigfaltigkeiten einer Dimension $h > 0$ sein, die entweder mit $\mathfrak{k}$ mindestens zwei Punkte gemeinsam haben oder in $\mathfrak{R}$ geschlossen sind. Das erstere widerspricht der vorausgesetzten Eindeutigkeit der Abbildung $\mathfrak{k} \to \mathfrak{k}'$. Aber auch das letztere ist nicht möglich; würde nämlich die geschlossene Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^h$ der Dimension $h > 0$ auf den Punkt $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}'$ abgebildet werden, so kann nicht $h = n - 1$ sein, denn dann würde das n-dimensionale Innere von $\mathfrak{M}^h$ ebenfalls auf $\mathfrak{P}$ abgebildet. Ist aber $h < n - 1$, so gibt es in $\mathfrak{R}$ eine mit $\mathfrak{M}^h$ verschlungene $(n-h-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit; deren Bild in $\mathfrak{R}'$ ist eine höchstens $(n-h-1)$-dimensionale geschlossene Punktmenge, die wegen der Verschlungenheit ihres Urbildes mit dem Urbild $\mathfrak{M}^h$ von $\mathfrak{P}$ nicht in $\mathfrak{R}'$ auf einen Punkt zusammenziehbar ist, ohne daß dabei der Punkt $\mathfrak{P}$ getroffen

wird. Eine solche Punktmenge kann es aber in $\mathfrak{R}'$ nicht geben, wenn nicht ihre Dimension $n - h - 1 = n - 1$ ist, also $h = 0$, entgegen der Voraussetzung.

Nach dieser Vorbereitung kann nun leicht gezeigt werden: Ist der behauptete Satz im Raume der ξ_ν richtig, so auch im Raume der x_i. Es sei $u(\mathfrak{x})$ eine in $\mathfrak{G}$ reguläre und auf $\mathfrak{g}$ noch integrierbare Lösung von (2). Voraussetzungsgemäß gibt es eine unter Zugrundelegung der Variablen ξ_ν auf $\mathfrak{g}'$ im Mittel gegen u konvergierende Folge

$$U_\mu = \sum_{\nu=1}^{\mu} \alpha_{\mu\nu} u_\nu$$

linearer Aggregate der u_ν. Es ist also

$$\int_{\mathfrak{g}'} (u - U_\mu)^2 \, d\omega' < \varepsilon,$$

sobald nur μ hinreichend groß ist; hierbei bedeute $d\omega'$ das Oberflächenelement von $\mathfrak{g}'$. Der Quotient $\frac{d\omega'}{d\omega}$ zugeordneter Flächenelemente verschwindet nur dort, wo die Funktionaldeterminante D verschwindet, also zufolge des oben Bewiesenen nur in Ausnahmepunkten. Läßt man beliebig kleine Umgebungen um sie aus, was durch einen Akzent am Integralzeichen angedeutet werden möge, so gilt stets

$$\int_{\mathfrak{g}}' (u - U_\mu)^2 \, d\omega = \int_{\mathfrak{g}'}' (u - U_\mu)^2 \frac{d\omega}{d\omega'} \, d\omega'$$

$$\leqq \operatorname{Max}\left(\frac{d\omega}{d\omega'}\right) \int_{\mathfrak{g}'}' (u - U_\mu)^2 \, d\omega' < \operatorname{Max}\left(\frac{d\omega}{d\omega'}\right) \varepsilon.$$

Daraus folgt leicht, daß die Folge U_μ auch auf $\mathfrak{g}$ im Mittel gegen u konvergiert. Die Schlußweise von Nr. 4 stellt dann endlich die Vollständigkeit der u_ν auf $\mathfrak{g}$ in dem besagten Sinne und damit den zu beweisenden Satz sicher.

Die letztere Behauptung, nämlich daß der Satz unter Zugrundelegung der Variablen ξ_ν für das Gebiet $\mathfrak{G}'$ gilt, ist nach Nr. 5 klar, wenn $\mathfrak{G}'$ konvex ist. Jedenfalls trifft sie aber für die konvexe Hülle $\mathfrak{R}_1'$ von $\mathfrak{G}'$ zu und damit nach dem oben Bewiesenen für das Gebiet $\mathfrak{R}_1$, welches auf $\mathfrak{R}_1'$ abgebildet wird. $\mathfrak{R}_1'$ und demnach auch $\mathfrak{R}_1$ haben wiederum einen glatten Rand; die konvexe Hülle eines Gebietes mit glattem Rand muß nämlich ersichtlich selber einen glatten Rand haben. Man kann die Schlußweise wiederholen, indem man $\mathfrak{R}$ durch $\mathfrak{R}_1$ ersetzt und $\mathfrak{R}_1$ in der beschriebenen Weise analytisch auf ein konvexes Gebiet $\mathfrak{R}_1''$ analytisch abbildet. Ist das Bildgebiet $\mathfrak{G}''$ bei dieser Abbildung von $\mathfrak{G}$ konvex, so ist jetzt der Beweis fertig. Andersfalls gilt der Satz für das Gebiet $\mathfrak{R}_2$, das auf die konvexe Hülle $\mathfrak{R}_2''$ von $\mathfrak{G}''$ ab-

gebildet wird. Nun ersetze man $\mathfrak{R}$ durch $\mathfrak{R}_2$ und fahren so fort. Entweder bricht das Verfahren mit einem $\mathfrak{R}_n$ ab, welches gleich $\mathfrak{G}$ ist, oder die Folge $\mathfrak{G}_n$ ist unendlich.

In diesem letzteren Falle behaupte ich

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{R}_n = \mathfrak{G}. \tag{18}$$

Der Beweis ergibt sich leicht aus der folgenden Beobachtung: Der Rand $\mathfrak{k}_1'$ von $\mathfrak{R}_1'$ besteht teilweise aus Punkten von $\mathfrak{g}'$, also besteht auch der Rand $\mathfrak{k}_1$ von $\mathfrak{R}_1$ teilweise aus Punkten von $\mathfrak{g}$. Der Rand $\mathfrak{k}_2$ von $\mathfrak{R}_2$ enthält denselben Teil von $\mathfrak{g}$, der schon in $\mathfrak{k}_1$ enthalten war. Infolge der Glattheit von $\mathfrak{g}''$ ist aber der Durchschnitt $\mathfrak{k}_2' \cap \mathfrak{g}''$ größer als der Durchschnitt $\mathfrak{k}_1' \cap \mathfrak{g}''$ und deshalb auch der Durchschnitt $\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{g}$ größer als der Durchschnitt $\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{g}$ (man vergleiche die nebenstehende Figur). Die Folge $\mathfrak{R}_n$ setzt sich nun gerade solange fort, wie der Rand $\mathfrak{k}_n$ von $\mathfrak{R}_n$ noch von $\mathfrak{g}$ verschieden ist.

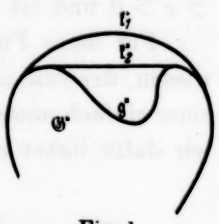

Fig. 1.

Wenn die Folge $\mathfrak{R}_n$ unendlich ist, hat man noch zu beweisen, daß die Vollständigkeit der u_ν auf den Flächen $\mathfrak{k}_n$ bei dem Grenzübergang (18) erhalten bleibt. Zu diesem Nachweis werden auf $\mathfrak{k}_n$ Funktionen $U_n(\mathfrak{x})$ so definiert, daß

$$U_n(\mathfrak{x}) = u(\mathfrak{x})$$

ist in den Punkten $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{k}_n$, die bereits auf $\mathfrak{g}$ liegen, in den übrigen Punkten von $\mathfrak{k}_n$ werde die Definition stetig ergänzt. Es gilt dann in allen Punkten $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{g}$

$$\lim_{n\to\infty} U_n(\mathfrak{x}) = u(\mathfrak{x}); \tag{19}$$

auszunehmen sind höchstens die Punkte von $\mathfrak{g}$, die keinem $\mathfrak{k}$ angehören, jedoch bilden diese ersichtlich eine Menge vom Maß 0. Deshalb gilt (19) auch im Sinne der mittleren Konvergenz.

Da der behauptete Satz für die Gebiete $\mathfrak{R}_n$ bereits bewiesen ist, gibt es Folgen

$$U_{n\mu}(\mathfrak{x}) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{n\mu\nu}\, v_\nu(\mathfrak{x}),$$

die auf $\mathfrak{k}_n$ und erst recht auf $\mathfrak{g}$ im Mittel gegen $U_n(\mathfrak{x})$ streben. Eine Diagonalfolge $U_{n\mu(n)}(\mathfrak{x})$ konvergiert deshalb und wegen (19) auf $\mathfrak{g}$ im Mittel gegen $u(\mathfrak{x})$, womit der Beweis endlich fertig ist.

(Eingegangen am 23. Februar 1943.)

Über den Zusammenhang zweier Sätze von Lebesgue und Toeplitz

Von

Ludwig Neder in Münster (Westf.).

Mit LEBESGUE[1]) nennen wir eine Funktion *einfach unstetig*, wenn sie keine anderen Unstetigkeitspunkte als solche erster Art besitzt. Eine derartige Funktion besitzt höchstens endlich viele Unstetigkeitspunkte mit Schwankung $> \varepsilon > 0$ und ist daher stets (beschränkt und) RIEMANN-integrierbar.

Für diese Funktionen hat LEBESGUE[2]) im Jahre 1909 einen Satz bewiesen, der eine notwendige und hinreichende Bedingung gibt dafür, daß be einer einfach unstetigen Funktion $f(t)$ für das „singuläre Integral" oder — wie wir dafür lieber sagen wollen — die „Integral-Mittelbildung"

$$I_m = \int_0^l f(t)\, k(t, m)\, dt^{3}) \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

im Punkte $t = 0$ bei daselbst nach rechts stetigem $f(t)$ die Beziehung folgt

$$\lim_{m = +\infty} I_m = f(0).$$

Da die Stetigkeit nach rechts äquivalent ist mit der Beziehung

$$\lim_{t = +0} f(t) = f(0),$$

so hat LEBESGUE damit den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1. *Damit bei beliebig gegebener einfach unstetiger Funktion $f(t)$ aus der Beziehung*

$$\lim_{t = +0} f(t) = L \text{ stets folgt } \lim_{m = +\infty} I_m = L,$$

sind folgende drei Bedingungen notwendig und hinreichend:

$$(1) \qquad \lim_{m = +\infty} \int_c^l k(t, m)\, dt = 0 \quad \text{für} \quad 0 < c < l,$$

$$(2) \qquad \lim_{m = +\infty} \int_0^l k(t, m)\, dt = 1,$$

---

[1]) H. LEBESGUE, Sur les integrales singulières. Annales de la Fac. des Sc. de l'Univ. de Toulouse (3) 1 (1909), S. 25. Vgl. S. 59.

[2]) A. a. O.[1]). Vgl. S. 70, wo wir $x = 0$ setzen.

[3]) Der „Kern" $k(t, m)$ sei etwa summierbar nach LEBESGUE.

$$\int_0^l |k(t,m)|\,dt \leqq M, \text{ gleichmäßig für } m = 1, 2, 3, \ldots . \tag{3}$$

Im Jahre 1911, also zwei Jahre später, hat TOEPLITZ[4]) den folgenden Satz bewiesen, der sich bezieht auf den Begriff der „linearen Mittelbildung"

$$t_m = \sum_{n=1}^{\infty} k_{m,n} s_n \quad (m = 1, 2, 3, \ldots):$$

Satz 2. *Damit bei beliebig gegebener Folge s_n aus der Beziehung*

$$\lim_{n=+\infty} s_n = L \text{ stets folgt } \lim_{m=+\infty} t_m = L,$$

sind folgende drei Bedingungen notwendig und hinreichend

$$\lim_{m=+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} k_{m,\nu} = 0 \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots [5]), \tag{4}$$

$$\lim_{m=+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} k_{m,n} = 1, \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |k_{m,n}| \leqq M; \text{ gleichmäßig für } m = 1, 2, 3, \ldots . \tag{6}$$

Jedem, der sich über die weitgehende Analogie zwischen Reihen und Integralen im klaren ist, muß sogleich die (in unserer Formulierung) große Ähnlichkeit zwischen den beiden Sätzen auffallen[6]).

Darüber hinausgehend wollen wir hier sogar zeigen, daß *Satz* 2 *eine unmittelbare Folge des Satzes* 1 ist.

---

[4]) O. TOEPLITZ, Über allgemeine lineare Mittelbildungen. Prace mat.-fiz. **22** (1911), S. 113; vgl. auch H. STEINHAUS, Kilka słów ... (polnisch). Ebenda, S. 121.

[5]) TOEPLITZ hat hier die äquivalente Bedingung

$$\lim_{m=+\infty} k_{m,n} = 0 \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

[6]) Einer brieflichen Mitteilung des Herrn K. KNOPP entnehme ich die folgenden weiteren Literaturangaben: I. SCHUR hat zuerst auf einen Zusammenhang des TOEPLITZschen Satzes mit den Sätzen von LEBESGUE hingewiesen. Vgl. seine Arbeit: Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. Journ. f. d. r. u. a. Math. **151** (1921), S. 79. Dann hat H. HAHN eine größere Arbeit geschrieben, in der die Sätze von LEBESGUE, TOEPLITZ, SCHUR usw. aus einer gemeinsamen Quelle hergeleitet werden: Über Folgen linearer Operationen. Monatsh. f. Math. u. Phys. **32** (1922), S. 3. Endlich wäre noch H. RAFF zu nennen, der die Familie der (beschränkten) nach RIEMANN integrierbaren Funktionen ausführlich behandelt: Lineare Transformationen beschränkter integrierbarer Funktionen. (Erste Mitt.) Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 605. Jedoch ist, wie Herr KNOPP betont, an keiner dieser Stellen — und anscheinend auch sonst nirgends — klar gesagt worden, daß der TOEPLITZsche Satz eine unmittelbare Folge des LEBESGUEschen ist.

Man braucht, um dies einzusehen, bei einer vorgelegten linearen Mittelbildung und beliebig gegebener Folge s_n mit

$$\lim_{n=+\infty} s_n = L$$

nur zu setzen $l = 1$ und weiter

$$f(t) = s_n \text{ und } k(t, m) = k_{m,n}\, n(n+1) \text{ für } \frac{1}{n+1} < t \leqq \frac{1}{n} \; (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dadurch erreicht man, daß $f(t)$ eine einfach unstetige Funktion mit

$$\lim_{t=+0} f(t) = L$$

und daß

$$\int_{1:(n+1)}^{1:n} k(t, m)\, dt = k_{m,n},$$

$$\int_{1:(n+1)}^{1:n} |k(t, m)|\, dt = |k_{m,n}|, \quad \int_{1:(n+1)}^{1:n} f(t)\, k(t, m)\, dt = k_{m,n}\, s_n$$

wird. Dann ist beispielsweise

$$\int_0^1 k(t, m)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{1:(n+1)}^{1:n} = \sum_{n=1}^{\infty} k_{m,n},$$

und auch die beiden anderen Bedingungen des Satzes 1 und die entsprechenden Bedingungen des Satzes 2 decken sich, so daß auch schließlich

$$I_m = t_m$$

wird. W. z. b. w.

(Eingegangen am 20. April 1943.)

Ganze Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$.

Von

H. Wittich, Göttingen.

Herr Rellich sprach im Laufe einer Unterhaltung über die ganzen Lösungen von Differentialgleichungen die Vermutung aus, daß die Differentialgleichung $\Delta u = e^u$ keine ganzen Lösungen zuläßt. Die Richtigkeit dieser Vermutung soll in den folgenden Zeilen dargetan werden. Unter einer „ganzen Lösung" wird dabei eine Funktion $u = u(x, y)$ verstanden, die durch eine für alle endlichen x, y konvergente Potenzreihe $\sum_{\varkappa,\lambda=0}^{\infty} a_{\varkappa\lambda} x^\varkappa y^\lambda$ darstellbar ist.

1. Wir gehen von der etwas allgemeineren Differentialgleichung

$$\Delta u = f(u) \tag{1}$$

aus; dabei soll die Funktion $f(\zeta)$ für $-\infty < \zeta < \infty$ eindeutig erklärt und zweimal stetig differenzierbar sein. Weiter sei noch $f(\zeta) > 0$ und $f''(\zeta) > 0$ erfüllt. $f(\zeta)$ ist also eine für alle endlichen ζ positiv konvexe[1]) Funktion. $u = u(x, y) = u(z)$ sei eine im Kreise $|z| = |x + iy| < R$ eindeutig erklärte und zweimal stetig differenzierbare Lösung von (1). Unter einer zusätzlichen Annahme über das Anwachsen von $f(\zeta)$ wird gezeigt, daß es keine Funktion $u(z)$ gibt, die die angegebenen Eigenschaften für *alle* endlichen z aufweisen kann, d. h. es muß $R < \infty$ sein. Aus $f(u) > 0$, also $\Delta u > 0$, folgt, daß $u(z)$ in $|z| < R$ subharmonisch ist. Daß es subharmonische Funktionen gibt, die für alle endlichen z eindeutig und zweimal stetig differenzierbar sind, zeigen einfache Beispiele, etwa $u(x, y) = e^{x^2+y^2}$ mit $\Delta u = 4(1 + x^2 + y^2)\, e^{x^2+y^2} > 0$. Der Zusammenhang der Aufgabe mit der Theorie der subharmonischen Funktionen[2]) legt die Einführung des Mittelwertes $I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi})\, d\varphi$ nahe. $I(r)$ nimmt mit wachsendem r nicht ab und ist konvex in $\log r$.

[1]) Konvex bedeutet hier immer im strengen Sinne konvex, also $f'' > 0$.

[2]) F. Riess, Über subharmonische Funktionen und ihre Rolle in der Funktionentheorie und in der Potentialtheorie. Acta Univ. Franc.-Jos. Szeged **2** (1925), S. 87–100.

2. Für den Kreis $|z| \leqq r < R$ setzen wir die GREENsche Formel $\iint\limits_{|z| \leqq r} (U \Delta V - V \Delta U)\, dx\, dy = \int\limits_{|z|=r} \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}\right) ds$, n äußere Normale, für $U = u$, $V = 1$ an und erhalten

$$\iint\limits_{|z| \leqq r} \Delta u\, dx\, dy = \int\limits_{|z|=r} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds; \tag{2}$$

wegen $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$ folgt

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} \Delta u\, r\, dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r}\, r\, d\varphi = r \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{2\pi} u\,(re^{i\varphi})\, d\varphi \tag{2'}$$

oder nach (1)

$$r \frac{dI(r)}{dr} = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} \Delta u\, r\, dr\, d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} f\left(u(re^{i\varphi})\right) r\, dr\, d\varphi. \tag{3}$$

Dabei ist wegen der angegebenen Voraussetzungen $I(r)$ für alle $r < R$ eindeutig erklärt und sicher zweimal stetig differenzierbar. Aus (3) folgt durch Differentiation nach r

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\left(r\, I'(r)\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u)\, d\varphi. \tag{4}$$

Da $f(\zeta)$ für alle endlichen ζ konvex ist, gestattet die rechte Seite von (4) die Abschätzung $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u)\, d\varphi \geqq f\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\, d\varphi\right) = f\left(I(r)\right)$. Damit erhalten wir aus (4)

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\left(rI'(r)\right) \geqq f\left(I(r)\right). \tag{5}$$

Aus (3) ersieht man, daß $I(r)$ mit r wächst. Die Tatsache, daß $I(r)$ in $\log r$ konvex ist, folgt aus (5). Dazu führen wir $t = \log r$ als neue Veränderliche ein und setzen $I(r) = I(e^t) = m(t)$: $m(t)$ ist also für $-\infty < t < \log R$ erklärt. Wegen $\dot{m}(t) = \frac{dm}{dt} = \frac{dI}{dr} \frac{dr}{dt} = I' \cdot e^t$, $\ddot{m}(t) = r \frac{d}{dr}(rI')$ erhalten wir $\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\left(rI'(r)\right) = \frac{\ddot{m}}{r^2} = e^{-2t}\, \ddot{m}(t)$. Aus (5) ergibt sich also

$$\frac{d^2}{dt^2} m(t) \geqq e^{2t} f\left(m(t)\right). \tag{6}$$

Da die rechte Seite von (6) stets positiv ausfällt, ist $m(t)$ konvex in t, also $I(r)$ konvex in $\log r$. Aus (6) lassen sich nun sofort Aussagen über die möglichen Lösungen von (1) gewinnen.

Zunächst gilt für alle $t \geqq t_0 > -\infty$

$$\ddot{m}(t) \geqq e^{2t_0} f(m(t))$$

oder nach Multiplikation mit $2\dot{m}(t) > 0$

$$2\dot{m}(t)\ddot{m}(t) = \frac{d\dot{m}^2}{dt} \geqq 2e^{2t_0}\dot{m} f(m(t)) = \frac{d}{dt} F(m(t)),$$

also

$$\frac{d\dot{m}^2}{dt} \geqq \frac{d}{dt} F(m(t)) \tag{7}$$

mit $F(m(t)) = 2e^{2t_0} \int_{m(t_0)}^{m(t)} f(\mu)\, d\mu$. Integration nach t ergibt $\dot{m}^2(t) - \dot{m}^2(t_0) \geqq F(m(t)) - F(m(t_1))$ mit $t_1 > t_0$ oder

$$\dot{m}^2(t) \geqq F(m(t)) + c. \tag{8}$$

(8) gilt für alle t mit $t_1 < t < \log R$, und für diese t-Werte ist die rechte Seite positiv, die durch (8) gegebene Aussage also nicht trivial. Aus (8) folgt

$$\frac{d}{dt} m(t) \geqq \sqrt{F(m(t)) + c} \tag{9}$$

oder durch Integration nach t mit der unteren Grenze $t^* > t_1$

$$t - t^* \leqq \int_{m(t^*)}^{m(t)} \frac{dm}{\sqrt{F(m)+c}} < \int_{m(t^*)}^{\infty} \frac{dm}{\sqrt{F(m)+c}},$$

$$t < t^* + \int_{m(t^*)}^{\infty} \frac{dm}{\sqrt{F(m)+c}}. \tag{10}$$

Aus (10) folgt der

Satz. *In der Differentialgleichung $\Delta u = f(u)$ genüge die Funktion $f(\zeta)$ den folgenden Bedingungen: 1) $f(\zeta)$ ist zweimal stetig differenzierbar und positiv konvex für alle endlichen ζ, 2) $f(\zeta)$ wachse so schnell an, daß das Integral $\int^{\infty} \frac{dx}{\left(\int_0^x f(\zeta)\, d\zeta\right)^{1/2}}$ einen endlichen Wert hat. Dann gibt es keine Lösung $u(z)$ der Differentialgleichung $\Delta u = f(u)$, die für alle endlichen z zweimal stetig differenzierbar ist.*

Aus diesem Satz folgt sofort, daß $\Delta u = e^u$ keine ganze Lösung haben kann.

3. Man kann sich nun fragen, ob die Voraussetzung 2) in der Formulierung des Satzes nicht ausschließlich durch die weniger guten Abschätzungen, die zu (10) führten, bedingt ist, also allein auf Konto Beweistechnik geht. Daß dem nicht so ist, zeigt das in 1. angeführte Beispiel $u(x, y) = e^{x^2+y^2}$. Wir bilden dazu die Funktion

$$(11) \qquad H(\zeta) = \begin{cases} 4\zeta + 4\zeta \log \zeta & \text{für } \zeta \geqq 1, \\ \dfrac{4 + 4\zeta + 2\zeta^2 + 120\zeta^3 - 54\zeta^4}{19} & ,, \quad 0 \leqq \zeta \leqq 1, \\ \dfrac{4}{19} e^{\zeta} & ,, \quad \zeta \leqq 0. \end{cases}$$

Man rechnet leicht nach, daß $H(\zeta)$ für alle endlichen ζ zweimal stetig differenzierbar und positiv konvex ist $(H''(\zeta) > 0)$. Da die Funktion $u = e^{x^2+y^2}$ stets $\geqq 1$ ist, hat die Differentialgleichung

$$(12) \qquad \Delta u = H(u)$$

in $e^{x^2+y^2}$ eine für alle endlichen x, y zweimal stetig differenzierbare Lösung. Dieses Beispiel zeigt also, daß der Satz falsch ist, wenn man die Bedingung 2) streicht[3]).

[3]) Ob man die Bedingungen 1) und 2) des Satzes, insbesondere die Konvexität, durch andere ersetzen kann, wurde nicht untersucht. Daß die Forderung $f(\zeta) > 0$ allein nicht genügt, zeigt ebenfalls das in 3. angegebene Beispiel.

(Eingegangen am 17. April 1943.)

Zur Reduktion von Bewegungsgleichungen auf die Lagrangesche Form.

Von

Herbert Bilharz in Braunschweig*).

---

1. Es sei $t \geqq 0$ die unabhängige Variable, n eine natürliche Zahl und ein System von n linearen, nicht notwendig homogenen, gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit von t abhängigen Koeffizienten gegeben; wir schreiben es als Matrixgleichung:

$$\mathfrak{Q}\ddot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{M}\dot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{N}\mathfrak{q} = \mathfrak{P}. \tag{1}$$

Auf derartige Differentialgleichungssysteme wird man bei zahlreichen Untersuchungen von konservativen und nicht-konservativen holonomen, dynamischen Systemen von n Freiheitsgraden geführt; in (1) bezeichnen dann t die Zeitvariable, $\mathfrak{q}(t)$ den generalisierten Lagenvektor des Systems und $\dot{\mathfrak{q}} = \frac{d\mathfrak{q}}{dt}$ die Lagengeschwindigkeit. Als Beispiele seien angeführt die harmonischen und quasi-harmonischen freien oder erzwungenen Schwingungen um eine Gleichgewichtslage oder um einem sogenannten stationären Bewegungszustand. In diesen Fällen sind die Koeffizienten in (1) konstant oder sonst periodische Funktionen von t.

In der vorliegenden Note werden notwendige und hinreichende Bedindungen dafür angegeben werden, daß ein solches System von Bewegungsgleichungen einem LAGRANGEschen System äquivalent ist, d. h. daß die Bewegungsgleichungen (1) nach Multiplikation mit einer geeignet gewählten nichtsingulären und im allgemeinen von t abhängigen Matrix sich als LAGRANGEsche Gleichungen zweiter Art

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

schreiben lassen[1]).

Weil (2) die EULERschen Gleichungen des Variationsprinzips

$$\int L\,dt = \text{Extrem.} \tag{3}$$

---

*) Mitteilung aus dem Institut für Aerodynamik der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig.

[1]) Vgl. E. T. WHITTAKER, Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper S. 301–303. Berlin 1924.

sind und die Extremalen dieses Variationsproblems ungeändert bleiben bezüglich der Addition eines vollständigen Differentialquotienten $\frac{dG(\mathfrak{q},t)}{dt}$ zur Grundfunktion, braucht $L\,dt$ nur additiv bis auf ein totales Differential eindeutig bestimmt zu werden. Hiervon machen wir fortgesetzt Gebrauch und werden beweisen, daß eine gegebenenfalls existierende LAGRANGEsche Funktion $L = L(\dot{\mathfrak{q}}, \mathfrak{q}, t)$ eine binäre quadratische Funktion in $\dot{\mathfrak{q}}$ und $\mathfrak{q}$ mit von t abhängigen Koeffizienten sein muß.

2. Für $n = 1$ läßt sich nach JACOBI[2]) unsere Aufgabe auf die Bestimmung eines letzten Multiplikators zurückführen und ist mit der dem Multiplikator eigenen Mehrdeutigkeit stets lösbar; in allem Folgenden kann daher $n > 1$ angenommen werden. Ein konkretes Beispiel wird später erkennen lassen, daß bereits für $n = 2$ nicht immer ein L zu existieren braucht, d. h. es gibt Bewegungen, deren Raumzeitlinien $\mathfrak{q}(t)$ nicht die Extremaleigenschaft (3) haben. Da in der Mechanik konservativer holonomer Systeme das zu (3) äquivalente HAMILTONsche Prinzip für die Raumzeitlinien[3]) an die Spitze aller Betrachtungen gestellt werden kann, ist klar, daß die soeben erwähnten Bewegungen zu nicht-konservativen Systemen gehören. Andererseits werden wir an einem Beispiel zeigen, daß es auch für $n > 1$ in nicht-konservativen Systemen Bewegungen geben kann, deren Raumzeitlinien die Extremaleigenschaft (3) besitzen; dieses Ergebnis scheint bisher unbeachtet geblieben zu sein.

Die Koeffizienten $\mathfrak{Q}(t)$, $\mathfrak{M}(t)$ in (1) seien mindestens einmal stetig differentiierbar, $\mathfrak{N}(t)$, $\mathfrak{P}(t)$ stetig oder mindestens integrierbar und $\mathfrak{Q}$ nicht singulär, also

$$\det.\,\mathfrak{Q}(t) \neq 0. \tag{4}$$

Wegen der letzten Voraussetzung ist (1) nach dem Beschleunigungsvektor $\ddot{\mathfrak{q}}$ auflösbar:

$$\ddot{\mathfrak{q}} = \mathfrak{Q}^{-1}(\mathfrak{P} - \mathfrak{M}\dot{\mathfrak{q}} - \mathfrak{N}\mathfrak{q}). \tag{5}$$

---

[2]) C. G. J. JACOBI, Vorlesungen über Dynamik. Ges. Werke, Supplementband, S. 84–85. Berlin 1884.

[3]) Es lautet

$$\int H\,dt = \text{Extrem.} \quad \text{oder} \quad \delta \int H\,dt = 0.$$

H ist die Summe aus der kinetischen Energie T und der potentiellen Energie V, die LAGRANGEsche Funktion L wird gleich der freien Energie $T - V$; eventuell vorhandene gyroskopische Bestandteile denken wir in V untergebracht. Für nicht-konservative Systeme tritt an Stelle von $\delta \int H\,dt = 0$ die Gleichung

$$\delta \int T\,dt + \int \delta A\,dt = 0.$$

Im letzten Integral ist die virtuelle Arbeit wohldefiniert und es gilt im allgemeinen

$$\int \delta A\,dt \neq \delta \int A\,dt;$$

die Gleichheit tritt nur ein, wenn die momentane Arbeit dA ein vollständiges Differential ist.

Für die Lagrange-Funktion $L(\dot{\mathfrak{q}}, \mathfrak{q}, t)$ machen wir mit nach t stetig differentiierbaren[4]) Koeffizienten $\mathfrak{A}(t), \ldots, \mathfrak{F}(t)$ den später zu rechtfertigenden Ansatz:

$$L \equiv \tfrac{1}{2}\dot{\mathfrak{q}}'\mathfrak{A}\dot{\mathfrak{q}} + \dot{\mathfrak{q}}'\mathfrak{B}\mathfrak{q} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}'\mathfrak{C}\mathfrak{q} + \dot{\mathfrak{q}}'\mathfrak{D} + \mathfrak{q}'\mathfrak{F}, \tag{6}$$

wobei ein Schrägstrich (′) an einer Matrix ihre Transponierte kennzeichnet. Die Matrizen $\mathfrak{A}(t)$ und $\mathfrak{C}(t)$ können symmetrisch angenommen werden:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}', \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}'. \tag{7}$$

Überdies sei $\mathfrak{A}$ nicht singulär:

$$\boxed{\det. \mathfrak{A}(t) \neq 0.} \tag{8}$$

Für dieses L lauten die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art

$$[\mathfrak{A}\dot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{B}\mathfrak{q} + \mathfrak{D}]^{\cdot} - [\mathfrak{B}'\dot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{C}\mathfrak{q} + \mathfrak{F}] = (0), \tag{9}$$

oder ausgerechnet

$$\mathfrak{A}\ddot{\mathfrak{q}} + (\dot{\mathfrak{A}} + \mathfrak{B} - \mathfrak{B}')\dot{\mathfrak{q}} + (\dot{\mathfrak{B}} - \mathfrak{C})\mathfrak{q} + \dot{\mathfrak{D}} - \mathfrak{F} = (0). \tag{10}$$

Wenn (1) zu (2) mit L aus (6) äquivalent sein soll, muß nach Einführung von $\ddot{\mathfrak{q}}$ aus (5) das Gleichungssystem (10) in $\dot{\mathfrak{q}}$, $\mathfrak{q}$ und den hiervon freien Gliedern identisch erfüllt werden. Daraus folgen nachstehende Identitäten in t:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M} = \dot{\mathfrak{A}} + \mathfrak{B} - \mathfrak{B}', \tag{11}$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{N} = \dot{\mathfrak{B}} - \mathfrak{C}, \tag{12}$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{P} = \mathfrak{F} - \dot{\mathfrak{D}}. \tag{13}$$

Wegen (7_1) liefert (11)

$$\boxed{2\dot{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M})'\mathfrak{A} + \mathfrak{A}(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M}).} \tag{14}$$

Bei Berücksichtigung von (14) und (7_2) erhalten wir aus (12)

$$\boxed{[(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M})'\mathfrak{A} - \mathfrak{A}(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M})]^{\cdot} = 2[(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{N})'\mathfrak{A} - \mathfrak{A}(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{N})].} \tag{15}$$

Für die $\binom{n+1}{2}$ Elemente $A_{jk}(t)$ der symmetrischen Matrix $\mathfrak{A}$ ergeben sich danach $n^2 + 1$ notwendige Bedingungen, nämlich (8) (das Nichtverschwinden ihrer Determinante), $\binom{n+1}{2}$ lineare Differentialgleichungen erster Ordnung des symmetrischen Systems (14) und $\binom{n}{2}$ ebensolche Gleichungen des schiefsymmetrischen Systems (15).

---

[4]) Genauer wird nur benötigt werden, daß die Matrizen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ mindestens einmal stetig differentiierbar sind, während $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{F}$ nur stetig oder zumindest integrierbar nach t zu sein brauchen.

Diese für die Existenz einer Lagrange-Funktion (6) notwendigen Bedingungen sind auch hinreichend. Ist die nichtsinguläre symmetrische Matrix $\mathfrak{A}(t)$ derart bestimmt, daß sie den Systemen (14) und (15) genügt und wird

$$\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B} + \mathfrak{B}', \quad \underline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B} - \mathfrak{B}' \tag{16}$$

gesetzt, so erfüllt

$$\tfrac{1}{2}\left[\mathfrak{A}\,(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M}) - (\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M})'\,\mathfrak{A}\right] = \underline{\mathfrak{B}} \tag{17}$$

das Gleichungssystem (11). Nach Vorgabe einer stetigen symmetrischen Matrix $\mathfrak{C}(t)$ folgt durch Integration nach t aus

$$2\,\mathfrak{C} + (\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{N})'\,\mathfrak{A} + \mathfrak{A}(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{N}) = \dot{\overline{\mathfrak{B}}} \tag{18}$$

ein $\overline{\mathfrak{B}}$ und damit wegen (16) und (17) eine dem System (12) genügende Matrix $\mathfrak{B}(t)$. Schließlich ergibt sich bei Vorgabe eines stetigen Vektors $\mathfrak{F}(t)$ ein das System (13) befriedigender Vektor $\mathfrak{D}(t)$ durch Integration von $\mathfrak{F} - \mathfrak{A}\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{P}$ nach t[5]). Hiermit ist unsere Behauptung bewiesen und wir können folgenden Satz aussprechen:

Satz 1. *Das vorgegebene System* (1) *von* $n > 1$ *gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ist dann und nur dann dem* Lagrange*schen System* (2) *mit* L *aus* (6) *äquivalent, wenn sich* $\binom{n+1}{2}$ *stetig differentiierbare Funktionen* $A_{jk}(t) = A_{kj}(t)$ *mit nichtverschwindender Determinante bestimmen lassen, welche simultan den* n^2 *Bedingungen* (14) *und* (15) *genügen.*

Ist das Ausgangssystem (1) homogen, also von der Gestalt

$$\mathfrak{Q}\ddot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{M}\dot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{N}\mathfrak{q} = (0), \tag{19}$$

so ergeben sich für $\mathfrak{A}(t)$ genau dieselben Bestimmungsgleichungen wie zuvor; in (13) kann $\mathfrak{F} = \mathfrak{D} \equiv (0)$ gewählt werden, und L wird eine binäre quadratische *Form* in $\dot{\mathfrak{q}}$ und $\mathfrak{q}$.

Damit die Lösungen von (1) bzw. (19) Extremalen eines *regulären* Variationsproblems sind, ist noch die Definitheit der quadratischen Form $\dot{\mathfrak{q}}'\,\mathfrak{A}\,\dot{\mathfrak{q}}$ in (6) vorauszusetzen, also zu fordern, daß $\det.\mathfrak{A}$ und alle ihre Hauptunterdeterminanten gleiche Vorzeichen haben für $t \geqq 0$.

3. Gleichungssysteme (1) bzw. (19), für welche ein $\mathfrak{A}(t)$ nach Satz 1 existiert, pflegt man als *selbstadjungiert* zu bezeichnen. Es ist jedoch zu beachten, daß beim Beweis von Satz 1 nirgends der zu

$$I(\mathfrak{q}) \equiv \mathfrak{Q}\ddot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{M}\dot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{N}\mathfrak{q} \tag{20}$$

---

[5]) Der Umstand, daß $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{F}$ frei verfügbar bleiben, läßt sich für Rechenvorteile nutzbar machen. (6) wird nur bis auf einen Differentialquotienten $\frac{dG_1(\mathfrak{q},t)}{dt}$ eindeutig bestimmt, welchen wir zu $\frac{dG(\mathfrak{q},t)}{dt}$ hinzufügen und daher verabredungsgemäß beiseite lassen können.

adjungierte Differentialausdruck

$$\dot{I}(\mathfrak{r}) \equiv (\mathfrak{Q}'\mathfrak{r})^{\cdot\cdot} - (\mathfrak{M}'\mathfrak{r})^{\cdot} + \mathfrak{N}'\mathfrak{r} \tag{21}$$

herangezogen wurde, wo $\mathfrak{r}(t)$ ein zweimal stetig differentiierbarer Vektor sein soll. Nach unseren Voraussetzungen — falls nämlich $\mathfrak{Q}(t)$ genau einmal stetig differentiierbar ist — braucht (21) überhaupt nicht zu existieren.

Wir wollen zeigen, daß die in der Theorie der Differentialgleichungen üblichen Definitionen der Selbstadjungiertheit nur hinreichende Bedingungen ergeben.

Ist $\mathfrak{Q}(t)$ mindestens zweimal stetig differentiierbar, so heißt (1) bzw. (19) *selbstadjungiert im engeren Sinne*[6]), wenn in $\ddot{\mathfrak{q}}$, $\dot{\mathfrak{q}}$ und $\mathfrak{q}$ die Identität

$$I(\mathfrak{q}) \equiv \dot{I}(\mathfrak{q}) \tag{22}$$

besteht. Dafür ist notwendig und hinreichend, daß die Gleichungen

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}', \quad 2\dot{\mathfrak{Q}}' = \mathfrak{M} + \mathfrak{M}', \quad \ddot{\mathfrak{Q}}' = \dot{\mathfrak{M}}' - \mathfrak{N}' + \mathfrak{N} \tag{23}$$

identisch in t erfüllt sind.

Wird $\ddot{\mathfrak{Q}}'$ aus der letzten Relation mit Hilfe der beiden vorangehenden eliminiert, so folgt

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}', \quad 2\dot{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{M} + \mathfrak{M}', \quad [\mathfrak{M} - \mathfrak{M}']^{\cdot} = 2[\mathfrak{N} - \mathfrak{N}'], \tag{24}$$

und es gilt in Verbindung mit Satz 1 der folgende

Satz 2. *Zu einem im engeren Sinne selbstadjungierten System* (1) *gibt es eine Lagrange-Funktion* (6) *mit* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{Q}$. *Die Umkehrung gilt nur unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß* $\mathfrak{Q}(t)$ *mindestens zweimal stetig differentiierbar sei*[7]).

[6]) Terminologie nach E. KAMKE, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen 1 (Leipzig 1942), S. 53—55.

[7]) M. MORSE, A generalization of the Sturm Separation and Comparisazion Theorems in n-space, Math. Ann. **103** (1930), S. 52—69, geht von den Relationen (23) aus und erhält in Theorem 1, S. 52—54 unter den dortigen Voraussetzungen zunächst nur eine hinreichende Bedingung, während in The Calculus of Variations in the Large, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **18** (New York 1934), S. 81—83, anstelle der skalaren Beziehung

$$\mathfrak{r}' I(\mathfrak{q}) - \mathfrak{q}' \dot{I}(\mathfrak{r}) = [\mathfrak{r}' \mathfrak{M} \mathfrak{q} + \mathfrak{r}' \mathfrak{Q} \dot{\mathfrak{q}} - (\mathfrak{r}' \mathfrak{Q})^{\cdot} \mathfrak{q}]^{\cdot}$$

die Existenz einer Bilinearform $K(\mathfrak{q}, \ldots, \dot{\mathfrak{r}})$ mit mindestens einmal nach t stetig differentiierbaren Koeffizienten gefordert wird, für welche

$$\mathfrak{r}' I(\mathfrak{q}) - \mathfrak{q}' I(\mathfrak{r}) = \dot{K}$$

identisch an allen vorkommenden Variablen gilt.

Für lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung hat Bliss[8]) den Begriff der Selbstadjungiertheit verallgemeinert. Seine Definition lautet bei Übertragung auf lineare Systeme zweiter Ordnung:

Das Gleichungssystem (1) heißt *selbstadjungiert im weiteren Sinne*[9]), wenn es eine nichtsinguläre, zweimal stetig differentiierbare Matrix $\mathfrak{T}(t)$ mit

$$\mathfrak{Q}'\mathfrak{T} = \mathfrak{T}'\mathfrak{Q} \tag{25}$$

gibt, so daß für $I(\mathfrak{q}) = (0)$ der Vektor

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{T}\mathfrak{q} \tag{26}$$

gerade die Lösungen des Gleichungssystems $\dot{I}(\mathfrak{r}) = (0)$ durchläuft.

Werden die Gleichungssysteme $I(\mathfrak{q}) = (0)$ und $\dot{I}(\mathfrak{T}\mathfrak{q}) = (0)$ jeweils nach $\ddot{\mathfrak{q}}$ aufgelöst und die entsprechenden Koeffizienten von $\dot{\mathfrak{q}}$ und $\mathfrak{q}$ einander gleichgesetzt, so folgen die Identitäten in t:

$$\mathfrak{Q}'\mathfrak{T}\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M} = 2(\mathfrak{Q}'\mathfrak{T})^{\cdot} - \mathfrak{M}'\mathfrak{T}, \tag{27}$$

$$\mathfrak{Q}'\mathfrak{T}\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{N} = (\mathfrak{Q}'\mathfrak{T})^{\cdot\cdot} - (\mathfrak{M}'\mathfrak{T})^{\cdot} + \mathfrak{N}'\mathfrak{T}. \tag{28}$$

Nach einiger Umformung finden wir hieraus

$$2(\mathfrak{Q}'\mathfrak{T})^{\cdot} = (\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M})'\mathfrak{Q}'\mathfrak{T} + \mathfrak{Q}'\mathfrak{T}(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M}), \tag{29}$$

$$(\mathfrak{Q}'\mathfrak{T})^{\cdot\cdot} = [(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M})'\mathfrak{Q}'\mathfrak{T}]^{\cdot} + (\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{N})'\mathfrak{Q}'\mathfrak{T} - \mathfrak{Q}'\mathfrak{T}(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{N}). \tag{30}$$

Die Elimination von $(\mathfrak{Q}'\mathfrak{T})^{\cdot\cdot}$ in (30) mit Hilfe von (29) ergibt

$$[(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M})'\mathfrak{Q}'\mathfrak{T} - \mathfrak{Q}'\mathfrak{T}(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M})]^{\cdot} = 2[(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{N})'\mathfrak{Q}'\mathfrak{T} - \mathfrak{Q}'\mathfrak{T}(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{N})]. \tag{31}$$

Durch Vergleich von (25), (29) und (31) mit den Formeln (7_1), (14) und (15) erhalten wir den

Satz 3. *Zu einem im weiteren Sinne selbstadjungierten System* (1) *existiert eine Lagrange-Funktion* (6) *mit* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{Q}'\mathfrak{T}$. *Wie in Satz 2 gilt die Umkehrung nur unter verschärften Bedingungen.*

Während die Definition der Selbstadjungiertheit im engeren Sinne an die vorgegebenen Koeffizienten in (1) gebunden ist, darf bei der Selbstadjungiertheit im weiteren Sinne auch (1) mit einer nichtsingulären zweimal stetig differentiierbaren Matrix $\mathfrak{S}(t)$ erweitert werden. Das derart erweiterte, zu (1) äquivalente System ist dann ebenfalls selbstadjungiert im weiteren Sinne; für die Transformationsmatrix $\mathfrak{U}(t)$ findet man $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}'^{-1}\mathfrak{T}$, und

---

[8]) G. A. Bliss, A boundary value problem for a system of ordinary differential equations of the first order. Trans. Amer. Math. Soc. **28** (1926), S. 561–584, insbes. S. 569ff. Vgl. auch E. Kamke in l. c.[6]), S. 53–55 u. 250–251. Die Symmetriebedingung (25) ist bei Bliss nicht in die Definition aufgenommen.

[9]) Siehe Fußnote 6.

$(\mathfrak{S}\mathfrak{Q})'\mathfrak{U}$ ist mit $\mathfrak{Q}'\mathfrak{T}$ symmetrisch. Für analytische oder mindestens zweimal stetig differentiierbare Funktionen $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{T}$ sind die Relationen (25), (29) und (31) bzw. (7_1), (14) und (15) völlig gleichwertig, wobei die letzteren auch dann einen guten Sinn haben, wenn die zweite Ableitung von $\mathfrak{A}$ gar nicht existiert. Von den beiden Möglichkeiten, die Selbstadjungiertheit unter Zuhilfenahme des adjungierten Differentialausdruckes (21) (also mit Benutzung der sogenannten LAGRANGEschen Identität) oder vermittels eines Variationsprinzips zu definieren, ist die letztere allgemeiner. Einer analogen Erscheinung begegnet man bei der Definition der kanonischen Transformation, wo von einer Differentialbedingung oder allgemeiner von den LAGRANGEschen oder den POISSONschen Klammern ausgegangen werden kann.

4. Es soll nunmehr der Ansatz (6) begründet werden.

Ausgehend von der Annahme, daß für (1) ein L des regulären Extremalintegrals (3) existiere, betrachten wir eine fest gewählte Raumzeitlinie

$$\mathfrak{q} = \bar{\mathfrak{q}}(t) \tag{32}$$

von (1) als Grundextremale und die ihr infinitesimal benachbarten Extremalen von (3). Die Funktion

$$\delta\mathfrak{q} = \mathfrak{w}(t), \tag{33}$$

welche den Übergang von der Grundextremalen zu einer dieser Nachbarextremalen vermittelt, bestimmt ihrerseits ein Variationsproblem, das sogenannte JACOBIsche Problem der zweiten Variation:

$$\int \bar{L}\,(\dot{\mathfrak{w}}, \mathfrak{w}, t)\,dt = \text{Extrem.}, \tag{34}$$

dessen Integrand die quadratische Form

$$\bar{L} \equiv \tfrac{1}{2}\,\dot{\mathfrak{w}}'\,\mathfrak{A}_1\,\dot{\mathfrak{w}} + \dot{\mathfrak{w}}'\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{w} + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{w}'\,\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{w} \tag{35}$$

ist. In den Koeffizienten

$$\mathfrak{A}_1 \equiv \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j\,\partial \dot{q}_k}\right), \quad \mathfrak{B}_1 \equiv \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j\,\partial q_k}\right), \quad \mathfrak{C}_1 \equiv \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_j\,\partial q_k}\right) \qquad (j, k = 1, \ldots, n) \tag{36}$$

von (35) sind $\dot{\mathfrak{q}}$ und $\mathfrak{q}$ als Funktionen von t der Grundextremalen (32) einzusetzen, so daß die zweiten Ableitungen von L bekannte Funktionen von t werden. Die Funktionen (33) sind Lösungen der EULER-JACOBIschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{w}_j}\right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial w_j} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{37}$$

des Variationsproblems (34) mit $\bar{L}$ aus (35) und bilden ein homogenes System von n linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Wenn das Ausgangssystem (1), welches wir vorübergehend mit

$$V_j(\ddot{\mathfrak{q}}, \dot{\mathfrak{q}}, \mathfrak{q}, t) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{38}$$

bezeichnen wollen, äquivalent zu (2) sein soll, so müssen längs der Grundextremalen die Lösungen der Variationsgleichungen

$$\mathfrak{Q}_1 \ddot{\mathfrak{w}} + \mathfrak{M}_1 \dot{\mathfrak{w}} + \mathfrak{N}_1 \mathfrak{w} = (0), \tag{39}$$

deren Koeffizienten

$$\mathfrak{Q}_1 \equiv \left(\frac{\partial V_j}{\partial \ddot{q}_k}\right), \quad \mathfrak{M}_1 \equiv \left(\frac{\partial V_j}{\partial \dot{q}_k}\right), \quad \mathfrak{N}_1 \equiv \left(\frac{\partial V_j}{\partial q_k}\right) \quad (j,k = 1,\ldots,n) \tag{40}$$

sind, mit denjenigen des Systems (37) übereinstimmen. Die Wiederholung der Rechnungen aus 2. mit den Gleichungssystemen (37), (39) und der Lagrange-Funktion (35) führt wieder zu den Bedingungen (8), (14) und (15), wobei alle darin vorkommenden Matrizen jetzt einen unteren Index 1 tragen; das System (39) ist selbstadjungiert im Sinne von Satz 1.

Wegen der Linearität des Systems (1) sind aber die Koeffizienten (40) von der Wahl der Grundextremalen unabhängig und gleich denjenigen in (1):

$$\mathfrak{Q}_1 \equiv \mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{M}_1 \equiv \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{N}_1 \equiv \mathfrak{N}. \tag{41}$$

d h. auch das System (1) ist selbstadjungiert. Für das Extremalintegral (3) ist dann nach Satz 1 eine Lagra. Funktion L der Gestalt (6) additiv bis auf eine Funktion $\frac{dG(\mathfrak{q},t)}{dt}$ bestimmbar.

5. Wir wenden uns für $n = 2$ einigen einfachen Beispielen zu. $\mathfrak{Q}$ sei gleich der Einheitsmatrix und die Matrizen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ ebenfalls unabhängig von t, so daß die Systeme (14) und (15) sogenannte D'Alembertsche Systeme werden. Nach Satz 1 sind zunächst nichtsinguläre symmetrische Lösungen von (14) zu suchen, eventuell genügen Partikularlösungen; falls ein L existiert, müssen diese Lösungen das Differentialgleichungssystem (15) identisch erfüllen.

1. Ein räumliches Pendel bildet bei Berücksichtigung der Erdrotation ein konservatives, kreiselgekoppeltes System. Die Differentialgleichungen der Horizontalbewegung genügen bei geeignet gewählten Koordinaten dem System (1) mit

$$\mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M} = a\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{N} = b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{P} = (0), \tag{42}$$

wobei a und b reelle und von Null verschiedene Konstanten sind. Dieses homogene Gleichungssystem ist nach (24) selbstadjungiert im engeren Sinne. und $\mathfrak{A} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ genügt (7_1), (8), (14) und (15). Für $\mathfrak{C} = -\mathfrak{N} = \mathfrak{C}'$ kann nach (16) bis (18) die Matrix $\mathfrak{B} = \frac{1}{2}\mathfrak{M}$ gewählt werden; Gleichung (13) wird für $\mathfrak{F} = \mathfrak{D} \equiv (0)$ erfüllt. Mit $G(\mathfrak{q},t) \equiv 0$ wird nach (6)

$$L \equiv \tfrac{1}{2}\left[\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - a(\dot{q}_1 q_2 - q_1 \dot{q}_2) - b(q_1^2 + q_2^2)\right] \tag{43}$$

eine quadratische Form in $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_2$; die entsprechenden Koeffizienten in (1) und (2) sind nicht nur einander proportional, sondern sogar identisch gleich.

2. Bei Anwendung der Methode der kleinen Schwingungen auf ein reibungsgekoppeltes, holonomes System ist (1) das Differentialgleichungssystem der Nachbarbewegung in der Störung $\mathfrak{q}(t)$. Die Koeffizienten sind Funktionen der Koordinaten und Koordinatengeschwindigkeiten des ungestörten Zustandes, also bezüglich t konstant. $\mathfrak{Q}$ als verkürzte Bewegungsenergie ist symmetrisch, ebenso $\mathfrak{M}$ als Koeffizientenmatrix der RAYLEIGHschen Dissipationsfunktion. Wegen $\dot{\mathfrak{Q}} \equiv (0)$ und der Symmetrie von $\mathfrak{M}$ kann nach (24_2) ein solches System nicht selbstadjungiert im engeren Sinne sein. Trotzdem ist es nach Satz 1 möglich, daß eine Lagrange-Funktion L der Gestalt (6) existiert; für sie ist allerdings $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{Q}$ und im allgemeinen $\mathfrak{A}$ von t abhängig. Dieses zeigen die folgenden Beispiele:

2a) Der Kreiselkompaß mit Dämpfung ist ein nicht-konservatives, reibungsgekoppeltes dynamisches System. a, b_1 und b_2 seien reelle und von Null verschiedene Konstante mit $b_1 \neq b_2$; c_1 und c_2 seien periodische Funktionen von t. Die Bewegungsgleichungen[10]) haben die Gestalt (1) mit

$$(44)\quad \mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M} = a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{N} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{P} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Sind α, β und γ beliebige reelle Integrationskonstanten, so genügt die allgemeinste symmetrische Lösung von (14)

$$(45)\quad \mathfrak{A}(t) = \begin{pmatrix} \alpha + \beta e^{at} + \gamma e^{2at} & \alpha - \gamma e^{2at} \\ \alpha - \gamma e^{2at} & \alpha - \beta e^{at} + \gamma e^{2at} \end{pmatrix}$$

dem System (15) nur für $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Dann ist aber $\det. \mathfrak{A}(t) = 0$, so daß nach Satz 1 für (44) keine Lagrange-Funktion existiert.

2b) Im vorangehenden Beispiel werde die Matrix $\mathfrak{N}$ abgeändert in $\mathfrak{N} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, also $b_1 = b_2 = b \neq 0$ gesetzt, was sich durch spezielle Wahl der Baugrößen des mechanischen Systems erreichen läßt, ohne daß der nichtkonservative Charakter geändert wird. Es existiert dann eine Lagrange-Funktion; wegen der zweimaligen stetigen Differentiierbarkeit von $\mathfrak{Q}$ ist dieses System selbstadjungiert im weiteren Sinne. Mit der symmetrischen Partikularlösung

$$(46)\quad \mathfrak{A}(t) = \begin{pmatrix} 1 + e^{2at} & 1 - e^{2at} \\ 1 - e^{2at} & 1 + e^{2at} \end{pmatrix}$$

---

[10]) E. HAHNKAMM, Erzwungene Schwingungen reibungsgekoppelter Schwingungssysteme. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 13 (1933), S. 183–202, insbes. S. 198.

aus (14) werden nämlich $\det \mathfrak{A} = 4 \cdot e^{2at} \neq 0$ und (15) identisch erfüllt. In Satz 3 kann $\mathfrak{T} \equiv \mathfrak{A}$ gewählt werden. Um ein L zu berechnen, geben wir $\mathfrak{C} = -\mathfrak{A}\mathfrak{N} = \mathfrak{C}'$ vor und können nach (16) bis (18) die Matrix $\mathfrak{B}(t) = (0)$ wählen. Mit $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}\mathfrak{P}$ wird (13) für $\mathfrak{D}(t) \equiv (0)$ erfüllt. Schließlich folgt aus (6) mit $G(\mathfrak{q}, t) \equiv 0$

$$(47)\quad L \equiv \tfrac{1}{2}\,[e^{2at}\,\{(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 - b\,(q_1 - q_2)^2 + 2\,(c_1 - c_2)\,(q_1 - q_2)\} + \\ + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - b\,(q_1 + q_2)^2 + 2\,(c_1 + c_2)\,(q_1 + q_2)].$$

Nach Einführung des Impulsvektors

$$(48)\qquad \mathfrak{p} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

kann der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathfrak{q}}$ eliminiert werden; wir erhalten in bekannter Weise aus

$$(49)\qquad \mathfrak{p}'\,\dot{\mathfrak{q}} - L = H(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, t)$$

für L aus (43) eine von der Variablen t freie und für L aus (47) eine t explizit enthaltende Hamilton-Funktion H, mit deren Hilfe sich die Bewegungsgleichungen (1) durch ein äquivalentes kanonisches Gleichungssystem erster Ordnung ersetzen lassen. In Beispiel 1 ist das Energieintegral $H = \text{const}$ ein erstes Integral der Bewegungsgleichungen, die Zeitvariable t ist eine Art zyklischer Koordinate; das Variationsprinzip (3) für die Raumzeitlinien der Bewegung läßt sich nach Elimination von t durch das Jacobische Prinzip der kleinsten Aktion für die Bahnkurven ersetzen, während in Beispiel 2b) nur die Raumzeitlinien und nicht die Bahnkurven Extremale eines Variationsproblems sind.

(Eingegangen am 11. Mai 1943.)

Reelle Eigenwerte verallgemeinerter Hillscher Eigenwertaufgaben 2. Ordnung.

Von

M. J. O. Strutt in Eindhoven (Holland).

Einleitung und Zusammenfassung.

Die HILLsche Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + w(z) \cdot \{\lambda + \gamma \Phi(z)\} = 0,$$

wo λ und γ reelle Parameter und $\Phi(z)$ eine reellwertige periodische Funktion mit der reellen Periode ζ darstellen, hat bereits zu vielen Arbeiten Anlaß gegeben. Als Ausgangspunkt wird meistens der Satz von FLOQUET benutzt, demzufolge obige Gleichung Lösungen mit der Eigenschaft: $w(z+\zeta) = \sigma\, w(z)$ aufweist. Hier ist σ der charakteristische Faktor, der entweder reell, oder komplex mit dem Modul 1 wird. In den genannten Arbeiten wird auf verschiedenen Wegen versucht, den charakteristischen Faktor, der nicht von z, sondern nur von λ, γ, ζ und Φ abhängt, zu bestimmen, ohne daß hierbei bisher ein voller Erfolg zu verzeichnen wäre.

Wir haben die obige Fragestellung umgedreht und betrachten ζ, σ und Φ als gegeben, die jeweils zusammengehörigen Parameterwerte λ und γ dagegen als gesucht[1]). Es entsteht eine homogene lineare Randwertaufgabe 2. Ordnung, welche allerdings, wie leicht einzusehen, nicht selbstadjungiert ist (die Differentialgleichung wohl, aber die Randbedingungen nicht). Die Eigenwerte für $|\sigma| = 1$ dieser Aufgabe können durch Extremumseigenschaften bestimmt und dementsprechend berechnet werden[1]). Auch Eigenwertschranken lassen sich auf dieser Grundlage in verschiedener Weise angeben. Die Parameter λ und γ können als rechtwinklige Koordinaten in einer Ebene betrachtet werden, in der die Eigenwerte auf analytischen Kurven liegen. Eine Reihe von Eigenschaften dieser Kurven läßt sich in allgemeiner Weise ableiten und bestimmt den Kurvenverlauf im großen.

Nach Erledigung dieser HILLschen Aufgabe im engeren Sinne kann die Frage aufgeworfen werden, in welcher Weise sie zu verallgemeinern wäre.

---

[1]) M. J. O. STRUTT, Verslagen Nederl. Akademie van Wetenschappen, Amsterdam 52 (1943), S. 83–90, 97–104.

Eine Möglichkeit besteht darin, daß wir die Zahl der Parameter bei einer Differentialgleichung 2. Ordnung erweitern und auf eine Gleichung der Form:

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \lambda w + w\gamma_1\Phi_1(z) + w\gamma_2\Phi_2(z) = 0$$

übergehen, in der Φ_1 und Φ_2 reellwertige periodische Funktionen mit der gleichen Grundperiode ζ und λ, γ_1, γ_2 reelle Parameter darstellen. Diese Gleichungsform tritt, wie wir an Beispielen zeigen (§ 6) in Fragestellungen der mathematischen Physik auf. Bei den gleichen Randbedingungen wie oben können für die zusammengehörigen Eigenwerte λ, γ_1 und γ_2 wieder untere Schranken mit Hilfe einer geeigneten GREENschen Funktion angegeben werden (§ 2). Weiter gelten für diese Eigenwerte, analog wie im Fall zweier Parameter, Maximum-Minimum-Eigenschaften (§ 3). Auf Grund dieser Extremumseigenschaften ergeben sich neue Schranken für die Eigenwerte (§ 4). Wenn wir λ, γ_1 und γ_2 als rechtwinklige Raumkoordinaten betrachten, liegen die Eigenwerte auf analytischen Flächen. Es gibt zu jedem reellen σ, oder komplexen σ mit dem Modul 1 eine abzählbar unendliche Zahl getrennter Flächen. Nur Flächen, welche zu $\sigma = +1$ oder zu $\sigma = -1$ gehören, können einander treffen und keine einzige Fläche kann sich selber von endlicher Ordnung berühren oder schneiden (§ 5). Als Beispiel zu den vorangehenden Ausführungen bringen wir zwei Gleichungen der mathematischen Physik: die erweiterte MATHIEUsche Gleichung und die LAMÉsche Potentialgleichung. In diesen beiden Fällen wird graphisch gezeigt, wie bekannte Eigenwerte in bezug auf einige der oben berechneten unteren Schranken liegen (§ 6). Zum näheren Studium der Eigenwertflächen werden $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ auf einer solchen Fläche berechnet (§ 7) und aus dem Ergebnis wird geschlossen (§ 8), daß λ für jene Flächen, welche zu $|\sigma| = 1$ gehören (σ reell oder komplex), eine ganze transzendente Funktion von γ_1 und γ_2 ist. Weiter berechnen wir auch die zweiten Ableitungen von λ nach γ_1 und γ_2, welche die Krümmung der Eigenwertflächen bestimmen (§ 9). Die Lagenordnung der Eigenwertflächen ergibt sich (§ 10) durch eine kleine Erweiterung von Berechnungen, welche H. A. KRAMERS veröffentlicht hat, und zwar zeigt sich, daß sie entlang Geraden im λ-, γ_1-, γ_2-Raum, welche bestimmte Bedingungen erfüllen, mit der von H. A. KRAMERS und O. HAUPT in einfacheren Fällen angegebenen übereinstimmt. Beispiele lassen schließen, daß die angegebenen hinreichenden Bedingungen für diese Lagenordnung auch notwendig sind. In der Umgebung der λ-Achse weisen die Eigenwertflächen einfache Eigenschaften auf (§ 11). Aus den Extremumseigenschaften der Eigenwerte wird auf den Verlauf von Eigenwertflächen im großen geschlossen (§ 12) Hierauf wenden wir uns dem asymptotischen Verlauf der Eigenwertflächen für $|\lambda| + |\gamma_1| + |\gamma_2| \gg \zeta^{-2}$

zu. Zunächst werden die asymptotischen Lösungen der HILLschen Differentialgleichung nach R. E. LANGER im Falle zweier Nullstellen der Funktion $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2$ im Bereich einer Grundperiode der unabhängigen Veränderlichen z angegeben. Hieraus werden die Eigenwertgleichungen abgeleitet (§ 14). Bevor aus ihnen der asymptotische Verlauf der Eigenwertflächen gefolgert wird, stellen wir einige Hilfsbetrachtungen in § 15 zusammen. Das wichtigste Ergebnis in bezug auf die asymptotische Lage der Eigenwertflächen in § 16 besteht darin, daß je zwei benachbarte ungleichnamig (halb- bzw. ganz-) periodische Eigenwertflächen asymptotisch nahe zusammenliegen. Das gleiche gilt für alle zu komplexen σ-Werten gehörenden Eigenwertflächen, welche zwischen zwei benachbarten ungleichnamigen periodischen Eigenwertflächen liegen. Weiter wird in § 16 angegeben, daß entlang Geraden, für welche die Lagenordnung der Eigenwertflächen nach O. HAUPT und H. A. KRAMERS gilt, zu jedem komplexen σ und zu $\sigma = \pm 1$ abzählbar unendlich viele Eigenwerte liegen. Entlang anderen Geraden liegen zu jedem reellen oder komplexen σ-Wert abzählbar unendlich viele positive sowie negative Eigenwerte. Die Lage dieser Eigenwerte wird asymptotisch berechnet. In § 17 wird abgeleitet, daß asymptotisch für alle Eigenwertflächen zu $|\sigma| \approx 1$ gilt: $\gamma_1 \cdot \partial\lambda/\partial\gamma_1 + \gamma_2 \cdot \partial\lambda/\partial\gamma_2 < 0$ sowie $\partial^2\lambda/\partial\gamma^2 < 0$, wo $\gamma_1 = \mu_1 \gamma$ und $\gamma_2 = \mu_2 \gamma$. Für $\lambda \to -\infty$ ist $|\partial^2\lambda/\partial\gamma^2| \to 0$. Die genannten Ergebnisse können fast alle unter bestimmten Voraussetzungen auf den Fall ausgedehnt werden, daß die Funktion $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2$ im Grundperiodenbereich von z insgesamt $2n$ Nullstellen aufweist (§ 18 und 19).

Als weitere Verallgemeinerung der HILLschen Gleichung betrachten wir m Parameter $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_m$, sowie m Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$ an Stelle der obigen Parameter γ_1 und γ_2 und zwei Funktionen Φ_1 und Φ_2 (Abschnitt IV). Auch in diesem Fall lassen sich mit Hilfe der GREENschen Funktion sowie der Maximum-Minimum-Eigenschaften Eigenwertschranken angeben. Diese Schranken werden auf den interessanten Sonderfall abzählbar unendlich vieler Parameter γ_k sowie ebensovieler Funktionen Φ_k angewandt, der bei $\Phi_1 = \cos(2\pi z/\zeta)$, $\Phi_2 = \cos(4\pi z/\zeta)$, $\ldots \Phi_m = \cos(2m\pi/\zeta)$ zur HILLschen Gleichung im engeren Sinne mit *gerader* Funktion Φ gehört. Die Parameter γ_k stellen dann die Fourier-Koeffizienten dieser Funktion Φ dar, und falls Φ z. B. der DIRICHLETschen Bedingung genügt, können für diese Koeffizienten leicht untere Schranken angegeben werden (§ 20). Die Eigenwerte liegen jetzt auf Hyperflächen, deren wichtigste allgemeinen Eigenschaften in Analogie zum obigen Fall zweier Parameter γ_k abgeleitet werden (§ 21). Auch Lage und Verlauf dieser Hyperflächen entsprechen denjenigen der Eigenwertflächen im obigen dreidimensionalen Parameterraum (§ 22). Nachdem auch die asymptotischen Eigenschaften der Eigenwerthyperflächen zusammengestellt worden sind (§ 23), wird schließlich eine Anwendung auf

die LAMÉsche Wellengleichung gegeben, bei der vier Parameter $\lambda, \gamma_1, \gamma_2$ und γ_3 auftreten (§ 24).

Wir überblicken hier die *Eigenwerte* einer Klasse von Randwertaufgaben 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten. Die *Eigenfunktionen* solcher Aufgaben sind dabei nur gestreift worden und sollen in einer späteren Arbeit eingehend behandelt werden. Auch weitere Verallgemeinerungen der HILLschen Aufgabe, so z. B. auf Gleichungen n-ter Ordnung, sollen in einer späteren Arbeit zur Behandlung kommen.

I. Allgemeine Eigenschaften der Eigenwerte.

§ 1.

Aufgabenstellung.

Wir betrachten die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 w(z)}{dz^2} + \{\lambda + \gamma_1 \Phi_1(z) + \gamma_2 \Phi_2(z)\} w(z) = 0, \tag{1}$$

wo λ, γ_1 und γ_2 reelle Parameter und Φ_1 sowie Φ_2 reellwertige Funktionen darstellen, welche periodisch sind mit der Grundperiode ζ. Wenn die Periode von Φ_2 ein ganzes Vielfaches jener von Φ_1 oder umgekehrt ist, so wird ζ gleich der *größten* der beiden Perioden. Die Funktionen sollen stückweise stetig und in konvergente FOURIER-Reihen entwickelbar sein. Bekanntlich kann *jede* Differentialgleichung 2. Ordnung mit entsprechenden periodischen Koeffizienten durch eine Transformation der abhängigen Veränderlichen in die Form (1) gebracht werden. Die Lösungen w der Gleichung (1) sollen den Randbedingungen:

$$\begin{cases} w(z_0 + \zeta) = \sigma\, w(z_0); \\ w'(z_0 + \zeta) = \sigma\, w'(z_0) \end{cases} \tag{2}$$

genügen, wo Akzente Differentiation nach z bedeuten und z_0 einen beliebig gewählten Wert der abhängigen Veränderlichen darstellt. Die Größe σ soll reell, oder aber komplex mit dem Modul 1 sein. Wir suchen bei gegebenen Werten von zwei der drei Parameter λ, γ_1 und γ_2 den dritten zu bestimmen und nennen dies eine verallgemeinerte HILLsche Eigenwertaufgabe. Für die obengenannten Werte von σ gibt es, wie wir in dieser Arbeit zeigen werden, sicherlich reelle Werte des gesuchten Parameters, welche die Eigenwertaufgabe erfüllen. Allerdings sind nicht *alle* Eigenwerte, welche zu diesen σ-Werten gehören, reell.

§ 2.

Untere Schranken für die γ-Eigenwerte mit den kleinsten Beträgen.

Mit Hilfe einer geeignet gewählten GREENschen Funktion $G(z, \mathfrak{z})$ kann die obige HILLsche Eigenwertaufgabe als lineare homogene Integralgleichung geschrieben werden ($z_1 = z_0 + \zeta$):

$$w(z) = \delta \int_{z_0}^{z_1} \{\gamma_1 \Phi_1(\mathfrak{z}) + \gamma_2 \Phi_2(\mathfrak{z})\} \cdot G(z, \mathfrak{z}) \cdot w(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{z}. \tag{3}$$

Den hier eingeführten Parameter δ können wir nachträglich gleich 1 setzen. Die GREENsche Funktion $G(z, \mathfrak{z})$ lautet im vorliegenden Fall[1]):

$$\begin{cases} G(z,\mathfrak{z}) = \dfrac{-\frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} \sin\{\sqrt{\lambda}\,(z-\mathfrak{z}+\zeta)\} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin\{\sqrt{\lambda}\,(z-\mathfrak{z})\}}{\sigma^2 - 2\sigma\cos\zeta\sqrt{\lambda} + 1} & \text{für } z \leqq \mathfrak{z}; \\ G(z,\mathfrak{z}) = \dfrac{\frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} \sin\{\sqrt{\lambda}\,(z-\mathfrak{z}-\zeta)\} - \frac{\sigma^2}{\sqrt{\lambda}} \sin\{\sqrt{\lambda}\,(z-\mathfrak{z})\}}{\sigma^2 - 2\sigma\cos\zeta\sqrt{\lambda} + 1} & \text{für } z \geqq \mathfrak{z}. \end{cases} \tag{4}$$

Wenn der Nenner des Ausdrucks (4) verschwindet, muß eine verallgemeinerte GREENsche Funktion G_a eingeführt werden, die für $\sigma = \exp(i\,\zeta\sqrt{\lambda})$, $\zeta\sqrt{\lambda} = n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2$, usw. wird[1]):

$$\begin{cases} G_{a_1}(z,\mathfrak{z}) = \dfrac{1}{\zeta\sqrt{\lambda}}(z-z_0)\sin\{\sqrt{\lambda}\,(z-\mathfrak{z})\} + \dfrac{1}{\zeta\lambda}\sin\{\sqrt{\lambda}\,(\mathfrak{z}-z_0)\} \cdot \\ \qquad\qquad \cdot \sin\{\sqrt{\lambda}\,(z-z_0)\} \quad \text{für } z \leqq \mathfrak{z}; \\ G_{a_1}(z,\mathfrak{z}) = \dfrac{1}{\zeta\sqrt{\lambda}}(z-z_0)\sin\{\sqrt{\lambda}\,(z-\mathfrak{z})\} + \dfrac{1}{\zeta\lambda}\sin\{\sqrt{\lambda}\,(\mathfrak{z}-z_0)\} \cdot \\ \qquad\qquad \cdot \sin\{\sqrt{\lambda}\,(z-z_0)\} - \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\{\sqrt{\lambda}\,(z-\mathfrak{z})\} \quad \text{für } z \geqq \mathfrak{z} \end{cases} \tag{4a}$$

und für $\lambda = 0$[2]) sowie $\sigma = +1$:

$$G_{a_2}(z,\mathfrak{z}) = \frac{1}{2\zeta}(z-\mathfrak{z})^2 - \tfrac{1}{2}|z-\mathfrak{z}| + C \quad \text{für } z \gtrless \mathfrak{z}, \tag{4b}$$

wo C eine willkürliche Konstante darstellt.

Aus dem Konvergenzradius der NEUMANNschen Reihe der Gleichung (3) ergibt sich sofort eine Schranke für δ:

$$\delta^{-2} \leqq \int_{z_0}^{z_1}\int_{z_0}^{z_1} \{\gamma_1\Phi_1(\mathfrak{z}) + \gamma_2\Phi_2(\mathfrak{z})\}^2 \cdot |G(z,\mathfrak{z})|^2\, dz\, d\mathfrak{z},$$

oder, mit Hilfe der SCHWARZschen Ungleichung:

$$\delta^{-2} \leqq \int_{z_0}^{z_1}\int_{z_0}^{z_1} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) \cdot |G(z,\mathfrak{z})|^2\, dz\, d\mathfrak{z}.$$

---

[2]) R. COURANT u. D. HILBERT, Methoden der math. Physik, Bd. 1, 1. Aufl., S. 294. Berlin, Springer, 1924.

Hieraus erhält man für $\delta = 1$ unmittelbar die gewünschten Schranken für die Eigenwertparameter γ_1 und γ_2:

$$(5) \qquad (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{-1} \leqq \int_{z_0}^{z_1} \int_{z_0}^{z_1} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2) \cdot |G(z, \zeta)|^2 \, dz \, d\zeta.$$

Durch nochmalige Anwendung der Schwarzschen Ungleichung kann (5) noch etwas umgeformt werden:

$$(5a) \qquad (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{-2} \leqq \int_{z_0}^{z_1} \int_{z_0}^{z_1} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2)^2 dz \, d\zeta \cdot \int_{z_0}^{z_1} \int_{z_0}^{z_1} |G(z, \zeta)|^4 \, dz \, d\zeta.$$

Wenn ψ^2 die obere Grenze von $\Phi_1^2 + \Phi_2^2$ im Bereich $z_0 \leqq z, \zeta \leqq z_1$ darstellt, können wir auch schreiben:

$$(5b) \qquad (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{-1} \leqq \psi^2 \int_{z_0}^{z_1} \int_{z_0}^{z_1} |G(z, \zeta)|^2 dz \, d\zeta.$$

Die obigen Gleichungen (5), (5a) und (5b) gelten, falls links der zum Eigenwert mit dem *kleinsten* absoluten Betrag gehörige Wert $\gamma_1^2 + \gamma_2^2$ eingesetzt wird. Falls zwei *gleiche* Eigenwerte mit dem kleinsten absoluten Betrag vorhanden sind, kann links $2\,(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{-1}$ geschrieben werden, bei drei gleichen solchen Eigenwerten $3\,(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{-1}$, usw.

Wir können die drei Parameter λ, γ_1 und γ_2 als rechtwinklige Koordinaten auffassen und erhalten dann aus den Gleichungen (5), (5a) und (5b) *Rotationsflächen um die λ-Achse als Schranken für γ_1 und γ_2*. In den früher berechneten Sonderfällen[1]) entstehen diese Rotationsflächen nach Gleichung (5b) unmittelbar durch Rotation der gezeichneten Kurven von Fig. 1 (a–d) um die λ-Achse.

§ 3.

Maximum-Minimum-Eigenschaften der Eigenwerte für $|\sigma| = 1$.

Wir setzen voraus, daß die untengenannten Eigenwerte existieren. Nach früheren Ausführungen[1]) ist bei gegebenen Werten γ_1 und γ_2 jeder Eigenwert λ durch eine Maximum-Minimum-Eigenschaft gekennzeichnet. Wir betrachten den Ausdruck:

$$(6) \qquad M = -\int_{z_0}^{z_1} w^* \frac{d^3 w}{dz^3} dz - \gamma_1 \int_{z_0}^{z_1} \Phi_1(z) w^* w \, dz - \gamma_2 \int_{z_0}^{z_1} \Phi_2(z) \, w^* w \, dz,$$

in dem w eine den Randbedingungen (2) genügende, zweimal stetig differenzierbare Funktion darstellt. Die Funktion w^* ist zu w adjungiert[1]).

Es sei an dieser Stelle hervorgehoben[1]), daß die allgemeine Hillsche Eigenwertaufgabe, wie sie hier betrachtet wird, *nicht* selbstadjungiert ist,

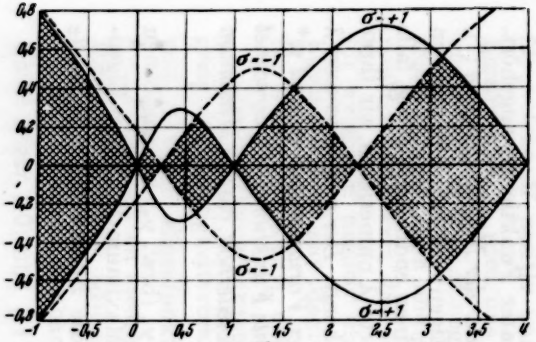

Fig. 1 a.

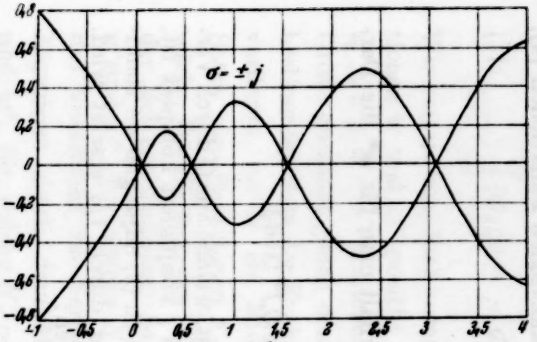

Fig. 1 b.

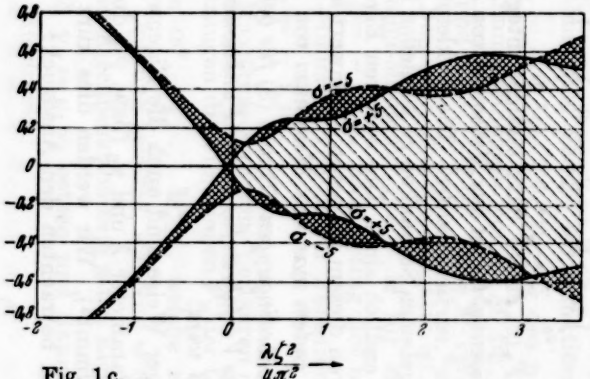

Fig. 1 c.

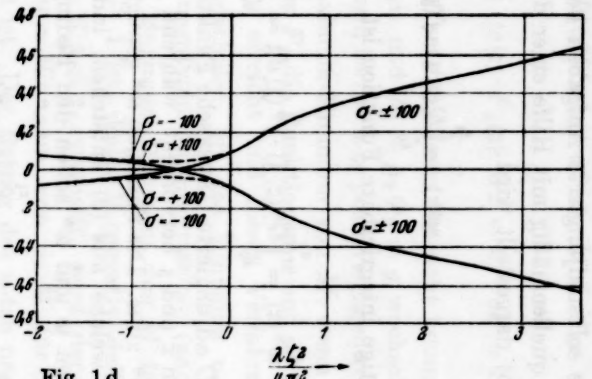

Fig. 1 d.

39*

Fig. 1 (a—d). Ordinate: $\zeta^2/4\pi^2\sqrt{I}$, wo $I = \int_{z_0}^{z_1}\int_{z_0}^{z_1} |G(z,\zeta)|^2\, dz\, d\zeta$ und G gegeben durch Gleichung (4). Abszisse: $\lambda\,\zeta^2/4\pi^2$. **Fig. 1 a:** $\sigma = \pm 1$, **Fig. 1 b:** $\sigma = \pm i$, **Fig. 1 c:** $\sigma = \pm 5$, **Fig. 1 d:** $\sigma = \pm 100$. In den schraffierten Bereichen der Fig. 1 a für pos. λ gibt es keine Eigenwerte für reelle σ-Werte und für neg. λ keine Eigenwerte für komplexe σ-Werte. Diese Kurven sollen alle um die λ-Achse rotieren. Die entstandenen Flächen bilden untere Eigenwertschranken im γ_1-, γ_2-, λ-Raum.

aber für $\sigma = \pm 1$ in eine selbstadjungierte Aufgabe übergeht. In diesen Fällen gehen die unten angeführten Maximum-Minimum-Eigenschaften in die für polare selbstadjungierte Aufgaben bekannten über.

Wenn w quellenmäßig mit Hilfe einer der GREENschen Funktionen (4), (4a) oder (4b) dargestellt wird:

$$w(z) = \int_{z_0}^{z_1} G(z, \mathfrak{z}) \cdot f(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{z}, \tag{6a}$$

wo f eine stetige integrierbare Funktion ist, so erhält man für w^* die Darstellung:

$$w^*(z) = \int_{z_0}^{z_1} G^*(z, \mathfrak{z}) \cdot f^*(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{z} = \int_{z_0}^{z_1} G(\mathfrak{z}, z)\, f^*(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{z}, \tag{6b}$$

wo G^* die zu G adjungierte GREENsche Funktion ist, welche aus G durch Verwechslung von z und $\mathfrak{z}$ hervorgeht, während f^* zu f konjugiert komplex ist, ebenso wie w^* zu w. Die Funktion w^* genügt den zu (2) adjungierten Randbedingungen, welche aus (2) entstehen, indem σ durch $1/\sigma$ ersetzt wird. Die Funktionen w und w^* sollen den Bedingungen:

$$\int_{z_0}^{z_1} w(z)\, w^*(z)\, dz = 1 \tag{7}$$

und:

$$\int_{z_0}^{z_1} w(z)\, F_k(z)\, dz = 0,\ k = 1, 2, 3 \ldots n-1, \tag{8}$$

genügen, wo $F_k(z)$ einem Satz stetiger integrierbarer Funktionen angehört. *Der kleinste Eigenwert λ ist das Minimum von M unter der Nebenbedingung* (7), *wenn w und w^* variiert werden.* Dieser kleinste Eigenwert hat, wie aus den in Fig. 1 angegebenen Schranken zu schließen ist, einen endlichen Betrag, falls $|\gamma_1|$ und $|\gamma_2|$ endlich sind. Die weiteren Eigenwerte λ numerieren wir ihrer Größe nach, von diesem kleinsten Eigenwert ausgehend. *Der n-te Eigenwert λ wird erhalten, indem man das Minimum von M bei Variation von w und w^* unter den Nebenbedingungen* (7) *und* (8) *für bestimmte Funktionen F_k berechnet und dann dieses Verfahren für andere Funktionen F_k wiederholt, bis das Minimum möglichst groß wird.*

In analoger Weise sind auch die Eigenwerte γ_1 (bzw. γ_2) bei gegebenen Werten der Parameter λ und γ_2 (bzw. γ_1) durch Maximum-Minimum-Eigenschaften bestimmt[1]). Wir werden dies kurz für die Eigenwerte $\gamma_1 = \gamma_2/\mu_2$ ausführen und betrachten den Ausdruck:

$$M = -\int_{z_0}^{z_1} w^* \left(\frac{d^2 w}{dz^2} + \lambda w\right) dz = -\int_{z_0}^{z_1} w \left(\frac{d^2 w^*}{dz^2} + \lambda w^*\right) dz \tag{9}$$

und die Bedingungsgleichungen:

$$(10) \qquad \int_{z_0}^{z_1} \{\Phi_1(z) + \mu_2 \Phi_2(z)\} \cdot w(z) \cdot w^*(z) \cdot dz = N_2;$$

$$(11) \qquad \int_{z_0}^{z_1} \{\Phi_1(z) + \mu_2 \Phi_2(z)\} \cdot w(z) \cdot F_k(z) \cdot dz = 0; \quad k = 1, 2, \ldots n-1.$$

Wir setzen zunächst voraus, M sei für alle in Betracht kommenden Funktionen w und w^* positiv definit und $\Phi_1 + \mu_2 \Phi_2 = g$ wechsele im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ das Vorzeichen. Dann ist der n-te positive Eigenwert γ_1 nach der Größe geordnet gleich dem Maximum-Minimum von M, wenn wir für einen bestimmten Satz der Funktionen F_k die Funktionen w und w^* bei $N_2 = +1$ variieren, bis M ein Minimum erreicht und dieses Verfahren für andere Sätze von Funktionen F_k wiederholen, bis das Minimum möglichst hoch wird. Der Betrag des n-ten negativen Eigenwertes γ_1 (nach der Größe der Beträge geordnet) ist das Maximum-Minimum von M für Funktionen w und w^*, für welche $N_2 = -1$ ist. Falls M negativ definit ist und g das Vorzeichen im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ wechselt, wird der n-te positive Eigenwert gleich dem Maximum-Minimum von $-M$ für Funktionen w und w^*, für welche $N_2 = -1$ ist. Der Betrag des n-ten negativen Eigenwertes γ_1 wird gleich dem Maximum-Minimum von $-M$ für Funktionen w und w^*, für welche $N_2 = +1$ ist. Falls M verschiedene Vorzeichen haben kann und g im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ positiv ist, wird der n-te positive Eigenwert γ_1 gleich dem Maximum-Minimum von M für Funktionen w und w^*, für welche M positiv und $N_2 = +1$ ist. Der Betrag des n-ten negativen Eigenwertes γ_1 wird das Maximum-Minimum von $-M$ für Funktionen w und w^*, für welche M negativ und $N_2 = +1$ ist. Falls M verschiedene Vorzeichen haben kann und g im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ negativ ist, wird der n-te positive Eigenwert das Maximum-Minimum von $-M$ für alle w und w^*, für welche M negativ und $N_2 = -1$ ist. Der Betrag des n-ten negativen Eigenwertes ist das Maximum-Minimum von M für Funktionen w und w^*, für welche M positiv und $N_2 = -1$ ist.

Bei der Durchführung der Maximum-Minimum-Verfahren nähern sich bei geeigneten Stetigkeitsvoraussetzungen die Funktionen F_k der Gleichungen (8) und (11) den Eigenfunktionen $w_1^*, w_2^*, \ldots w_{n-1}^*$, welche zu den jeweils $n-1$ Eigenwerten niedrigerer Ordnung gehören, während w und w^* sich der Eigenfunktion bzw. adjungierten Eigenfunktion zum n-ten Eigenwert nähern.

Wir können offenbar auch $\gamma_1 = \mu_1 \gamma_2$ setzen und dann an Stelle der Gleichungen (10) und (11) die Ausdrücke:

$$(10\,a) \qquad \int_{z_0}^{z_1} \{\mu_1 \Phi_1(z) + \Phi_2(z)\} \cdot w(z) \cdot w^*(z) \cdot dz = N_1$$

und

$$\text{(11a)} \quad \int_{z_0}^{z_1} \{\mu_1 \Phi_1(z) + \Phi_2(z)\} \cdot w(z) \cdot F_k(z) \cdot dz = 0; \quad k = 1, 2, \ldots n-1$$

betrachten. An Stelle des Eigenwertes γ_1 erhalten wir dann nach den obigen Maximum-Minimum-Verfahren den Eigenwert γ_2. Offenbar kommen die beiden angeführten Möglichkeiten darauf hinaus, daß wir in einer Ebene $\lambda =$ konst. entlang einem bestimmten Radius von der λ-Achse aus fortschreiten und auf diesem Radius den n-ten Eigenwert aufsuchen. Der entsprechende Radius berechnet sich aus γ_1 bzw. γ_2 nach $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \gamma_1^2 (1 + \mu_2^2)$ bzw. $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \gamma_2^2 (1 + \mu_1^2)$.

§ 4.

Eigenwertschranken auf Grund der Extremumseigenschaften.

Zur Anwendung der obengenannten Extremumseigenschaften bestimmen wir zunächst das Vorzeichen des Ausdrucks M nach Gleichung (9). Mit Hilfe der Greenschen Funktionen nach Gleichungen (4), (4a) und (4b) formen wir diesen Ausdruck etwas um und benutzen hierbei die Gleichung:

$$\frac{d^2 G}{dz^2} + \lambda G = 0,$$

welche für alle z im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$, außer für $z = \zeta$, gilt sowie die weitere Bedingung:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{\partial G}{\partial z}\right]_{z=\zeta-\varepsilon}^{z=\zeta+\varepsilon} = -1.$$

Beide Gleichungen gelten in derselben Form auch für $G^*(z, \zeta) = G(\zeta, z)$. Wir setzen die quellenmäßigen Darstellungen (6a) und (6b) für w und für w^* in Gleichung (9) ein und erhalten mit Hilfe obiger Bedingungsgleichungen für G und G^*:

$$\text{(9a)} \quad M = \int_{z_0}^{z_1} \int_{z_0}^{z_1} G^*(z, \zeta) \cdot f^*(\zeta) \cdot f(z)\, dz\, d\zeta = \int_{z_0}^{z_1} \int_{z_0}^{z_1} G(z, \zeta) \cdot f(\zeta) \cdot f^*(z) \cdot dz\, d\zeta.$$

Indem wir für f eine Funktion wählen, welche nach einem geeigneten Grenzübergang überall verschwindet, außer für ζ_1, wo sie jeden endlichen Wert überschreitet, so erkennen wir, daß in diesem Fall das Vorzeichen von M mit demjenigen von $G(\zeta_1, \zeta_1)$ zusammenfällt:

$$\text{(9b)} \quad \text{Vorz.}(M) = \text{Vorz.}[G^*(\zeta_1, \zeta_1)] = \text{Vorz.}[G(\zeta_1, \zeta_1)].$$

Falls das Vorzeichen der Ausdrücke (9b) nicht von ζ_1 abhängt, ist auch das Vorzeichen von M für alle stetigen integrierbaren Funktionen f das gleiche, d. h. M positiv oder negativ definit. Aus den Gleichungen (4), (4a) und (4b) ist zu ersehen, daß dieser Fall hier vorliegt.

Die Extremumseigenschaften der Eigenwerte gestatten unmittelbar ihren Vergleich mit jenen einfacher Eigenwertaufgaben, deren Eigenwerte sich direkt angeben lassen. Für diesen Vergleich kann eine früher[1]) angegebene Eigenwertänderungstafel benutzt werden. Die Funktionen Φ_1 und Φ_2 der Gleichung (1) sollen im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ beide das Vorzeichen wechseln. Es sei $\Phi_{\max}$ größer als der größte Wert von $|\Phi_1|$ und von $|\Phi_2|$, $\Phi_{\min} = -\Phi_{\max}$ kleiner als der kleinste Wert von Φ_1 und Φ_2. Wir setzen:

$$\begin{cases} g_{\max} = (1 + |\mu_2|)\,\Phi_{\max}; \\ g_{\min} = (1 + |\mu_2|)\,\Phi_{\min} \end{cases} \tag{12}$$

im Falle, daß γ_1 und:

$$\begin{cases} g_{\max} = (|\mu_1| + 1)\,\Phi_{\max}; \\ g_{\min} = (|\mu_1| + 1)\,\Phi_{\min}, \end{cases} \tag{12a}$$

falls γ_2 als Eigenwertparameter verwendet wird. Hier ist offenbar $g_{\max} >$ dem größten und $g_{\min} <$ dem kleinsten Wert von g. Die zu $g_{\max}$ an Stelle von $\Phi_1 + \mu_2\Phi_2$ bzw. $\mu_1\Phi_1 + \Phi_2$ in Gleichung (1) gehörigen Eigenwerte seien $\Gamma^{\max}$, die zu $g_{\min}$ gehörigen Eigenwerte $\Gamma^{\min}$. Wir wollen hier die Fälle $\sigma = \pm 1$ betrachten, bemerken aber, daß für komplexe σ-Werte auf gleichem Wege analoge Ergebnisse abgeleitet werden können. Es gilt:

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} \Gamma^{\max} \cdot g_{\max} \\ \Gamma^{\min} \cdot g_{\min} \end{matrix}\right\} = \left(\frac{2\pi m}{\zeta}\right)^2 - \lambda \quad \text{für} \quad \sigma = +1; \\ \left.\begin{matrix} \Gamma^{\max} \cdot g_{\max} \\ \Gamma^{\min} \cdot g_{\min} \end{matrix}\right\} = \frac{(2m+1)^2\pi^2}{\zeta^2} - \lambda \quad \text{für} \quad \sigma = -1; \end{cases} \tag{13}$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Für positiv definite Werte von M gibt es nur positive Werte $\Gamma^{\max}$ und nur negative Werte $\Gamma^{\min}$, für negativ definite Werte von M nur negative Werte $\Gamma^{\max}$ und nur positive Werte $\Gamma^{\min}$. In diesen Fällen ist:
für M positiv definit:

$$\gamma_{+n1} \text{ bzw. } \gamma_{+n2} \geqq \Gamma^{\max}_{+n}; \quad \gamma_{-n1} \text{ bzw. } \gamma_{-n2} \leqq \Gamma^{\min}_{-n};$$

für M negativ definit:

$$\gamma_{-n1} \text{ bzw. } \gamma_{-n2} \leqq \Gamma^{\max}_{-n}; \quad \gamma_{+n1} \text{ bzw. } \gamma_{+n2} \geqq \Gamma^{\min}_{+n},$$

wo $+n$ den n-ten positiven Eigenwert und $-n$ den n-ten negativen Eigenwert bezeichnet. Zur weiteren Vereinfachung sei $\Phi_{\max} = |\Phi_{\min}| = \Phi$, $|\mu_1| \leqq 1$, $|\mu_2| \leqq 1$. Wir können dann $g_{\max}$ durch 2Φ und $g_{\min}$ durch -2Φ ersetzen. Weiter wird: $\Gamma^{\max}_{+n} = |\Gamma^{\min}_{-n}| = \Gamma^{\min}_{+n} = |\Gamma^{\max}_{-n}| = \Gamma$ und folglich:

$$\gamma^2_{+n1} \text{ bzw. } \gamma^2_{+n2} \geqq \Gamma^2,$$

also:

$$\gamma^2_{+n1} + \gamma^2_{+n2} \geqq 2\,\Gamma^2. \tag{14}$$

Links steht in dieser Gleichung (14) das Quadrat des Radius von der λ-Achse aus in einer Ebene $\lambda =$ konst. bis zum n-ten Eigenwert in der betreffenden Richtung, während Γ den jeweils n-ten Eigenwert darstellt, der sich aus (13) ergibt, falls wir g_{max} durch 2Φ und g_{min} durch -2Φ ersetzen. Die Eigenwerte (13) sind in der Fig. 2 gezeichnet worden. Wenn wir dieses Bild um die λ-Achse rotieren lassen, können wir unmittelbar (14) anwenden.

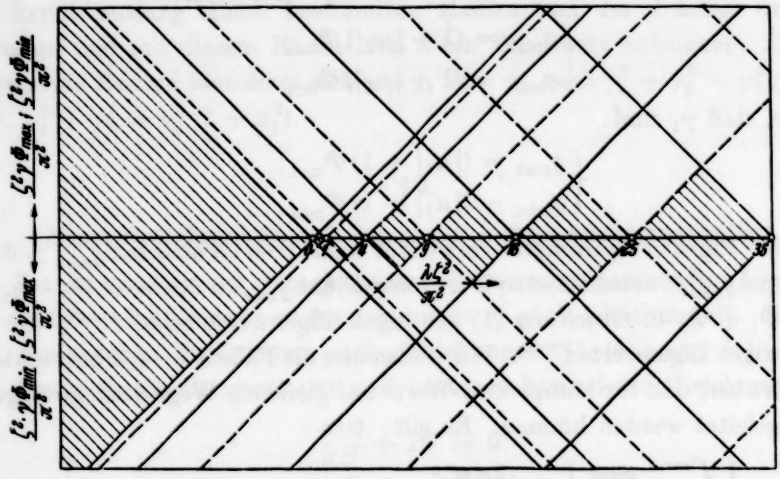

Fig. 2. Darstellung der Eigenwerte nach Gleichung (13) für $\sigma = +1$ (ausgezogen) und für $\sigma = -1$ (gestrichelt). Der Ordinatenmaßstab ist der gleiche wie der Abszissenmaßstab. An Stelle der Bezeichnungen Φ_{max} bzw. Φ_{min} im Bilde lese man g_{max} bzw. g_{min}. Wenn die Figur um die λ-Achse rotiert, entstehen untere Schranken im γ_1-, γ_2-, λ-Raum nach Gleichung (14) für alle entsprechenden Eigenwerte.

Diese Schranken für den jeweils n-ten Eigenwert unserer Aufgabe bilden ein Beispiel für die Anwendung der angeführten Extremumseigenschaften der Eigenwerte.

Wir können aus diesen Eigenschaften auch *obere* Schranken für die Eigenwerte, z. B. mit den jeweils kleinsten Beträgen ableiten. Mit Hilfe des Ritzschen oder eines verwandten Verfahrens können sie weiterhin dazu verwendet werden, die Eigenwerte angenähert zu berechnen.

§ 5.

Die Eigenwerte liegen auf analytischen Flächen.

Wir wollen zunächst zeigen, *daß σ eine ganze transzendente Funktion der Parameter λ, γ_1 und γ_2 ist.* Hierzu gehen wir von zwei Lösungen w_I und w_{II} der Gleichung (1) aus, welche den Anfangsbedingungen: $w_I(z_0) = 1$,

$w_I'(z_0) = 0, w_{II}(z_0) = 0, w_{II}'(z_0) = 1$ genügen (Akzente bedeuten Differentiation nach z). Für σ ergibt sich mit Hilfe dieser Lösungen die Gleichung[3]):

$$\sigma^2 - \sigma\{w_I(z_1) + w_{II}'(z_1)\} + 1 = 0. \tag{15}$$

Die Funktionen w_I und w_{II} sind analytische und ganze Funktionen der Parameter λ, γ_1 und γ_2. Das gilt auch für jede Wurzel σ. Wenn wir σ einen festen Wert erteilen, entsteht eine analytische Beziehung zwischen den Parametern, welche im λ-, γ_1-, γ_2-Raum durch *analytische Flächen* dargestellt wird. Einem bestimmten σ-Wert entsprechen im allgemeinen *abzählbar unendlich viele getrennte Flächen*, welche sich ins Unendliche erstrecken, wie aus asymptotischen Lösungen der Gleichung (1) gefolgert werden kann[4]). Die einzelnen Eigenwertflächen können im Endlichen nicht endigen und haben sich stetig ändernde Ableitungen jeder Ordnung. Durch diese Eigenschaften sind in einem Punkte des $\lambda, \gamma_1, \gamma_2$-Raumes, durch den mehrere Flächen hindurchgehen, die einzelnen Flächen voneinander zu unterscheiden. Da die Gleichung (15) höchstens zwei zusammenfallende Wurzeln σ haben kann, können durch einen Raumpunkt höchstens zwei verschiedene Flächen hindurchgehen. Es erhebt sich die Frage, ob eine Eigenwertfläche im obigen Sinne auch mit sich selber im Endlichen zusammentreffen kann. In diesem Fall könnte man von einem Treffpunkt ausgehend entlang einer im Endlichen geschlossenen Raumkurve auf der Fläche wieder zum gleichen Treffpunkt zurückgelangen.

Wir können zeigen, daß nur für $\sigma = \pm 1$ zwei verschiedene Eigenwertflächen durch einen Punkt gehen können. Weiter ergibt sich, daß *keine* Eigenwertflächen (für keinen einzigen reellen oder komplexen σ-Wert, in letzterem Fall mit dem Betrag 1) sich selber treffen können.

Der Beweis des ersten Satzes geht von Gleichung (15) aus. Für jeden Wert von $\sigma \neq \pm 1$ gibt es für die gleichen Werte λ, γ_1 und γ_2 einen zweiten σ-Wert derart, daß das Produkt beider σ-Werte gleich $+1$ ist. Zu jedem dieser Werte gehört *eine* und nur eine Eigenfunktion. Auf jeder Eigenwertfläche, welche einem σ-Wert $\neq \pm 1$ entspricht, liegen demnach ausschließlich *einfache* Eigenwerte. Wenn nun durch einen Punkt des $\lambda, \gamma_1, \gamma_2$-Raumes zwei Eigenwertflächen hindurchgehen würden, wäre der betreffende Punkt ein zweifacher Eigenwert. Dies geht z. B. aus der Tatsache hervor, daß die ersten und (oder) die höheren Differentialquotienten von λ nach γ_1 und γ_2 verschieden sein müßten. Wenn im betreffenden Punkt nur eine einzige Eigenfunktion vorhanden wäre und demnach ein einfacher Eigenwert vorläge, wären diese Differentialquotienten (vgl. § 7) *eindeutig* bestimmt. Wenn aber ein

---

[3]) Z. B. M. J. O. STRUTT, Ergebn. d. Math., Bd. 1, H. 3, S. 14. Berlin, Springer, 1932.

[4]) M. J. O. STRUTT, Verslagen Nederl. Akademie van Wetenschappen Amsterdam 52 (1943). Nr. 4 und 5, S. 153–162 und S. 212–222.

zweifacher Eigenwert vorläge, kämen wir mit dem obigen Schluß in Widerspruch, der besagt, daß jeder Punkt der Eigenwertfläche ein einfacher Eigenwert ist. Im Falle $\sigma = +1$ oder -1 können der Gleichung (15) zwei zusammenfallende σ-Werte genügen. Jedem σ-Wert entspricht wieder eine Eigenwertfläche mit nur einfachen Eigenwerten, den beiden zusammenfallenden σ-Werten kann somit ein Treffpunkt zweier Eigenwertflächen, also ein zweifacher Eigenwert entsprechen.

Der Beweis des zweiten Satzes ergibt sich daraus, daß für die Eigenwertflächen $\sigma = \pm 1$ der Parameter λ eine ganze transzendente Funktion von γ_1 und γ_2 ist, wie in § 8 gezeigt wird. Hierdurch können diese Eigenwertflächen *sich selber* nicht treffen.

Wenn zwei Flächen Schnittpunkte bilden, so liegen diese auf analytischen Raumkurven. Es können auch Eigenwertflächen auftreten, welche im Endlichen in sich geschlossen sind.

Durch die oben angegebenen Eigenwertschranken werden dem Verlauf der Eigenwertflächen ebenfalls Schranken auferlegt. So können z. B. in den schraffierten Bereichen der Fig. 1a, welche man als Rotationsgebiete um die λ-Achse auffassen soll, für positive λ-Werte keine Eigenwertflächen für reelle σ-Werte und für negative λ-Werte keine Eigenwertflächen für komplexe σ-Werte bei $|\sigma| = 1$ verlaufen.

§ 6.

Anwendungen auf Gleichungen der mathematischen Physik.

Hier sollen zwei Gleichungen der mathematischen Physik gestreift werden, welche als Sonderfälle der Gleichung (1) aufgefaßt werden können.

Bei der Transformation der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_4^2} = 0$$

(der Wellengleichung in drei Dimensionen, oder Laplaceschen Potentialgleichung in vier Dimensionen entsprechend) auf ein System krummliniger Koordinaten, dem homofokale Paraboloide des Raumes x_1, x_2, x_3 zugrunde liegen, ergeben sich nach Trennung der abhängigen veränderlichen Differentialgleichungen der Form[5]):

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \left\{\eta - \frac{1}{8}\xi^2 - (p+1)\,\xi\cos 2z + \frac{\xi^2}{8}\cos 4z\right\} w = 0,$$

welche genau der Gleichung (1) entsprechen. Zwischen den vorliegenden Parametern η, ξ und p einerseits und den Parametern λ, γ_1 und γ_2 andererseits

bestehen die Beziehungen: $\lambda = \eta - \xi^2/8$; $\gamma_1 = -(p+1)\,\xi$; $\gamma_2 = \xi^2/8$. Diese Beziehungen erlauben sofort aus Fig. 1a untere Schranken für die periodischen Eigenwerte in der λ-, γ_2-Ebene bei gegebenem p-Wert herzuleiten. Diese sind in Fig. 3 dargestellt, während zugleich Eigenwertkurven nach E. L. INCE[5]) für $p = 4$ eingezeichnet worden sind.

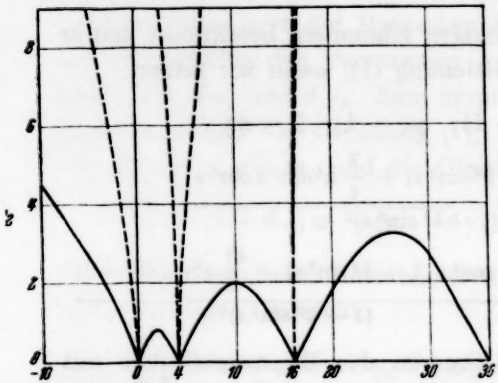

Fig. 3a.

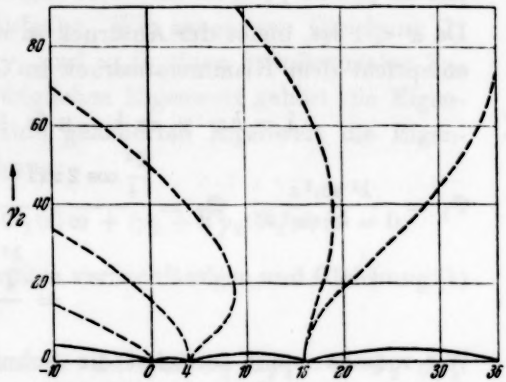

Fig. 3b.

Fig. 3. Untere Eigenwertschranken für $\sigma = +1$ der verallgemeinerten MATHIEUschen Eigenwertaufgabe. Senkrechte Projektion auf die λ-, γ_2-Ebene. Die ausgezogenen Kurven gehen aus der Fig. 1a hervor und stellen die unteren Eigenwertschranken dar. Die gestrichelten Eigenwertkurven gehen aus den von E. L. INCE berechneten Kurven hervor und liegen dementsprechend außerhalb der Schranken. Fig. a und b stellen die gleichen Kurven in zwei Maßstäben für die Ordinaten dar. Fig. b zeigt den allgemeinen Eigenwertkurvenverlauf für größere γ_2-Werte, der den in Abschn. II und III angegebenen Charakter aufweist. Entsprechend der Bemerkung im Anschluß an (5 b) können im vorliegenden Fall die gezeichneten unteren Eigenwertschranken noch etwas erhöht werden.

Als zweiten Fall betrachten wir die LAMÉsche Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y\{h - n(n+1)\,k^2\,sn^2\,x\} = 0,$$

welche durch die Umformung[6]):

$$z = a\,m(x,k); \quad \frac{dz}{dx} = (1 - k^2\sin^2 z)^{1/2}$$

die Gestalt:

$$(1 - k^2\sin^2 z)\frac{d^2y}{dz^2} - k^2\sin z\cos z\frac{dy}{dz} + \{h - n\,(n+1)\,k^2\sin^2 z\}\,y = 0$$

erhält. Die weitere Umformung:

$$w = y\,e^{-\frac{1}{2}\int_{z_0}^{z}\frac{k^2\sin z\cos z}{1-k^2\sin^2 z}\,dz}$$

---

[5]) P. HUMBERT, Potentiels et prépotentiels, S. 31. Paris, Gauthiers-Villars, 1936; E. L. INCE, Proc. London Math. Soc. **23** (1923), S. 56–74.

[6]) E. L. INCE, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **60** (1940), S. 84.

führt zu:

$$\frac{d^2w}{dz^2} + w\Big[h + \frac{\{h - n(n+1)\}k^2\sin^2 z}{1-k^2\sin^2 z} + \frac{\frac{k^2}{4}\cos 2z\,(1-k^2\sin^2 z) + \frac{3}{4}k^4\sin^2 z\cos^2 z}{(1-k^2\sin^2 z)^2}\Big] = 0.$$

Da $k < 1$ ist, bleibt der Ausdruck in eckigen Klammern beschränkt und er entspricht dem Klammerausdruck in Gleichung (1), wenn wir setzen:

$$\lambda = h; \quad \gamma_1 = h - n(n+1); \quad \gamma_2 = 1; \quad \zeta = \pi;$$

$$\Phi_1 = \frac{k^2\sin^2 z}{1-k^2\sin^2 z}; \quad \Phi_2 = \frac{\frac{k^2}{4}\cos 2z\,(1-k^2\sin^2 z) + \frac{3}{4}k^4\sin^2 z\cos^2 z}{(1-k^2\sin^2 z)^2}$$

$$= \frac{\frac{k^2}{4}\cos^2 z\,(1+k^2\sin^2 z) + \frac{k^2}{4}\sin^2 z\,(k^2-1)}{(1-k^2\sin^2 z)^2}$$

Wir müssen somit zunächst die Schnittkurven der Eigenwertflächen mit der Ebene $\gamma_2 = 1$ bilden und dann in dieser Ebene die Eigenwertkurven mit den Geraden $\gamma_1 + n(n+1) = \lambda$ zum Schnitt bringen. Die Schnittpunkte liefern für jeden Wert von n unmittelbar die Eigenwerte $\lambda = h$ der Lamé'schen Aufgabe. Wir haben die unteren Schranken der Fig. 1a auf diese Aufgabe angewandt und in der λ-, γ_1-Ebene die in Fig. 4 gezeichneten Eigen-

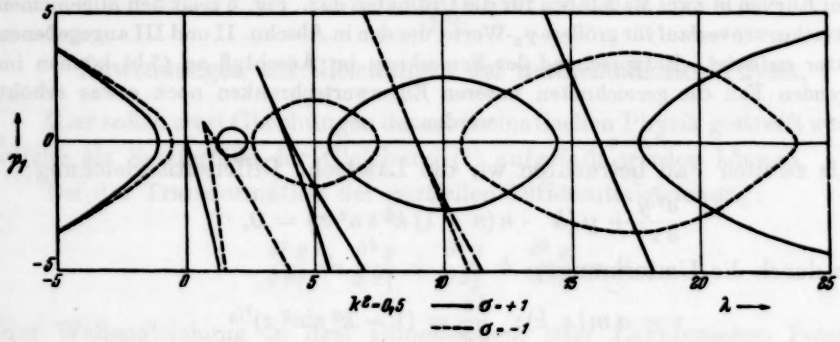

Fig. 4. Untere Eigenwertschranken der Lamé'schen Eigenwertaufgabe für $\sigma = +1$ (ausgezogene, in bezug auf die λ-Achse symmetrische Kurven) und für $\sigma = -1$ (gestrichelte, in bezug auf die λ-Achse symmetrische Kurven). Senkrechte Projektion auf die γ_1-, λ-Ebene. Die übrigen gestrichelten bzw. ausgezogenen Kurven gehen aus den von E. L. Ince berechneten Eigenwerten hervor. Alle Kurven gelten für $k^2 = 0{,}5$.

wertschranken erhalten, während zugleich einige von E. L. Ince[6]) für $k^2 = 0{,}5$ berechnete Eigenwertkurven eingezeichnet worden sind. Im vorliegenden Fall führt die Bemerkung im Anschluß an (5b) zu einer Erhöhung der gezeichneten unteren Eigenwertschranken.

II. Allgemeiner Verlauf der Eigenwertflächen.

§ 7.

Berechnung von $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und von $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ auf einer Eigenwertfläche.

Bei dieser Berechnung nehmen wir zunächst an, der betrachtete Punkt im Parameterraum mit den rechtwinkligen Koordinaten λ, γ_1 und γ_2 sei ein *einfacher* Eigenwert der HILLschen Aufgabe. Wir gehen von Gleichung (1) aus und erteilen den Parametern λ, γ_1 und γ_2 je einen infinitesimalen Zuwachs $d\lambda, d\gamma_1$ und $d\gamma_2$. Zum ursprünglichen Eigenwert gehört die Eigenfunktion w und die Gleichung (1), zum geänderten Eigenwert die Eigenfunktion $\mathfrak{w} = w + \mathfrak{w}_1$ und die Gleichung:

$$\frac{d^2\mathfrak{w}}{dz^2} + (\lambda + d\lambda)\mathfrak{w} + (\gamma_1 + d\gamma_1)\Phi_1(z)\mathfrak{w} + (\gamma_2 + d\gamma_2)\Phi_2(z)\mathfrak{w} = 0.$$

Indem wir Produkte infinitesimaler Größen vernachlässigen und Gleichung (1) berücksichtigen, entsteht:

$$\frac{d^2\mathfrak{w}_1}{dz^2} + (\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2)\mathfrak{w}_1 = -w\cdot d\lambda - w\cdot\Phi_1\cdot d\gamma_1 - w\cdot\Phi_2\cdot d\gamma_2. \tag{16}$$

Die Funktion $\mathfrak{w}_1$ genügt, ebenso wie w, den Randbedingungen (2). Wir schreiben auch die zu (1) adjungierte Gleichung an:

$$\frac{d^2w^*}{dz^2} + (\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2)w^* = 0, \tag{1a}$$

wo w^* die zu w adjungierte Eigenfunktion darstellt. Sie genügt den zu (2) adjungierten Randbedingungen, welche aus (2) hervorgehen, wenn σ durch $1/\sigma$ ersetzt wird. Wir multiplizieren (16) mit w^* und (1a) mit $\mathfrak{w}_1$. Darauf integrieren wir von z_0 bis z_1 und bilden die Differenz der entstandenen Gleichungen:

$$\int_{z_0}^{z_1}\left(w^*\frac{d^2\mathfrak{w}_1}{dz^2} - \mathfrak{w}_1\frac{d^2w^*}{dz^2}\right)dz = -d\lambda\cdot\int_{z_0}^{z_1} w\,w^*\,dz -$$

$$- d\gamma_1\cdot\int_{z_0}^{z_1} w\,w^*\,\Phi_1(z)\,dz - d\gamma_2\cdot\int_{z_0}^{z_1} w\,w^*\,\Phi_2(z)\,dz.$$

Die linke Seite verschwindet (GREENsche Formel) und wir erhalten, indem wir $d\lambda = (\partial\lambda/\partial\gamma_1)\cdot d\gamma_1 + (\partial\lambda/\partial\gamma_2)\cdot d\gamma_2$ setzen:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\gamma_1} = -\frac{\int_{z_0}^{z_1}\Phi_1(z)\,w\,w^*\,dz}{\int_{z_0}^{z_1} w\,w^*\,dz}; \quad \frac{\partial\lambda}{\partial\gamma_2} = -\frac{\int_{z_0}^{z_1}\Phi_2(z)\,w\,w^*\,dz}{\int_{z_0}^{z_1} w\,w^*\,dz}. \tag{17}$$

Im Falle, daß der Ausgangspunkt des λ-, γ_1-, γ_2-Raumes ein *zweifacher* Eigenwert der HILLschen Aufgabe ist, gehören zu ihm zwei Eigenfunktionen

w_1 und w_2. Wir haben in § 5 gezeigt, daß dieser Fall nur für $\sigma = \pm 1$ auftreten kann und für diese σ-Werte ist unsere Aufgabe selbstadjungiert, also $w \equiv w^*$. Wir werden in diesem Fall $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ berechnen. An Stelle der Gleichung (16) erhalten wir jetzt (es sei: $d\gamma_2 \equiv 0$):

$$\text{(16 a)} \quad \frac{d^2 w_1}{dz^2} + (\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2) w_1 = -(d\lambda + \Phi_1 \cdot d\gamma_1)(a_1 w_1 + a_2 w_2),$$

wo a_1 und a_2 zunächst unbekannte Faktoren sind. An die Stelle der Gleichung (1) treten jetzt zwei Gleichungen, mit $w = w_1$ und mit $w = w_2$, beide mit den gleichen Werten λ, γ_1 und γ_2. Wir multiplizieren (16a) mit w_1 und die Gleichung (1) für w_1 mit w_1. Darauf integrieren wir von z_0 bis z_1 und bilden die Differenz der entstandenen Gleichungen. Mit Hilfe der Greenschen Formel entsteht:

$$a_1 \cdot d\lambda \cdot \int_{z_0}^{z_1} w_1^2\, dz + a_2 \cdot d\lambda \cdot \int_{z_0}^{z_1} w_1 w_2\, dz + a_1 \cdot d\gamma_1 \cdot \int_{z_0}^{z_1} \Phi_1 w_1^2\, dz + \\ + a_2 \cdot d\gamma_1 \cdot \int_{z_0}^{z_1} \Phi_1 w_1 w_2\, dz = 0.$$

Mit der zweiten Gleichung (1) für w_2 und der Gleichung (16a) verfahren wir analog und erhalten:

$$a_1 \cdot d\lambda \cdot \int_{z_0}^{z_1} w_1 w_2\, dz + a_2 \cdot d\lambda \cdot \int_{z_0}^{z_1} w_2^2\, dz + a_1 \cdot d\gamma_1 \cdot \int_{z_0}^{z_1} \Phi_1 w_1 w_2\, dz + \\ + a_2 \cdot d\gamma_1 \cdot \int_{z_0}^{z_1} \Phi_1 w_2^2\, dz = 0.$$

Die entstandenen beiden homogenen linearen Gleichungen für a_1 und a_2 haben nur dann eine nicht verschwindende Lösung, wenn die Determinante, gebildet aus den Koeffizienten von a_1 und a_2, verschwindet. Diese Bedingung liefert unmittelbar die gesuchte Gleichung für $\partial\lambda/\partial\gamma_1$:

$$\text{(17 a)} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial\gamma_1}\bar{\alpha}_{11} + \bar{\beta}_{11} & \frac{\partial\lambda}{\partial\gamma_1}\bar{\alpha}_{12} + \bar{\beta}_{12} \\ \frac{\partial\lambda}{\partial\gamma_1}\bar{\alpha}_{21} + \bar{\beta}_{21} & \frac{\partial\lambda}{\partial\gamma_1}\bar{\alpha}_{22} + \bar{\beta}_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\bar{\alpha}_{kl} = \int_{z_0}^{z_1} w_k w_l\, dz;\ \bar{\beta}_{kl} = \int_{z_0}^{z_1} \Phi_1(z)\, w_k w_l\, dz;\ k, l = 1,2.$$

Die Größe $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ kann ebenfalls aus Gleichung (17a) berechnet werden, indem $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ durch $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ und im Ausdruck $\bar{\beta}_{kl}$ die Funktion $\Phi_1(z)$ durch $\Phi_2(z)$ ersetzt wird. In diesem Fall ist nicht sofort ersichtlich, welche Werte von $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ jeweils zur gleichen Eigenwertfläche gehören. Wir können dies aber wie folgt erkennen. Es sei $\gamma_1 = \mu_1\gamma$ und $\gamma_2 = \mu_2\gamma$.

Dann entsteht für $\partial\lambda/\partial\gamma$ eine zu (17a) genau analoge Gleichung, in der aber $\bar{\beta}_{kl}$ die Bedeutung:

$$\bar{\beta}_{kl} = \int_{z_0}^{z_1} (\mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2)\, w_k\, w_l\, dz$$

hat. Indem wir μ_1 und μ_2 alle reellen Werte erteilen, bewegen wir uns bei jeder Wurzel $\partial\lambda/\partial\gamma$ von (17a) in der entsprechenden Berührungsebene der betreffenden Eigenwertfläche. Wir müssen demnach jene Werte $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ als zusammengehörig bezeichnen, bei denen die aus (17a) hervorgehende Quadratwurzel *gleiches* Vorzeichen hat.

§ 8.

Der Parameter λ als Funktion von γ_1 und γ_2 entlang den Eigenwertflächen, für die gilt: $|\sigma| = 1$.

Wir haben bereits im § 5 gesehen, daß λ für alle Eigenwertflächen eine analytische Funktion von γ_1 und γ_2 ist. Jetzt wollen wir einen Schritt weitergehen und zeigen, daß λ für jene Eigenwertflächen, für die $|\sigma| = 1$ ist, eine *eindeutige* Funktion von γ_1 und γ_2 ist. Anders gesagt: *Für diese Eigenwertflächen mit $|\sigma| = 1$ ist λ eine ganze transzendente Funktion von γ_1 und von γ_2.*

Den Beweis führen wir dadurch, daß wir zeigen: Für $|\sigma| = 1$ sind $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ für alle endlichen Werte von γ_1 und γ_2 *endlich*. Im Falle einfacher Eigenwerte geht dieser Satz unmittelbar aus Gleichung (17) hervor. Denn für $|\sigma| = 1$ ist w^* zu w konjugiert komplex und somit der Nenner beider Ausdrücke $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ positiv und $\neq 0$. Im Falle zweifacher Eigenwerte müssen wir von Gleichung (17a) ausgehen. Die genannten Differentialquotienten sind hier stets endlich, falls $\bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{22} - \bar{\alpha}_{12}\bar{\alpha}_{21} \neq 0$. Ausgeschrieben lautet dieser Ausdruck:

$$\bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{22} - \bar{\alpha}_{12}\bar{\alpha}_{21} = \int_{z_0}^{z_1} w_1^2\, dz \cdot \int_{z_0}^{z_1} w_2^2\, dz - \Big[\int_{z_0}^{z_1} w_1\, w_2\, dz\Big]^2$$

und infolge der Schwarzschen Ungleichung ist er stets > 0, falls w_1 und w_2 linear unabhängig sind. Im Falle, daß diese Voraussetzung nicht zutrifft, ist aber der Eigenwert einfach und haben wir bereits oben gesehen, daß $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ stets endlich sind.

Weil wir in § 5 gesehen haben, daß Treffpunkte von Eigenwertflächen nur für $\sigma = \pm 1$ auftreten können und weil für diese σ-Werte λ eine ganze Funktion von γ_1 und γ_2 ist, können wir schließen, *daß nie eine Eigenwertfläche mit sich selber zusammentreffen kann*. Denn eine solche Fläche könnte nicht durch eine eindeutige Funktion λ von γ_1 und γ_2 dargestellt werden.

Wir bemerken, daß obiger Schluß, λ sei eine ganze Funktion von γ_1 und γ_2, auch auf die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \{\lambda \cdot \psi(z) + \gamma_1 \cdot \Phi_1(z) + \gamma_2 \cdot \Phi_2(z)\} w(z) = 0$$

mit den obigen Randbedingungen (2) ausgedehnt werden kann, falls die Funktion $\psi(z)$ im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ das Vorzeichen nicht ändert.

Im besonderen Fall, daß $\Phi_1(z)$ im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ das Vorzeichen nicht ändert, ist für $|\sigma| = 1$ nach (17) auch γ_1 eine ganze Funktion von λ für jeden festen Wert von γ_2. Entsprechendes läßt sich aus (17a) schließen. Falls $\Phi_2(z)$ das Vorzeichen nicht ändert, gilt das gleiche für γ_2 als Funktion von λ bei festem γ_1.

Unter bestimmten Einschränkungen können wir auch für $|\sigma| \neq 1$ schließen, daß λ eine ganze Funktion von γ_1 und γ_2 ist. Es sei in Gleichung (1): $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2 < 0$ im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ und σ positiv. Dann wechseln w und w^* in diesem Bereich das Vorzeichen nicht und unser Satz folgt hier somit unmittelbar aus Gleichung (17).

§ 9.

Berechnung der zweiten Ableitungen von λ nach γ_1 und γ_2 entlang den Eigenwertflächen.

Wir setzen voraus, daß ein einfacher Eigenwert vorliegt. Als ersten Schritt zur Berechnung der zweiten Differentialquotienten ermitteln wir die Änderung $\mathfrak{w}_1$ der Eigenfunktion w. Für konstante Werte von γ_1 und γ_2 sollen abzählbar unendlich viele Eigenwerte $\lambda_k (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ zum vorgegebenen σ-Wert, mit den entsprechenden Eigenfunktionen w_k vorhanden sein. Diese Eigenfunktionen sollen einen *vollständigen Satz* bilden und wir entwickeln $\mathfrak{w}_1$ nach diesen Funktionen w_k in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe (die Möglichkeit dieser Entwicklung ergibt sich aus den Eigenschaften von $\mathfrak{w}_1$, vgl. Verslagen Ned. Akademie van Wetenschappen 52 (1943), Nr. 8 und 9):

$$\mathfrak{w}_1 = d\gamma_1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A_k w_k(z) + d\gamma_2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} B_k w_k(z). \tag{18}$$

Diese Reihe setzen wir in (16) ein und schreiben λ_n an Stelle von λ und w_n an Stelle von w. Unter Berücksichtigung von (1) entsteht:

$$\begin{cases} d\gamma_1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_k) A_k w_k + d\gamma_2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_k) B_k w_k \\ \qquad = -w_n \cdot d\lambda - w_n \Phi_1(z) \cdot d\gamma_1 - w_n \Phi_2(z) \cdot d\gamma_2. \end{cases} \tag{19}$$

Indem wir (19) mit w_k^*, der zu w_k adjungierten Eigenfunktion, multiplizieren, von z_0 bis z_1 integrieren und die Biorthogonalität[1]):

$$\int_{z_0}^{z_1} w_k(z) \cdot w_l^*(z)\, dz = 0 \quad \text{für } k \neq l$$

sowie (17) berücksichtigen, entstehen die Gleichungen:

$$A_k = \frac{\int_{z_0}^{z_1} \Phi_1(z) \cdot w_n(z) \cdot w_k^*(z) \cdot dz}{(\lambda_k - \lambda_n) \int_{z_0}^{z_1} w_k(z) \cdot w_k^*(z) \cdot dz} \quad \text{für } k \neq n;$$

$$B_k = \frac{\int_{z_0}^{z_1} \Phi_2(z) \cdot w_n(z) \cdot w_k^*(z) \cdot dz}{(\lambda_k - \lambda_n) \int_{z_0}^{z_1} w_k(z) \cdot w_k^*(z) \cdot dz} \quad \text{für } k \neq n.$$

Die Koeffizienten A_n und B_n sind zunächst unbestimmt ($= 0/0$), werden aber infolge der Normierung:

$$\int_{z_0}^{z_1} \mathfrak{w} \cdot \mathfrak{w}^* \cdot dz = \int_{z_0}^{z_1} w \cdot w^* \cdot dz = 1,$$

wo $\mathfrak{w}^*$ die zu $\mathfrak{w}$ adjungierte Eigenfunktion darstellt, gleich Null.

Wir erweitern jetzt (16) mit den zunächst vernachlässigten Gliedern 2. Ordnung:

$$\text{(16b)} \quad \frac{d^2 \mathfrak{w}_1}{dz^2} + (\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2)\, \mathfrak{w}_1 = -w \cdot d\lambda - \mathfrak{w}_1 \cdot d\lambda - w\Phi_1 \cdot d\gamma_1 - \\ - \mathfrak{w}_1 \Phi_1 \cdot d\gamma_1 - w\Phi_2 \cdot d\gamma_2 - \mathfrak{w}_1 \Phi_2 \cdot d\gamma_2,$$

setzen:

$$d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} d\gamma_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_2} d\gamma_2 + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \gamma_1^2} (d\gamma_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} d\gamma_1 d\gamma_2 + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \gamma_2^2} \cdot (d\gamma_2)^2$$

und führen (18) in (16b) ein. Da die Glieder 1. Ordnung bereits oben behandelt wurden, können wir uns auf die Glieder 2. Ordnung beschränken. Wir fassen jeweils die mit $(d\gamma_1)^2$, $(d\gamma_2)^2$ und $d\gamma_1 \cdot d\gamma_2$ multiplizierten Glieder zusammen und erhalten:

$$\text{(20)} \quad w_n \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \gamma_1^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A_k w_k + \Phi_1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A_k w_k = 0;$$

$$\text{(21)} \quad w_n \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \gamma_2^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} B_k w_k + \Phi_2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} B_k w_k = 0;$$

$$\text{(22)} \quad 2 w_n \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} + \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A_k w_k + \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} \sum_{k=0}^{\infty} B_k w_k + \\ + \Phi_1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} B_k w_k + \Phi_2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A_k w_k = 0.$$

Wir multiplizieren (20) mit w_n^*, integrieren von z_0 bis z_1 und berücksichtigen (17). Es ergibt sich:

$$(23)\qquad \frac{\partial^2\lambda}{\partial\gamma_1^2} = \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\int_{z_0}^{z_1}\Phi_1(z)\,w_k^*\,w_n\,dz\cdot\int_{z_0}^{z_1}\Phi_1(z)\,w_k\,w_n^*\,dz}{(\lambda_n-\lambda_k)\int_{z_0}^{z_1}w_n\,w_n^*\,dz\cdot\int_{z_0}^{z_1}w_k\,w_k^*\,dz},$$

wo das Akzent beim Summenzeichen andeutet, daß das Glied $n = k$ nicht auftritt. Weiter ergibt sich in analoger Weise aus (21):

$$(24)\qquad \frac{\partial^2\lambda}{\partial\gamma_2^2} = \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\int_{z_0}^{z_1}\Phi_2(z)\,w_k^*\,w_n\,dz\cdot\int_{z_0}^{z_1}\Phi_2(z)\,w_k\,w_n^*\,dz}{(\lambda_n-\lambda_k)\int_{z_0}^{z_1}w_n\,w_n^*\,dz\cdot\int_{z_0}^{z_1}w_k\,w_k^*\,dz}$$

und aus (22):

$$(25)\qquad 2\frac{\partial^2\lambda}{\partial\gamma_1\,\partial\gamma_2} = \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\int_{z_0}^{z_1}\Phi_2\,w_k^*\,w_n\,dz\cdot\int_{z_0}^{z_1}\Phi_1\,w_k\,w_n^*\,dz}{(\lambda_n-\lambda_k)\int_{z_0}^{z_1}w_n\,w_n^*\,dz\cdot\int_{z_0}^{z_1}w_k\,w_k^*\,dz} +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\int_{z_0}^{z_1}\Phi_1\,w_k^*\,w_n\,dz\cdot\int_{z_0}^{z_1}\Phi_2\,w_k\,w_n^*\,dz}{(\lambda_n-\lambda_k)\int_{z_0}^{z_1}w_n\,w_n^*\,dz\cdot\int_{z_0}^{z_1}w_k\,w_k^*\,dz}.$$

Besondere Fälle obiger Gleichungen (23), (24) und (25), für selbstadjungierte Aufgaben, wurden bereits von anderer Seite behandelt[7]).

Im Falle, daß wir von einem zweifachen Eigenwert unserer Aufgabe ausgehen, müssen wir zunächst aus (17a) die zwei Werte von $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ sowie die entsprechenden Werte von $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ berechnen. Darauf ergeben sich aus den homogenen linearen Gleichungen für a_1 und a_2 im Falle von $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und in einem von $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ je zwei Sätze zusammengehöriger Werte dieser Koeffizienten und diese führen jeweils auf zwei verschiedene Eigenfunktionen $w_n = a_1 w_1 + a_2 w_2$, welche in den beiden Fällen im allgemeinen verschieden sind. Einsetzen dieser Eigenfunktionen w_n in (23), (24) und (25) ergibt je zwei Werte für diese Differentialquotienten. Diese können auch zusammenfallen, falls (17a) zwei zusammenfallende Wurzeln hat. Bei der Berechnung dieser Größen aus (20), (21) und (22) ist darauf zu achten, daß die beiden Eigenfunktionen, welche jeweils zur γ_1-Richtung gehören, zueinander orthogonal sind, und das gleiche gilt auch für die Eigenfunktionen, welche zur γ_2-Richtung gehören. Welche Eigenfunktionen dieser beiden Richtungen jeweils zur gleichen Eigenwertfläche gehören, ergibt sich nach der Bemerkung am Schluß von § 7.

---

[7]) Vgl. z. B. E. Kamke, Differentialgleichungen, S. 228. Leipzig, Akademischer Verlag, 1942; E. Schrödinger, Ann. d. Phys. 80 (1926), S. 440.

§ 10.

Lagenordnung der Eigenwertflächen.

O. HAUPT[8]) hat auf Grund der Oszillationssätze bewiesen, daß bei konstanten Werten γ_1 und γ_2 und von $-\infty$ bis ∞ wachsendem λ zunächst ein einfacher ganzperiodischer ($\sigma = +1$) Eigenwert auftritt, dann zwei halbperiodische ($\sigma = -1$), darauf zwei ganzperiodische Eigenwerte usw. Zwischen zwei benachbarten gleichartigen periodischen Eigenwerten ist σ reell und $|\sigma| \gtrless 1$, zwischen zwei benachbarten ungleichartigen periodischen Eigenwerten ist σ komplex und $|\sigma| = 1$. H. A. KRAMERS[9]) hat diese Sätze in elementarer Weise und verschärfter Form hergeleitet, indem er zeigte, daß der Ausdruck in geschweiften Klammern der Gleichung (15), den wir mit f bezeichnen, für $\partial f/\partial\lambda = 0$ der Ungleichung $|f| \geqq 2$ genügt und daß dann $\partial^2 f/\partial\lambda^2$ das Vorzeichen von $-f$ hat. Hieraus geht hervor: Falls zwischen benachbarten gleichartig periodischen Eigenwerten ein λ-Eigenwert zu einem vorgegebenen reellen σ-Wert auftritt, so liegt im genannten λ-Bereich ein und nur ein zweiter Eigenwert zum gleichen σ, außer im Fall, daß für den erstgenannten Eigenwert gilt: $\partial f/\partial\lambda = 0$. Zwischen zwei ungleichartigen periodischen Eigenwerten liegt zu jedem komplexen σ mit $|\sigma| = 1$ ein und nur ein λ-Eigenwert.

Wir wollen diese für jeweils konstante γ_1- und γ_2-Werte abgeleiteten Sätze auf veränderliche Werte dieser Parameter unter der Voraussetzung beschränkter Funktionen Φ_1 und Φ_2 erweitern. Hierzu gehen wir von einem beliebigen Punkt Λ_0, Γ_1, Γ_2 des λ, γ_1, γ_2-Raumes aus und ziehen die Verbindungsgerade von diesem Punkt nach einem weiteren Punkt λ, γ_1, γ_2 dieses Raumes. Diese Gerade entsteht durch den Schnitt zweier Ebenen: $\gamma_1 - \Gamma_1 = (\lambda - \Lambda_0)\operatorname{tg}\varphi_1$ und $\gamma_2 - \Gamma_2 = (\lambda - \Lambda_0)\cdot\operatorname{tg}\varphi_2$. Wir rechnen diese Winkel φ_1 und φ_2 positiv für $\gamma_1 > \Gamma_1$, $\gamma_2 > \Gamma_2$ und $\lambda > \Lambda_0$ und zählen sie von der λ-Achse aus. Die Gleichung (1) schreibt sich mit Hilfe dieser Größen:

$$(26)\quad \left\{ \frac{d^2w}{dz^2} - \Lambda_0\Phi_1 w\operatorname{tg}\varphi_1 - \Lambda_0\Phi_2 w\operatorname{tg}\varphi_2 + \Gamma_1\Phi_1 w + \Gamma_2\Phi_2 w + \right.$$
$$\left. + \lambda w(1 + \Phi_1\operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2\operatorname{tg}\varphi_2) = 0. \right.$$

Wir machen nun mit einigen geringfügigen Änderungen von der Rechenweise Gebrauch, die H. A. KRAMERS[9]) verwendet hat. Wenn w_1 und w_2 zwei beliebige linear unabhängige Lösungen von (26) darstellen, ergibt sich für f die Formel:

$$(27)\quad cf = \begin{vmatrix} w_1(z_1) w_2(z_1) \\ w_1'(z_0) w_2'(z_0) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} w_1'(z_1) w_2'(z_1) \\ w_1(z_0) w_2(z_0) \end{vmatrix}; \quad c = \begin{vmatrix} w_1(z) w_1'(z) \\ w_2(z) w_2'(z) \end{vmatrix},$$

wo Akzente Differentiation nach z bezeichnen. Zur Berechnung von $\partial f/\partial\lambda$ müssen wir $\partial w/\partial\lambda$ und $\partial w'/\partial\lambda$ ermitteln, wo w eine der Lösungen w_1 oder

---

[8]) O. HAUPT, Math. Ann. 76 (1915), S. 67–104; 79 (1919), S. 278–285.

[9]) H. A. KRAMERS, Physica, Haag, 2 (1935), S. 483–490.

w_2 bezeichnet. Die Funktion $\partial w/\partial\lambda \equiv w_\lambda$ genügt der aus (26) hervorgehenden unhomogenen Gleichung:

$$\frac{d^2 w_\lambda}{dz^2} + w_\lambda [- \Lambda_0 \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 - \Lambda_0 \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2 + \Gamma_1 \Phi_1 + \Gamma_2 \Phi_2 + \lambda (1 + \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2)] = - w (1 + \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2).$$

Wir bestimmen eine Lösung w_λ dieser inhomogenen linearen Differentialgleichung, welche den Anfangsbedingungen $w_\lambda(z_0) = 0$ und $w'_\lambda(z_0) = 0$ genügt (Akzent bezeichnet Differentiation nach z). Diese Lösung wird durch:

$$(28) \quad w_\lambda = \frac{1}{c} \int_{z_0}^{z} \begin{vmatrix} w_1(z) & w_2(z) \\ w_1(\mathfrak{z}) & w_2(\mathfrak{z}) \end{vmatrix} w(\mathfrak{z}) \cdot [1 + \Phi_1(\mathfrak{z}) \cdot \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2(\mathfrak{z}) \cdot \operatorname{tg}\varphi_2] \, d\mathfrak{z}$$

dargestellt. Wegen der angeführten Anfangsbedingungen der Funktion w_λ brauchen wir beim Differenzieren von (27) nach λ nur $w_1(z_1)$, $w'_1(z_1)$, $w_2(z_1)$, $w'_2(z_1)$ als Veränderliche zu betrachten und erhalten nach leichter Rechnung:

$$(29) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} = - \alpha_{21} J_{11} + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) J_{12} + \alpha_{12} J_{22}, \\ \text{wo:} \\ k, l = 1,2; \; J_{kl} = \dfrac{1}{c} \displaystyle\int_{z_0}^{z_1} w_k(z) w_l(z) [1 + \Phi_1(z) \cdot \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2(z) \cdot \operatorname{tg}\varphi_2] \, dz \end{cases}$$

und wo:

$$(30) \quad \begin{cases} c\alpha_{11} = \begin{vmatrix} w_1(z_1) & w'_1(z_1) \\ w_2(z_0) & w'_2(z_0) \end{vmatrix}; \quad c\alpha_{12} = - \begin{vmatrix} w_1(z_1) & w'_1(z_1) \\ w_1(z_0) & w'_1(z_0) \end{vmatrix}; \\ c\alpha_{22} = - \begin{vmatrix} w_2(z_1) & w'_2(z_1) \\ w_1(z_0) & w'_1(z_0) \end{vmatrix}; \quad c\alpha_{21} = \begin{vmatrix} w_2(z_1) & w'_2(z_1) \\ w_2(z_0) & w'_2(z_0) \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Nochmaliges Differenzieren von (29) nach λ führt unter Berücksichtigung von (27) und (28) zur Formel:

$$(31) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} = - f (J_{11} J_{22} - J_{12}^2) - \alpha_{21} \frac{\partial J_{11}}{\partial \lambda} + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) \frac{\partial J_{12}}{\partial \lambda} + \alpha_{12} \frac{\partial J_{22}}{\partial \lambda}.$$

Wenn λ im Betrag sehr groß: $\zeta^2 |\lambda| \gg 1$ und negativ ist, werden wegen (26), *falls die Winkel* φ_1 *und* φ_2 *derart gewählt werden, daß der Klammerausdruck* ψ, *mit dem* λ *multipliziert ist, für alle* z *positiv und* $\neq 0$ *wird*, die Funktionen $w_1(z)$ und $w_2(z)$ angenähert[10]):

$$w_1 \approx \psi^{-1/4} \cdot e^{-\sqrt{|\lambda|} \int_{z_0}^{z} \psi^{1/2} dz} \quad \text{und} \quad w_2 \approx \psi^{-1/4} \cdot e^{+\sqrt{|\lambda|} \int_{z_0}^{z} \psi^{1/2} dz},$$

wo:

$$\psi = 1 + \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2.$$

---

[10]) R. COURANT u. D. HILBERT, Methoden d. math. Physik, Bd. 1, 1. Aufl., S. 335 u. 368.

Folglich ist hier:

$$f \approx e^{\sqrt{|\lambda|}\int_{z_0}^{z_1} \psi^{1/2}\,dz} \tag{32a}$$

und somit f positiv und im Betrag sehr groß. Für sehr große positive λ-Werte $\zeta^2\lambda \gg 1$ wird:

$$w_1 \approx \psi^{-1/4} \cdot \cos\left\{\sqrt{\lambda}\int_{z_0}^{z} \psi^{1/2}\,dz\right\} \quad \text{und} \quad w_2 \approx \psi^{-1/4} \cdot \sin\left\{\sqrt{\lambda}\int_{z_0}^{z} \psi^{1/2}\,dz\right\},$$

also:

$$f \approx 2\cos\left(\sqrt{\lambda}\int_{z_0}^{z_1} \psi^{1/2}\,dz\right). \tag{32b}$$

Für λ von $-\infty$ bis ∞ wachsend fängt f demnach mit sehr großen positiven Werten an, sinkt und erreicht ein Minimum, darauf ein Maximum usw., um schließlich dem pendelnden Wert (32b) zuzustreben.

Für $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\Gamma_1 = 0$ und $\Gamma_2 = 0$ nimmt der Punkt $\lambda = 0$ des λ-, γ_1-, γ_2-Raumes eine Ausnahmestellung ein. Hier ist $\partial f/\partial\lambda = 0$ und $\partial^2 f/\partial\lambda^2$ wechselt das Vorzeichen (positiv für negatives λ und negativ für positives λ). Für diesen Punkt gelten unsere nächsten Betrachtungen bezüglich $\partial^2 f/\partial\lambda^2$ nicht.

Wir wollen nun dartun, daß für $\partial f/\partial\lambda = 0$ stets gilt: $|f| \geqq 2$. Die Lösungen w_1 und w_2 enthalten je zwei zunächst willkürliche Konstanten, von denen je eine zur Normierung dient und die zweite noch frei wählbar ist. Wir wählen sie derart, daß $J_{12} = 0$. Die Winkel φ_1 und φ_2 seien wieder derart gewählt, daß $1 + \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2$ für alle z positiv ist. Dann haben J_{11} und J_{22} und folglich für $\partial f/\partial\lambda = 0$ auch α_{12} und α_{21} gleiches Vorzeichen. Da stets gilt: $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 1$, ist $\alpha_{11}\alpha_{22} \geqq 1$ und folglich ist $|f| = |\alpha_{11} + \alpha_{22}| \geqq 2$. Weiter wollen wir zeigen, daß für $\partial f/\partial\lambda = 0$ das Vorzeichen von $\partial^2 f/\partial\lambda^2$ gleich demjenigen von $-f$ ist. Hierzu wählen wir w_1 und w_2 derart, daß α_{12} und α_{21} verschwinden. Aus (29) geht dann für $\partial f/\partial\lambda = 0$ hervor:

$$(\alpha_{11} - \alpha_{22})\,J_{12} = 0.$$

Wir nehmen zunächst an, daß $|f| > 2$ ist. Dann ist wegen $|f| = |\alpha_{11} + \alpha_{22}|$ und $\alpha_{11}\alpha_{22} = 1 + \alpha_{12}\alpha_{21} = 1$ offenbar $\alpha_{11} - \alpha_{22} \neq 0$ und folglich $J_{12} = 0$. Hierdurch erhalten wir aus (31):

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2}\right)_{\text{für } \frac{\partial f}{\partial\lambda} = 0} = -f J_{11} J_{22} + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\frac{\partial J_{12}}{\partial\lambda}.$$

Es ist: $|\alpha_{11}-\alpha_{22}|<|\alpha_{11}+\alpha_{22}|=|f|$, da $\alpha_{11}\alpha_{22}=1$, und wir können auch zeigen, daß $|\partial J_{12}/\partial\lambda|<J_{11}J_{22}$ ist (es sei $\psi=1+\Phi_1\operatorname{tg}\varphi_1+{}$ $+\Phi_2\operatorname{tg}\varphi_2$):

$$\frac{\partial J_{12}}{\partial\lambda}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_{z_0}^{z_1}w_1(z)\cdot w_2(z)\cdot\psi(z)\cdot dz$$

$$=\frac{1}{c}\int_{z_0}^{z_1}\{w_{1\lambda}(z)\cdot w_2(z)+w_1(z)\cdot w_{2\lambda}(z)\}\,\psi(z)\cdot dz$$

$$=\frac{1}{c^3}\int_{z_0}^{z_1}dz\int_{z_0}^{z}d\mathfrak{z}\cdot\psi(z)\cdot\begin{vmatrix}w_1(z)w_2(z)\\ w_1(\mathfrak{z})w_2(\mathfrak{z})\end{vmatrix}\cdot\psi(\mathfrak{z})\{w_1(\mathfrak{z})w_2(z)+w_1(z)\cdot w_2(\mathfrak{z})\}$$

$$=\frac{1}{c^3}\int_{z_0}^{z_1}dz\int_{z_0}^{z}d\mathfrak{z}\cdot\psi(z)\cdot\psi(\mathfrak{z})\cdot\{w_1^2(z)\,w_2^2(\mathfrak{z})-w_1^2(\mathfrak{z})\,w_2^2(z)\}.$$

Folglich ist:

$$\left|\frac{\partial J_{12}}{\partial\lambda}\right|<\frac{1}{c^3}\int_{z_0}^{z_1}\psi(z)\,dz\int_{z_0}^{z}\psi(\mathfrak{z})\cdot d\mathfrak{z}\cdot\{w_1^2(\mathfrak{z})w_2^2(z)+w_1^2(z)w_2^2(\mathfrak{z})\}$$

$$=\frac{1}{c^3}\int_{z_0}^{z_1}w_1^2(\mathfrak{z})\,\psi(\mathfrak{z})d\mathfrak{z}\int_{z_0}^{z_1}w_2^2(z)\,\psi(z)dz=J_{11}J_{22}.$$

Im Falle, daß $|f|=2$, gilt für $\alpha_{12}=\alpha_{21}=0$ wegen $\alpha_{11}\alpha_{22}=1$ die Gleichung $\alpha_{11}=\alpha_{22}$, und wir erhalten aus (31):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2}=-f(J_{11}J_{22}-J_{12}^2).$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung ist:

$$J_{11}J_{22}-J_{12}^2=\frac{1}{c^2}\int_{z_0}^{z_1}w_1^2(z)\,\psi(z)\cdot dz\cdot\int_{z_1}^{z_1}w_2^2(z)\,\psi(z)\cdot dz-$$

$$-\frac{1}{c^2}\left[\int_{z_0}^{z_1}w_1(z)w_2(z)\,\psi(z)\,dz\right]^2>0,$$

falls w_1 und w_2 linear unabhängig sind, was wir ja vorausgesetzt haben. Folglich ist allgemein für $\partial f/\partial\lambda=0$ die Ungleichung $|f|\geqq 2$ erfüllt und für $f\geqq 2$ sowie $\partial f/\partial\lambda=0$ das Vorzeichen von $\partial^2 f/\partial\lambda^2$ gleich dem von $-f$, falls $\psi=1+\Phi_1\operatorname{tg}\varphi_1+\varphi_2\operatorname{tg}\varphi_2$ für alle z positiv ist. Die oben für konstante Werte von γ_1 und γ_2 angegebenen Sätze gelten demnach auch entlang den hier betrachteten Geraden, welche durch die Winkel φ_1 und φ_2 bestimmt werden.

Man kann leicht zeigen, daß es für Winkel, welche dieser Bedingung *nicht* genügen, Gerade gibt, entlang denen eine andere Lagenordnung der Eigenwerte gilt. Ein Beispiel hierzu liefert die MATHIEUsche Gleichung (Ergebn. d. Math. I, H. 3, S. 24). Die genannte Bedingung ist somit nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig.

§ 11.

Verlauf der Eigenwertflächen in der Umgebung der λ-Achse.

Auf der λ-Achse sind nur für $\lambda < 0$ Eigenwerte zu reellen σ-Werten mit $|\sigma| > 1$ vorhanden. Für $\lambda > 0$ sind die Punkte $\zeta \sqrt{\lambda} = n\pi$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ zweifache Eigenwerte, und zwar für ungerade n halbperiodische und für gerade n ganzperiodische Eigenwerte. Durch jeden dieser Punkte gehen zwei Eigenwertflächen. Durch den Punkt $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\lambda = 0$ geht eine einzige Fläche, da er einen einfachen ganzperiodischen Eigenwert darstellt. Für alle Punkte der λ-Achse außer $\zeta \sqrt{\lambda} = n\pi$; $n = 1, 2, 3 \ldots$ gilt

$$\zeta \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} = -\int_{z_0}^{z_1} \Phi_1(z)\, dz; \quad \zeta \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_2} = -\int_{z_0}^{z_1} \Phi_2(z)\, dz, \tag{33}$$

da hier ww^* gleich einer Konstanten wird. Diese Gleichungen (33) bestimmen die Berührungsebene der Eigenwertfläche im betreffenden Punkt der λ-Achse. Wenn wir insbesondere den Punkt $\lambda = 0$ ins Auge fassen, so sind für $\partial\lambda/\partial\gamma_1 > 0$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2 > 0$ positive γ_1- und γ_2-Werte vorhanden, für die es nur positive Eigenwerte λ gibt. Analog gibt es für $\partial\lambda/\partial\gamma_1 < 0$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2 > 0$ positive γ_2- und zugleich negative γ_1-Werte dieser Eigenschaft usw.

In den Punkten $\zeta \sqrt{\lambda} = n\pi$; $n = 1, 2, 3 \ldots$ müssen $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ aus (17a) berechnet werden. Für diese Größen ergeben sich je zwei verschiedene oder zwei zusammenfallende Werte, je nachdem die Diskriminante D von (17a) nicht oder wohl verschwindet. Wegen $\bar{\alpha}_{12} = \bar{\alpha}_{21} = 0$ und $\bar{\beta}_{12} = \bar{\beta}_{21}$ gilt hier:

$$D = \left(\frac{\bar{\beta}_{22}}{\bar{\alpha}_{22}} - \frac{\bar{\beta}_{11}}{\bar{\alpha}_{11}}\right)^2 + 4\frac{\bar{\beta}_{12}^2}{\bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{22}}. \tag{34}$$

Wir nennen Δ_{11} und Δ_{12} die beiden Werte von $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und analog Δ_{21} und Δ_{22} die beiden Werte von $\partial\lambda/\partial\gamma_2$. Dann lauten die Gleichungen der beiden Berührungsebenen der Eigenwertflächen in den zweifachen Eigenwertpunkten Λ der λ-Achse:

$$\begin{cases} \lambda = \Lambda + \Delta_{11}\gamma_1 + \Delta_{21}\gamma_2; \\ \lambda = \Lambda + \Delta_{12}\gamma_1 + \Delta_{22}\gamma_2. \end{cases} \tag{35}$$

Dieses Gleichungspaar bestimmt die *Berührungsgerade der Schnittkurve oder Berührungskurve* beider Eigenwertflächen durch den betreffenden Punkt der λ-Achse. Welche Werte Δ jeweils in einer der Gleichungen (35) zusammengehören, ist am Schluß von § 7 auseinandergesetzt. Der betreffende Punkt der λ-Achse ist ein isolierter Berührungspunkt der beiden Eigenwertflächen, falls die Gleichung (17a) für $\partial\lambda/\partial\gamma$, wo $\gamma_1 = \mu_1\gamma$ und $\gamma_2 = \mu_2\gamma$ sowie:

$$\bar{\beta}_{kl} = \int_{z_0}^{z_1} (\mu_1\Phi_1 + \mu_2\Phi_2)\, w_k w_l\, dz$$

für alle reellen Werte von μ_1 und μ_2 je zwei zusammenfallende Wurzeln aufweist.

§ 12.

Verlauf der Eigenwertflächen im großen.

Nach § 3 Gleichung (9) ist für $\gamma_1 = \mu_1\gamma$ und $\gamma_2 = \mu_2\gamma$ der n-te positive oder negative Eigenwert γ das Maximum-Minimum des Ausdrucks:

$$(36) \qquad M = -\int_{z_0}^{z_1} w\left(\frac{d^2 w^*}{dz^2} + \lambda w^*\right) dz = \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{dw}{dz}\frac{dw^*}{dz} - \lambda w w^*\right) dz$$

unter gewissen Nebenbedingungen. Für $|\sigma| = 1$ sind w und w^* konjugiert komplex und geht aus (36) hervor, daß M positiv definit ist für $\lambda \leqq 0$. Das gleiche können wir aus (9b) an Hand der Gleichung (4) schließen. In diesem λ-Bereich wird demnach der Betrag jedes Eigenwertes γ für $|\sigma| = 1$ größer (zumindest nicht kleiner), falls λ abnimmt. *Alle Eigenwertflächen für* $|\sigma| = 1$ *verlaufen demnach für* $-\infty < \lambda \leqq 0$ *derart, daß* $\gamma \cdot \partial\lambda/\partial\gamma$ *negativ ist, wo* $\gamma_1 = \mu_1\gamma$ *und* $\gamma_2 = \mu_2\gamma$ *gesetzt wurde.* Jede Ebene parallel zur γ_1-, γ_2-Ebene für $\lambda \leqq 0$ muß demnach jede der Eigenwertflächen für $|\sigma| = 1$ in einer einzigen ebenen analytischen, in sich im Endlichen *geschlossenen* Kurve schneiden. Im Falle $\int_{z_0}^{z_1} \Phi_1(z)\, dz = 0$ und gleichzeitig $\int_{z_0}^{z_1} \Phi_2(z)\, dz = 0$ berührt die γ_1-, γ_2-Ebene die Eigenwertfläche für $\sigma = +1$, welche durch den Punkt $\lambda = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ hindurchgeht, in diesem Punkt.

Wir betrachten jetzt jene Eigenwertflächen für $|\sigma| = 1$, welche jeweils, wenn λ von $-\infty$ nach $+\infty$ wächst, zum *kleinsten* λ-Wert gehören. Für diese Flächen wird der betreffende Eigenwert λ nach § 3 Gleichung (6) und (7) als das Minimum des Ausdrucks:

$$(37) \qquad \lambda = \frac{-\int_{z_0}^{z_1} w^* \cdot \frac{d^2 w}{dz^2}\, dz - \gamma \int_{z_0}^{z_1} (\mu_1\Phi_1 + \mu_2\Phi_2)\, w w^*\, dz}{\int_{z_0}^{z_1} w(z)\, w^*(z)\, dz}$$

für alle zweimal stetig differenzierbaren adjungierten Funktionen w und w^* erhalten, welche den Randbedingungen (2) bzw. den hierzu adjungierten Randbedingungen, mit $1/\sigma$ an Stelle von σ genügen. Wenn für w und w^* die zu den gewählten Werten σ, μ_1, μ_2 und γ gehörigen Eigenfunktionen in (37) eingesetzt werden, entsteht unmittelbar der dazugehörige Eigenwert λ. Wir können (37) aber, wenn wir wieder $\gamma_1 = \mu_1 \gamma$ und $\gamma_2 = \mu_2 \gamma$ einführen, auch so auffassen, daß sie die Gleichung der *Berührungsebene* der Eigenwertfläche im betrachteten Eigenwertpunkt $\lambda = \Lambda_0, \gamma_1 = \Gamma_1, \gamma_2 = \Gamma_2$ darstellt, während λ, γ_1 und γ_2 als veränderliche rechtwinklige Koordinaten gelten. Wenn wir auf dieser Berührungsebene bleiben, so ist zu jedem Wertepaar γ_1, γ_2 der zugehörige λ-Wert der obigen Minimumeigenschaft zufolge *größer* als der λ-Eigenwert, der für diese γ_1 und ν_2 auf der Eigenwertfläche für den vorgegebenen σ-Wert liegt. Die Berührungsebenen können, da diese Eigenschaft für sie alle gilt, die zugehörigen Eigenwertflächen, außer im Berührungspunkt, nicht schneiden oder berühren. *Die genannten Eigenwertflächen müssen also stets konvex nach der Seite der Berührungsebenen (d. h. nach wachsendem λ) gekrümmt sein.* Außer für $|\sigma| = 1$ gelten diese Überlegungen auch für jene Eigenwertflächen für reelle positive σ-Werte, für welche λ eine ganze transzendente Funktion von γ_1 und von γ_2 ist (vgl. § 8). Hierzu gehören die Fälle, in denen $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2 < 0$ und $\sigma > +1$ ist[11]).

Wir können die Krümmung der obengenannten Eigenwertflächen in einigen einfachen Fällen an Hand der Gleichungen (23), (24) und (25) verfolgen. Es sei z. B. $|\sigma| = 1$ und wir fassen den kleinsten Eigenwert λ_0 ins Auge, der zu diesen σ gehört. Dann ergibt sich, da die beiden Ausdrücke im Zähler jedes Gliedes von (23) und (24) konjugiert komplex zueinander sind, daß alle Glieder von (23) und (24) ein negatives Vorzeichen haben. Hierdurch sind somit die Vorzeichen von $\partial^2 \lambda / \partial \gamma_1^2$ und $\partial^2 \lambda / \partial \gamma_2^2$ in diesen Fällen festgelegt. Aus (23), (24) und (25) lassen sich die *Krümmungsradien* der Eigenwertflächen berechnen.

Die Berührungsgeraden aller Eigenwertflächen für komplexe σ-Werte bilden stets Winkel φ_1 und φ_2 nach § 10 derart, daß $1 + \Phi_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ *nicht* für alle z positiv ist. Falls dieser Satz nicht gelten würde, könnten Geraden angegeben werden, denen Winkel φ_1 und φ_2 entsprechen würden, für welche der Ausdruck $1 + \Phi_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ überall positiv wäre und welche eine der genannten Eigenwertflächen zweimal schneiden würden, ohne zwischen diesen Schnittpunkten eine Eigenwertfläche für reelles σ zu treffen. In diesem Fall wäre zwischen diesen Schnittpunkten eine Nullstelle von

---

[11]) Eine analoge Schlußweise wie oben durchgeführt, wurde bereits von H. SCHAEFER, ZS. f. angew. Math. Mech. 14 (1934), S. 367—368, sowie Diss. Hannover 1934 (herausgegeben 1937) in anderen Fällen angewandt.

$\partial f/\partial\lambda$ auf der Geraden vorhanden, für die $|f| < 2$ wäre und dies ist mit der Lagenordnung der Eigenwertflächen nach § 10 im Widerspruch. Falls eine Eigenwertfläche für $\sigma = +1$ oder $= -1$ eine Berührungsgerade aufweist, deren Winkel φ_1 und φ_2 der Bedingung $1 + \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2 \geqq 0$ für alle z genügen, so muß beiderseits des Berührungspunktes auf dieser Geraden $|f| < 2$ sein, wie aus der Lagenordnung der Eigenwertflächen nach § 10 hervorgeht.

Auf den Eigenwertflächen für reelle σ-Werte mit $|\sigma| \geqq 1$ liegt für positive λ-Werte je mindestens eine Nullstelle von $\partial\gamma_1/\partial\lambda$ und von $\partial\gamma_2/\partial\lambda$. Dies geht aus den unteren Eigenwertschranken nach § 2 hervor. Entlang einer solchen Eigenwertfläche ändern sich bei monotonem Fortschreiten derart, daß γ_1, γ_2 und λ sich monoton ändern, von einer solchen Nullstelle aus $\partial\gamma_1/\partial\lambda$ und $\partial\gamma_2/\partial\lambda$ monoton, solange die Winkel φ_1 und φ_2 der Berührungsgeraden im betreffenden Punkt der Bedingung genügen, daß $1 + \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2 \geqq 0$ ist. Falls der Satz nicht gelten würde, könnte man Geraden angeben, entlang denen im gleichen Punkt $\partial f/\partial\lambda = 0$ und $f \cdot \partial^2 f/\partial\lambda^2$ positiv wäre, was mit der Lagenordnung der Eigenwertflächen nach § 10 im Widerspruch stünde.

III. Asymptotischer Verlauf der Eigenwertflächen.

§ 13.

Asymptotische Integration der verallgemeinerten Hillschen Gleichung.

Die asymptotische Integration der Gleichung:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \{\lambda + \gamma_1 \Phi_1(z) + \gamma_2 \Phi_2(z)\} w(z) = 0 \tag{1}$$

erfordert besondere Überlegungen, falls der Ausdruck in geschweiften Klammern im Grundbereich $z_0 \leqq z \leqq z_0 + \zeta = z_1$ Nullstellen aufweist. Diese ausführlich u. a. von R. E. Langer[12]) betrachteten Verhältnisse hängen direkt mit der Stokesschen Erscheinung zusammen, bei welcher beiderseits einer solchen Nullstelle auf der reellen z-Achse verschiedene asymptotische Darstellungen für die gleiche Funktion gelten. Wir setzen zunächst voraus, daß der Ausdruck in geschweiften Klammern im Grundbereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ die mit Rücksicht auf seine Periodizität kleinstmögliche von Null verschiedene Anzahl von Nullstellen aufweist, d. h. *zwei einfache Nullstellen*. Er sei negativ für $z_0 \leqq z \leqq \alpha_1$, positiv für $\alpha_1 \leqq z \leqq \alpha_2$ und negativ für $\alpha_2 \leqq z \leqq z_1$. Die

[12]) R. E. Langer, Trans. Amer. math. Soc. **36** (1934), S. 90–106; Bull. Amer. math. Soc. **40** (1934), S. 545–582.

obige Voraussetzung soll für Werte von λ, γ_1 und γ_2 gelten, welche der Ungleichung:

$$\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} |\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/2}\, dz \gg 1; \quad \alpha_3 = \alpha_1 + \zeta$$

entsprechen. Sie bedingt bestimmte Annahmen über den Verlauf der Funktionen $\Phi_1(z)$ und $\Phi_2(z)$ von z, auf die wir in § 15 noch näher eingehen werden.

In den genannten Bereichen gelten folgende asymptotische Darstellungen[12]) der Lösungen von (1):

Für $z_0 \leqq z < \alpha_1$:

$$(38)\quad w(z) \approx \frac{A_1 [1 + O(\sqrt{|\lambda|}\,\zeta + \sqrt{|\gamma_1|}\,\zeta + \sqrt{|\gamma_2|}\,\zeta)^{-1}]}{|\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/4}} \times$$
$$\times \left\{ \sin \eta_1 \cdot e^{\int_z^{\alpha_1} |\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/2}\, dz} + \frac{\cos \eta_1}{2} \cdot e^{-\int_z^{\alpha_1} |\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/2}\, dz} \right\};$$

für $\alpha_1 < z < \alpha_2$:

$$(39)\quad w(z) \approx \frac{A_1}{(\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2)^{1/4}} \cdot \cos\left\{ \int_{\alpha_1}^{z} (\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2)^{1/2}\, dz - \frac{\pi}{4} + \eta_1 \right\} +$$
$$+ O(\sqrt{|\lambda|}\,\zeta + \sqrt{|\gamma_1|}\,\zeta + \sqrt{|\gamma_2|}\,\zeta)^{-5/4};$$

für $\alpha_1 < z < \alpha_2$:

$$(40)\quad w(z) \approx \frac{A_2}{(\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2)^{1/4}} \cdot \cos\left\{ \int_{z}^{\alpha_2} (\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2)^{1/2}\, dz - \frac{\pi}{4} + \eta_2 \right\} +$$
$$+ O(\sqrt{|\lambda|}\,\zeta + \sqrt{|\gamma_1|}\,\zeta + \sqrt{|\gamma_2|}\,\zeta)^{-5/4};$$

für $\alpha_2 < z < \alpha_3 = \alpha_1 + \zeta$:

$$(41)\quad w(z) \approx \frac{A_2 [1 + O(\sqrt{|\lambda|}\,\zeta + \sqrt{|\gamma_1|}\,\zeta + \sqrt{|\gamma_2|}\,\zeta)^{-1}]}{|\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/4}} \times$$
$$\times \left\{ \sin \eta_2 \cdot e^{\int_{\alpha_2}^{z} |\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/2}\, dz} + \frac{\cos \eta_2}{2} \cdot e^{-\int_{\alpha_2}^{z} |\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/2}\, dz} \right\}.$$

Für die Wahl der Konstanten A_1, A_2, η_1, η_2 und λ (oder γ_1, γ_2) haben wir bei gegebenem γ_1, γ_2 (oder λ) und σ die Bedingung, daß der zweite und dritte obige Ausdruck im Bereich $\alpha_1 < z < \alpha_2$ identisch sein müssen, sowie die Bedingung $w(z + \zeta) = \sigma \cdot w(z)$, welche zusammen vier Gleichungen ergeben. Die letzte erforderliche Bestimmungsgleichung ergibt sich aus der Normierung der Eigenfunktionen.

§ 14.

Asymptotische Eigenwertformeln bei zwei Nullstellen.

Wir schreiben:

$$\int_z^{\alpha_2}(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}\,dz=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}\,dz-$$

$$-\int_{\alpha_1}^{z}(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}\,dz=\beta_1-\int_{\alpha_1}^{z}(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}\,dz$$

und erhalten an Stelle von (40):

$$(40\,a)\quad w(z)\approx\frac{A_2}{(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/4}}\Big[\cos\Big\{\int_{\alpha_1}^{z}(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}\,dz\Big\}\cdot$$

$$\cdot\cos\Big\{-\beta_1+\frac{\pi}{4}-\eta_2\Big\}-\sin\Big\{\int_{\alpha_1}^{z}(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}\,dz\Big\}\cdot$$

$$\cdot\sin\Big\{-\beta_1+\frac{\pi}{4}-\eta_2\Big\}\Big]+O\left(\sqrt[4]{|\lambda|}\,\zeta+\sqrt[4]{|\gamma_1|}\,\xi+\sqrt[4]{|\gamma_2|}\,\zeta\right)^{-5/4}.$$

Die Gleichung (39) lautet ausgeschrieben:

$$(39\,a)\quad w(z)\approx\frac{A_1}{(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/4}}\Big[\cos\Big\{\int_{\alpha_1}^{z}(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}\,dz\Big\}\cdot$$

$$\cdot\cos\Big(\frac{\pi}{4}-\eta_1\Big)+\sin\Big\{\int_{\alpha_1}^{z}(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}\,dz\Big\}\cdot\sin\Big(\frac{\pi}{4}-\eta_1\Big)+$$

$$+O\left(\sqrt[4]{|\lambda|}\,\zeta+\sqrt[4]{|\gamma_1|}\,\zeta+\sqrt[4]{|\gamma_2|}\,\zeta\right)^{-5/4}.$$

Das Verhältnis der Koeffizienten der veränderlichen cos- und sin-Glieder muß in Gleichung (39a) das gleiche sein wie in Gleichung (40a):

$$(42\,a)\qquad \operatorname{cotg}\Big(\frac{\pi}{4}-\eta_1\Big)=\operatorname{cotg}\Big(\beta_1-\frac{\pi}{4}+\eta_2\Big)$$

und auch die Koeffizienten selber müssen gleich sein, also:

$$(42\,b)\qquad A_1\cos\Big(\frac{\pi}{4}-\eta_1\Big)=A_2\cos\Big(\beta_1-\frac{\pi}{4}+\eta_2\Big).$$

In analoger Weise schreiben wir für $\alpha_3>z^*\geqq z_1$:

$$\int_{\alpha_2}^{z^*}|\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2|^{1/2}\,dz=\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}|\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2|^{1/2}\,dz-$$

$$-\int_{z^*}^{\alpha_3}|\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2|^{1/2}\,dz$$

$$=\beta_2-\int_{z^*}^{\alpha_3}|\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2|^{1/2}\,dz$$

und in letzterem Integral können die Grenzen wegen der Periodizität von Φ_1 und Φ_2 durch z bis α_1 ersetzt werden, wenn $z^* = z + \zeta$. Folglich ergibt sich aus (41):

$$(41\,a)\quad w(z^*) \approx \frac{A_2\,[1 + O(\sqrt{|\lambda|} + \sqrt{|\gamma_1|} + \sqrt{|\gamma_2|})^{-1}\,\zeta^{-1}]}{|\lambda + \gamma_1\,\Phi_1 + \gamma_2\,\Phi_2|^{1/4}} \left\{ \sin\eta_2 \cdot e^{\beta_2 - \int_z^{\alpha_1} |\lambda + \gamma_1\,\Phi_1 + \gamma_2\,\Phi_2|^{1/2}\,dz} + \frac{\cos\eta_2}{2} \cdot e^{-\beta_2 + \int_z^{\alpha_1} |\lambda + \gamma_1\,\Phi_1 + \gamma_2\,\Phi_2|^{1/2}\,dz} \right\}.$$

Damit $w(z^*) = \sigma \cdot w(z)$, müssen die Gleichungen:

$$(43\,a)\qquad \sigma\,A_1 \sin\eta_1 = \frac{A_2}{2}\cos\eta_2\,e^{-\beta_2};$$

$$(43\,b)\qquad \sigma\,\frac{A_1}{2}\cos\eta_1 = A_2 \sin\eta_2\,e^{\beta_2}$$

gelten. Mit den oben eingeführten Bezeichnungen:

$$(44)\quad \beta_1 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\lambda + \gamma_1\,\Phi_1 + \gamma_2\,\Phi_2)^{1/2}\,dz;\quad \beta_2 = \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} |\lambda + \gamma_1\,\Phi_1 + \gamma_2\,\Phi_2|^{1/2}\,dz$$

erhalten wir aus (43a) und (43b):

$$(45)\qquad 4\,\mathrm{tg}\,\eta_1 = \mathrm{cotg}\,\eta_2 \cdot e^{-2\beta_2},$$

und aus (42a):

$$(46)\quad \mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \eta_1\right) = \mathrm{cotg}\left(\beta_1 - \frac{\pi}{4} + \eta_2\right),\ \text{oder}\ (n + \tfrac{1}{2})\,\pi - \eta_1 = \beta_1 + \eta_2,$$

wo $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$.

Indem wir (43a) durch (42b) dividieren, ergibt sich:

$$\frac{\sigma \sin\eta_1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \eta_1\right)} = \frac{\cos\eta_2 \cdot e^{-\beta_2}}{2\cos\left(\eta_2 + \beta_1 - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

In diese Gleichung führen wir für $\sin\eta_1$ links den aus (45) folgenden Wert ein, machen darauf von (46) Gebrauch und finden:

$$(47)\qquad \sigma = 2\,e^{\beta_2} \cdot \frac{\cos(\eta_1 + \beta_1)}{\cos\eta_1} = 2\,e^{\beta_2}\,(\cos\beta_1 - \mathrm{tg}\,\eta_1 \sin\beta_1).$$

Wenn wir (43b) durch (42b) dividieren, entsteht:

$$\frac{\sigma \cos\eta_1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \eta_1\right)} = \frac{\sin\eta_2 \cdot e^{\beta_2}}{\cos\left(\beta_1 - \frac{\pi}{4} + \eta_2\right)}.$$

Für $\sin\eta_2$ führen wir den aus (45) folgenden Wert ein und machen wieder von (46) Gebrauch:

$$(48)\qquad \frac{1}{\sigma} = 2\,e^{\beta_2} \cdot \frac{\cos(\eta_2 + \beta_1)}{\cos\eta_2} = 2\,e^{\beta_2}\,(\cos\beta_1 - \mathrm{tg}\,\eta_2 \cdot \sin\beta_1).$$

Man kann mit Hilfe von (46) leicht beweisen, daß (47) und (48) identisch sind.

Die Gleichung (45) lehrt unter der Voraussetzung $\beta_2 \gg 1$, daß entweder η_1 oder η_2 oder beide Winkel fast gleich einem ganzen Vielfachen von π sein müssen. Die zwei erstgenannten Fälle führen zu zwei σ-Werten, deren Produkt gleich 1 ist. Dies steht mit der Gleichung (15) im Einklang, da beide σ-Werte zum gleichen Wertesatz λ, γ_1, γ_2 gehören. Wir wollen die entsprechende Rechnung jetzt ausführen. Aus (45) und (46) ergibt sich für:

$$\eta_1 = n_1 \pi + \varepsilon_1, \text{ wo } |\varepsilon_1| \ll 1, \; n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \tag{49}$$

$$4\,\varepsilon_1 = e^{-2\beta_2} \operatorname{tg}(\beta_1 + \varepsilon_1). \tag{50}$$

Weiter ergeben (45) und (46) für:

$$\eta_2 = n_2 \pi + \varepsilon_2, \text{ wo } |\varepsilon_2| \ll 1, \; n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \tag{51}$$

$$4\,\varepsilon_2 = e^{-2\beta_2} \operatorname{tg}(\beta_1 + \varepsilon_2). \tag{52}$$

Folglich kann $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ gesetzt werden und wir erhalten:

$$\varepsilon^2 - \varepsilon \operatorname{cotg} \beta_1 \cdot \left(1 - \frac{e^{-2\beta_2}}{4}\right) + \frac{e^{-2\beta_2}}{4} = 0.$$

Da voraussetzungsgemäß $e^{-2\beta_2} \ll 1$, entsteht:

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{cotg} \beta_1}{2} \pm \frac{1}{2}\left(\operatorname{cotg}^2 \beta_1 - e^{-2\beta_2}\right)^{1/2}.$$

Diese Gleichungen betrachten wir für zwei Fälle: $\operatorname{cotg}^2 \beta_1 \gg e^{-2\beta_2}$ und $\operatorname{cotg}^2 \beta_1$ von gleicher Größenordnung wie $\exp(-2\beta_2)$. Im ersten Fall gilt das untere Zeichen des Wurzelausdrucks, weil $|\varepsilon| \ll 1$ und somit:

$$\varepsilon \approx \frac{1}{4} \frac{e^{-2\beta_2}}{\operatorname{cotg} \beta_1}.$$

Wir können also in erster Näherung in diesem Fall ε und somit ε_1 sowie ε_2 in Gleichung (47) und (48) im Argument gegen β_1 vernachlässigen. Im zweiten Fall setzen wir: $\beta_1 = (r + \frac{1}{2})\pi - \delta$, wo $r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ und erhalten:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{2} \pm \frac{1}{2}\left(\delta^2 - e^{-2\beta_2}\right)^{1/2}.$$

Offenbar ist ε hier reell oder komplex, je nachdem die Diskriminante positiv oder negativ ist. Ein Sonderfall tritt auf, wenn die Diskriminante verschwindet. Dann ist $\delta = 2\,\varepsilon = \pm \exp(-\beta_2)$ und liegt somit der bereits oben erwähnte Fall vor, daß gleichzeitig gilt:

$$\eta_1 = n_1 \pi + \varepsilon_1 \quad \text{und} \quad \eta_2 = n_2 \pi + \varepsilon_2.$$

In diesem Sonderfall ergeben (47) und (48) $\sigma = \pm 1$. Da β_1 und β_2 stets reell sind, wird σ reell oder komplex, je nachdem ε reell oder komplex ist. In letzterem Fall ist $|\sigma| = 1$ und gelten obige gleichzeitige Gleichungen.

§ 15.

Hilfssätze.

Wir wollen unter der Voraussetzung, daß $\Phi_1(z)$ und $\Phi_2(z)$ *beschränkt* sind, zunächst angeben, für welche Werte von λ, γ_1 und γ_2 die Bedingung $\beta_2 \geqslant 1$ erfüllt sein kann. Diese Bedingung hält ein, daß $\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2$ in einem Teil des Bereichs $z_0 \leqq z \leqq z_1$ negativ mit einem Betrag $\geqslant \zeta^{-2}$ ist. Da Φ_1 und Φ_2 *beschränkt* sind, ist es bei Werten $|\lambda|\zeta^2$ vergleichbar mit 1 notwendig, daß $\zeta^2(|\gamma_1| + |\gamma_2|) \geqslant 1$. Falls $\gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2$ im genannten Bereich das Vorzeichen nicht wechselt und $|\gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2|$ über einer endlichen Grenze Φ_0 bleibt, kann für $|\lambda|\zeta^2$ vergleichbar mit 1 und $\zeta^2(|\gamma_1| + |\gamma_2|) \geqslant 1$ keine Nullstelle des Ausdrucks $\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2$ auftreten. In diesem Fall kann somit $\beta_2 \geqslant 1$ nur für $|\lambda|\zeta^2 \geqslant 1$ bei $\zeta^2(|\gamma_1| + |\gamma_2|) \geqslant 1$ erfüllt sein.

Wenn dagegen $\gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2$ im genannten z-Bereich das Vorzeichen wechselt, können offenbar auch für $|\lambda|\zeta^2$ vergleichbar mit 1 und $(|\gamma_1| + |\gamma_2|)\zeta^2 \geqslant 1$ Nullstellen im Grundbereich auftreten.

Wie ändern sich β_1 und β_2 bei Änderungen der Parameter λ, γ_1 und γ_2? Zur Beantwortung dieser Frage bilden wir die Differentialquotienten von β_1 und β_2 nach λ, γ_1 und nach γ_2:

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial\lambda} = \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a_2} \frac{dz}{(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}}; \quad \frac{\partial\beta_2}{\partial\lambda} = -\frac{1}{2}\int_{a_2}^{a_3} \frac{dz}{|\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2|^{1/2}}.$$

Die Integranden dieser Ausdrücke sind definitionsgemäß positiv. Somit ändern sich β_1 und β_2 bei wachsendem λ *monoton*. Weiter gilt

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial\gamma_1} = \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a_2} \frac{\Phi_1\,dz}{(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}}; \quad \frac{\partial\beta_2}{\partial\gamma_1} = -\frac{1}{2}\int_{a_2}^{a_3} \frac{\Phi_1\,dz}{|\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2|^{1/2}}.$$

Die entsprechenden Ausdrücke mit Φ_2 im Zähler der Integranden an Stelle von Φ_1 ergeben sich für $\partial\beta_1/\partial\gamma_2$ und $\partial\beta_2/\partial\gamma_2$. Wir setzen $\gamma_1 = \mu_1\gamma$ und $\gamma_2 = \mu_2\gamma$. Somit wird:

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial\gamma} = \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a_2} \frac{\mu_1\Phi_1+\mu_2\Phi_2}{(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}}dz; \quad \frac{\partial\beta_2}{\partial\gamma} = \frac{1}{2}\int_{a_2}^{a_3} -\frac{\mu_1\Phi_1+\mu_2\Phi_2}{|\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2|^{1/2}}dz.$$

Diese Integranden ändern bei wachsendem γ fast im ganzen Integrationsbereich ihr Vorzeichen nicht, falls $|\gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2| \geqslant \lambda$. Somit sind β_1 und β_2 monotone Funktionen von γ, und zwar ändern sie sich bei wachsendem γ in positivem Sinne, wenn der betreffende Integrand positiv ist und in negativem Sinne, wenn der Integrand negativ ist.

Wie müssen $\Phi_1(z)$ und $\Phi_2(z)$ beschaffen sein, damit für die obengenannten Werte von γ_1, γ_2 und λ stets zwei und nur zwei Nullstellen im Grundbereich vorhanden sind? Hierfür gilt die Bedingung, daß die Funktion $\gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2$ bei wachsendem z *monoton* von einem kleinsten zu einem größten Wert steigen und dann wieder auf den kleinsten Wert monoton herabsinken muß. Diese Bedingung ist z. B. erfüllt, falls Φ_1 und Φ_2 die gleiche Grundperiode aufweisen und je für sich bei wachsendem z monoton von einem kleinsten bis zu einem höchsten Wert steigen und dann wieder auf den kleinsten Wert monoton herabsinken, während die Kleinst- und Höchstwerte zum gleichen z gehören.

§ 16.

Asymptotische Lage der Eigenwertflächen.

Aus den Betrachtungen in § 14 kann geschlossen werden, daß die Gleichungen (47) und (48) in der Form:

(47 a) $$\sigma_1 = 2\, e^{\beta_2} \cos(\beta_1 + \varepsilon)$$

bzw.

(48 a) $$\frac{1}{\sigma_2} = 2\, e^{\beta_2} \cos(\beta_1 + \varepsilon)$$

geschrieben werden können, je nachdem η_1 bzw. η_2 nahezu gleich einem ganzen Vielfachen von π ist. Für $|\delta| \leqq \exp(-\beta_2)$ kann hieraus abgeleitet werden:

(53) $$f = \sigma_1 + \frac{1}{\sigma_1} = \sigma_1 + \sigma_2 = (-1)^r\, 2\, \delta\, e^{\beta_2},$$

wo f die gleiche Bedeutung hat wie in § 10.

Da β_1 und β_2 von gleicher Größenordnung sind, wird die Änderung von f bei Änderung von λ bzw. γ wegen $\delta = (r + \frac{1}{2})\pi - \beta_1$ überwiegend durch den Exponentialfaktor bestimmt. Somit ist f nach § 15 im betrachteten Bereich der Gleichung (53) eine monotone Funktion von λ und von γ, da β_2 eine monotone Funktion dieser Größen ist. Weiter wechselt f bei gleichem δ das Vorzeichen, wenn r sich um 1 ändert. Hieraus geht hervor, daß f asymptotisch entlang jeder Geraden parallel zur λ-Achse sowie entlang jeder Geraden, welche die λ-Achse senkrecht schneidet, im wesentlichen in gleicher Weise verläuft wie in § 10 nach H. A. Kramers und O. Haupt entlang Parallelen zur λ-Achse allgemein gezeigt: Auf zwei halbperiodische Eigenwerte folgen stets zwei ganzperiodische, zwischen ungleichnamigen periodischen Eigenwerten ist σ komplex und $|\sigma| = 1$, zwischen gleichnamigen periodischen Eigenwerten ist σ reell und $|\sigma| \gtrless 1$. Allgemein gilt dieser Verlauf asymptotisch entlang *jeder* Geraden durch die λ-Achse des γ_1-, γ_2-, λ-Raumes. Dies folgt aus der asymptotischen Krümmung der Eigenwertflächen, die wir in § 17 behandeln.

Wenn wir die benachbarten δ-Werte, für welche f nach (53) gleich ± 2 wird, mit δ_1 und δ_2 bezeichnen, so ist:

$$|\delta_1 - \delta_2| = 2\, e^{-\beta_2}, \tag{54}$$

und da β_2 von der Größenordnung $\zeta(\sqrt{|\lambda|} + \sqrt{|\gamma_1|} + \sqrt{|\gamma_2|})$ ist, liegen diese beiden δ-Werte nahe zusammen. Wir lassen nun γ_1 und γ_2 konstant und bezeichnen die λ-Werte, welche zu δ_1 und δ_2 gehören, bzw. mit λ_1 und λ_2. Dann wird, da β_1 von gleicher Größenordnung wie β_2 ist, die Größe $|\lambda_1 - \lambda_2| = \Delta\lambda$ höchstens von der Größenordnung:

$$\zeta(\sqrt{|\lambda|} + \sqrt{|\gamma_1|} + \sqrt{|\gamma_2|})\, \exp\{-\zeta(\sqrt{|\lambda|} + \sqrt{|\gamma_1|} + \sqrt{|\gamma_2|})\}.$$

Somit liegen auch die beiden genannten λ-Werte sehr nahe zusammen. In analoger Weise kann man schließen, daß bei konstantem λ und veränderlichem γ die Größe $\Delta\gamma$, welche in diesen Fällen der obigen Größe $\Delta\lambda$ entspricht, von gleicher Größenordnung wird wie oben $\Delta\lambda$. Je *zwei ungleichnamige periodische Eigenwertflächen liegen asymptotisch somit nahe zusammen.* Das gleiche gilt offenbar von allen zwischenliegenden Eigenwertflächen zu komplexen σ-Werten. Beispiele für diese asymptotische Lage liefern die Mathieusche Gleichung (Ergebn. d. Math. 1, H. 3, S. 24) sowie verwandte Gleichungen (ebenda, S. 40).

Wenn wir im Ausdruck $\lambda + \gamma_1 \Phi_1(z) + \gamma_2 \Phi_2(z)$ die Parameter γ_1 und γ_2 konstant halten und λ *abnehmen* lassen, wird β_2 größer und rücken demnach die obengenannten Eigenwertflächen *näher* zusammen.

Die obige asymptotische Lage der Eigenwerte wurde bereits früher[13]) angegeben. Die dortige Rechnung berücksichtigte die Stokessche Erscheinung nicht und führte deshalb zu Formeln, welche von den obigen abweichen.

Wir wollen den Verlauf von f entlang Geraden im λ-, γ_1-, γ_2-Raum noch etwas genauer verfolgen. Wie in § 10 führen wir die beiden Winkel φ_1 und φ_2 ein, welche eine solche Gerade durch den Punkt Λ_0, Γ_1, Γ_2 des Parameterraumes festlegen. Wir unterscheiden Geraden 1. Art, welche Winkel φ_1 und φ_2 bilden, derart, daß für alle z gilt: $1 + \Phi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2 \geqq 0$ und Geraden 2. Art, für welche in gewissen z-Bereichen gilt: $1 + \Phi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_1 + + \Phi_2 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2 < 0$. Entlang Geraden der 1. Art haben wir bereits in § 10 allgemein den Verlauf von f bestimmt. Es handelt sich hier somit darum, diesem Verlauf entlang Geraden der 2. Art nachzugehen. In Gleichung (26) ist im letzten Summanden w mit $\lambda(1 + \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2)$ multipliziert. Dieser Faktor nimmt, wenn $|\lambda|$ über alle Grenzen wächst, entlang den genannten Geraden 2. Art voraussetzungsgemäß positive und negative Werte an, welche ebenfalls über alle Grenzen wachsen. Im Falle zweier Null-

[13]) M. J. O. Strutt, Math. Ann. 101 (1929), S. 559—569.

stellen im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ können wir aus den obigen asymptotischen Formeln schließen, daß f entlang solchen Geraden positive und negative Werte annimmt, welche ebenfalls über alle Grenzen wachsen, und zwar sowohl für $\lambda \to -\infty$ als für $\lambda \to +\infty$.

Diese Überlegungen führen zum Schluß: *Entlang Geraden der 1. Art gibt es zu jedem reellen σ, dessen Modul größer oder kleiner als 1 ist, nur eine endliche Anzahl von Eigenwerten. Auf Geraden der 2. Art gibt es zu jedem reellen σ mit $|\sigma| \gtrless 1$ eine abzählbar unendliche Anzahl von Eigenwerten mit positiven λ-Werten und eine ebensolche Zahl mit negativen λ-Werten.* Wenn als Ausnahmefall φ_1 oder φ_2 (oder beide Winkel gleichzeitig) gleich einem ungeraden Vielfachen von $\pi/2$ ist, ändert sich letzter Satz für Geraden 2. Art wie folgt: *Wenn wir $\gamma_1 = \mu_1 \gamma$ und $\gamma_2 = \mu_2 \gamma$ setzen, gibt es im Falle φ_1 oder φ_2 (oder beide Winkel zugleich) gleich einem ungeraden Vielfachen von $\pi/2$ eine abzählbar unendliche Anzahl positiver und eine ebensolche Zahl negativer γ-Eigenwerte zu jedem reellen σ-Wert, dessen Modul größer oder kleiner als 1 ist.* Zu jedem reellen oder komplexen σ-Wert mit $|\sigma| = 1$ gibt es entlang Geraden der 1. sowie der 2. Art eine abzählbar unendliche Zahl von Eigenwerten. Entlang Geraden der 1. Art gehören hierzu, bis auf eine endliche Zahl negativer Werte, nur positive λ-Werte. Entlang Geraden der 2. Art gehören hierzu abzählbar unendlich viele negative sowie eine ebensolche Zahl positiver Eigenwerte λ. Im obengenannten Ausnahmefall gibt es entlang Geraden 2. Art eine abzählbar unendliche Zahl negativer sowie eine ebensolche Zahl positiver Eigenwerte γ, wo $\gamma_1 = \mu_1 \gamma$ und $\gamma_2 = \mu_2 \gamma$ ist, zu allen σ-Werten mit $|\sigma| = 1$.

Wir können die Lage der obengenannten Eigenwerte asymptotisch, d. h. für $|\lambda| \to \infty$ (bzw. im Ausnahmefall $|\gamma| \to \infty$) an Hand obiger Formeln noch genauer verfolgen. Aus Gleichung (47a) und (48a) folgt:

$$\beta_1 + \varepsilon = \arccos\left(\frac{\sigma_1}{2}\, e^{-\beta_2}\right), \quad \text{bzw.} \quad = \arccos\left(\frac{e^{-\beta_2}}{2\,\sigma_2}\right).$$

Asymptotisch für $\beta_2 \to \infty$ wird somit:

$$\beta_1 + \varepsilon = (r + \tfrac{1}{2})\,\pi + q, \quad \text{wo } r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

und:

$$\lim_{\beta_2 \to \infty} |q| \to 0.$$

Wegen der asymptotischen Bedeutung von β_1 für $(|\lambda| + |\gamma_1| + |\gamma_2|)\,\zeta^2 \to \infty$:

$$\lim \beta_1 \to |\lambda|^{1/2} \int_{a_1}^{a_2} (1 + \Phi_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg} \varphi_2)^{1/2}\, dz$$

im Falle $\varphi_1 \neq (n_1 + \tfrac{1}{2})\,\pi$ und $\varphi_2 \neq (n_2 + \tfrac{1}{2})\,\pi$, wo $n_1, n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ und:

$$\lim \beta_1 \to |\gamma|^{1/2} \int_{a_1}^{a_2} (\Phi_1 \cdot \mu_1 + \Phi_2 \cdot \mu_2)^{1/2}\, dz$$

im Falle $\varphi_1 = (n_1 + \frac{1}{2})\pi$ oder $\varphi_2 = (n_2 + \frac{1}{2})\pi$ (oder beides zugleich) ergibt sich unter Berücksichtigung der Beziehung $\lim \varepsilon \to 0$ für die zwei genannten Fälle bei $|\sigma| = 1$ und $|\sigma| \approx 1$:

$$|\lambda| \approx \frac{(r + {}^1/_2)^2 \pi^2}{\zeta^2 I_1^2}, \quad \text{bzw.:} \quad |\gamma| \approx \frac{(r + {}^1/_2)^2 \pi^2}{\zeta^2 I_2^2},$$

wo:

$$I_1 \zeta = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (1 + \Phi_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg} \varphi_2)^{1/2}\, dz; \quad I_2 \zeta = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2)^{1/2}\, dz.$$

Für reelle σ-Werte und $|\sigma| \gtrless 1$ erhält man:

$$|\lambda| \approx \frac{(2r\pi \pm a)^2}{\zeta^2 I_1^2}, \quad \text{bzw.} \quad |\gamma| \approx \frac{(2r\pi \pm a)^2}{\zeta^2 I_2^2},$$

wo:

$$a = \arccos\left(\frac{\sigma}{2} e^{-\beta_2}\right), \quad \text{oder} \quad = \arccos\left(\frac{e^{-\beta_2}}{2\sigma}\right).$$

Vom Arcus ist z. B. der Hauptwert zu wählen.

Endlich bemerken wir, daß für negative reelle σ-Werte, deren Modul einen bestimmten Wert übersteigt, der Punkt Λ_0, Γ_1, Γ_2, durch den die betrachtete Gerade hindurchgeht, so gewählt werden kann, daß entlang Geraden 1. Art bei geeignet gewählten Winkeln φ_1 und φ_2 *kein einziger* reeller Eigenwert auftritt, wie aus den in § 2 angegebenen Eigenwertschranken folgt (Fig. 1d

§ 17.

Asymptotischer Verlauf der Eigenwertflächen.

Wir wollen asymptotisch entlang den Eigenwertkurven die Differentialquotienten $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ berechnen. Hierzu gehen wir von einer der Gleichungen (47a) oder (48a) aus:

$$\sigma = 2 e^{\beta_2} \cos(\beta_1 + \varepsilon)$$

und betrachten zunächst den Fall, daß $\sigma = \pm 1$, also

$$\beta_1 = (r + \tfrac{1}{2})\pi \pm e^{-\beta_2}; \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Hieraus ergibt sich:

$$(55) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial\gamma_1} \approx -\dfrac{\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\Phi_1\, dz}{(\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2)^{1/2}}}{\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dz}{(\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2)^{1/2}}} \pm e^{-\beta_2} \cdot \dfrac{\displaystyle\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{\Phi_1\, dz}{|\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2|^{1/2}}}{\displaystyle\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{dz}{|\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2|^{1/2}}}; \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial\gamma_2} \approx -\dfrac{\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\Phi_2\, dz}{(\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2)^{1/2}}}{\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dz}{(\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2)^{1/2}}} \pm e^{-\beta_2} \cdot \dfrac{\displaystyle\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{\Phi_2\, dz}{|\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2|^{1/2}}}{\displaystyle\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{dz}{|\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2|^{1/2}}}. \end{cases}$$

Das 2. Glied rechts kann jeweils unter der Voraussetzung $\beta_2 \gg 1$ gegen das 1. vernachlässigt werden.

Im Falle negativer λ-Werte ist $\gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2$ im Bereich $\alpha_1 < z < \alpha_2$ überall positiv und wird nach (55):

$$\gamma_1 \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} + \gamma_2 \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_2} < 0.$$

Dieser Schluß gilt auch für λ positiv und $\lambda \ll |\gamma_1 + \gamma_2| \gg \zeta^{-2}$. Asymptotisch gilt somit dieser in § 12 für die Flächen zu den *kleinsten* λ-Eigenwerten hergeleitete Verlauf allgemein für *alle* periodischen Eigenwertflächen.

Für komplexe σ gilt:

$$\beta_1 = (r + \tfrac{1}{2})\,\pi \pm \mu\, e^{-\beta_2},$$

wo μ eine positive Größe < 1 darstellt. Die Gleichung (55), in der das 2. Glied fortgelassen werden kann, gilt somit asymptotisch auch für diese Eigenwertflächen und die obige Schlußfolgerung $\gamma_1 \cdot \partial\lambda/\partial\gamma_1 + \gamma_2 \cdot \partial\lambda/\partial\gamma_2 < 0$ ebenfalls im gleichen Umfang.

Für reelle Werte von σ, für die, falls $|\sigma| > 1$ ist, gilt: $|\sigma| \ll \exp(\beta_2)$ und falls $|\sigma| < 1$ gilt: $|\sigma| \gg \exp(-\beta_2)$, für welche also $|\sigma|$ von der Größenordnung 1 ist, können die Eigenwertflächen wieder aus der letzten Gleichung berechnet werden, wenn $\mu > 1$ angenommen wird, wie aus Gleichung (47a) und (48a) hervorgeht. Für diese Eigenwertflächen gilt offenbar die obige Folgerung $\gamma_1 \cdot \partial\lambda/\partial\gamma_1 + \gamma_2 \cdot \partial\lambda/\partial\gamma_2 < 0$ auch im gleichen Umfang.

Wenn für alle λ- und γ-Werte, welche in § 15 behandelt wurden, die Funktion $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2$ stets 2 und nur 2 Nullstellen hat, können aus Gleichung (55) noch weitere Schlüsse gezogen werden.

Wir setzen $\gamma_1 = \mu_1 \gamma$, $\gamma_2 = \mu_2 \gamma$ und γ positiv. Die Funktion $\mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2$ von z soll bei wachsendem z monoton von einem kleinsten (negativen) bis zu einem größten (positiven) Wert ansteigen und wieder auf den kleinsten Wert herabsinken. Der größte Wert sei $\Phi_{\max}$. Dann wird für $\lambda \to -\infty$ und γ positiv nach Gleichung (55): $\partial\lambda/\partial\gamma \to -\Phi_{\max}$. Bei monotoner Abnahme von λ nimmt $|\partial\gamma/\partial\lambda|$ ebenfalls monoton ab. Wir können schließen, daß asymptotisch $\partial^2\lambda/\partial\gamma^2$ für die Eigenwertflächen *negativ* ist und haben somit den Sinn der asymptotischen *Krümmung* dieser Flächen bestimmt, sofern σ komplex oder exakt oder nahezu gleich $+1$ oder -1 ist. Für $\lambda \to -\infty$ wird $|\partial^2\lambda/\partial\gamma^2| \to 0$.

Die periodischen Eigenwertflächen nähern sich für $\lambda \to -\infty$ den Eigenwertflächen, für welche $\delta = 0$ und somit $\beta = (r + \tfrac{1}{2})\,\pi$ ist. Für diese Flächen gilt $\sigma = \pm i$ und die entsprechenden Eigenfunktionen haben demnach die

Periode 4ζ. Wir können schließen, daß sich die halb- und die ganzperiodischen Eigenfunktionen asymptotisch für $\lambda \to -\infty$ diesen Eigenfunktionen mit der Periode 4ζ nähern. Die entsprechende Tatsache wurde von E. L. INCE[14]) bei der MATHIEUschen Gleichung angegeben.

Durch die oben angegebene asymptotische Krümmung der Eigenwertflächen kann eine Berührungsgerade einer Fläche, welche die λ-Achse schneidet, dieselbe Fläche asymptotisch in keinem weiteren Punkt treffen. Hieraus folgt die allgemeine Gültigkeit der in § 16 angegebenen Lagenordnung für *jede* Gerade dieser Art im betrachteten asymptotischen Bereich.

§ 18.

Eigenwertformeln für $2n$ Nullstellen.

Wir setzen jetzt voraus, die Funktion $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2$ habe im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ insgesamt $2n$ Nullstellen: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n}$; und es sei $\alpha_{2n+1} = \alpha_1 + \zeta$. Weiter soll sie im Bereich $\alpha_1 \leqq z \leqq \alpha_2$ positiv sein, im Bereich $\alpha_2 \leqq z \leqq \alpha_3$ negativ, im Bereich $\alpha_3 \leqq z \leqq \alpha_4$ positiv usw. In diesen Bereichen gelten dann asymptotisch die Lösungen (39), (40), (41) usw. und sie enthalten insgesamt $4n$ Konstanten: $A_1, A_2 \ldots A_{2n}, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{2n}$. Zur Berechnung dieser $4n$ Größen sowie des Parameters λ, wenn γ_1 und γ_2 sowie σ gegeben sind, liefern uns die Stetigkeits- und Randbedingungen insgesamt $4n$ Gleichungen, während die noch fehlende letzte Gleichung sich aus der Normierung der betreffenden Eigenfunktion ergibt.

Wir schreiben die zuerstgenannten $4n$ Gleichungen an und benutzen die Abkürzungen:

$$\beta_{kl} = \int_{\alpha_k}^{\alpha_l} |\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/2}\, dz, \qquad \begin{matrix} k = 1, 2, \ldots 2n, \\ l = 2, 3, \ldots 2n+1. \end{matrix}$$

Analog zu den Gleichungen (42a) und (42b) erhalten wir:

$$(56) \quad \begin{cases} \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \eta_1\right) = \operatorname{cotg}\left(\beta_{12} - \frac{\pi}{4} + \eta_2\right); \\ \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \eta_3\right) = \operatorname{cotg}\left(\beta_{34} - \frac{\pi}{4} + \eta_4\right); \\ A_1 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \eta_1\right) = A_2 \cos\left(\beta_{12} - \frac{\pi}{4} + \eta_2\right); \\ A_3 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \eta_3\right) = A_4 \cos\left(\beta_{34} - \frac{\pi}{4} + \eta_4\right), \text{ usw.} \end{cases}$$

[14]) E. L. INCE. Proc. Roy. Soc. Edinburgh **46** (1925/26), S. 20–29, 316–322; **47** (1927), S. 294–301.

und analog zu (43a) und (43b):

$$(57)\quad \begin{cases} A_2 \sin \eta_2 \cdot e^{\beta_{23}} = \dfrac{A_3}{2} \cos \eta_3; \\ A_4 \sin \eta_4 \cdot e^{\beta_{45}} = \dfrac{A_5}{2} \cos \eta_5; \\ \dfrac{A_2}{2} \cos \eta_2 \cdot e^{-\beta_{23}} = A_3 \sin \eta_3; \\ \dfrac{A_4}{2} \cos \eta_4 \cdot e^{-\beta_{45}} = A_5 \sin \eta_5, \text{ usw.} \end{cases}$$

Die letzten dieser Gleichungen lauten:

$$(57a)\quad \begin{cases} A_{2n} \sin \eta_{2n} \cdot e^{\beta_{2n,\,2n+1}} = \sigma \dfrac{A_1}{2} \cos \eta_1; \\ \dfrac{A_{2n}}{2} \cos \eta_{2n} \cdot e^{-\beta_{2n,\,2n+1}} = \sigma A_1 \sin \eta_1. \end{cases}$$

Aus (57) ergibt sich:

$$(58)\quad 4 \operatorname{tg} \eta_3 = e^{-2\beta_{23}} \operatorname{cotg} \eta_2; \quad 4 \operatorname{tg} \eta_5 = e^{-2\beta_{45}} \operatorname{cotg} \eta_4, \text{ usw.},$$

und schließlich aus (57a):

$$(58a)\quad 4 \operatorname{tg} \eta_1 = e^{-2\beta_{2n,\,2n+1}} \cdot \operatorname{cotg} \eta_{2n},$$

während aus (56) hervorgeht:

$$(59)\quad (n_1 + \tfrac{1}{2})\pi - \eta_1 = \beta_{12} + \eta_2; \quad (n_3 + \tfrac{1}{2})\pi - \eta_3 = \beta_{34} + \eta_4, \text{ usw.},$$

wo:

$$n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \quad n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \text{ usw.}$$

Wir dividieren die erste Gleichung (57a) durch die dritte Gleichung (56) und erhalten:

$$\frac{\sigma \cos \eta_1}{2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \eta_1\right)} = \frac{A_{2n} \sin \eta_{2n} \cdot e^{\beta_{2n,\,2n+1}}}{A_2 \cos\left(\beta_{12} - \frac{\pi}{4} + \eta_2\right)}.$$

Mit Hilfe der 1. Gleichung (57) drücken wir A_2 durch A_3 aus, darauf mit Hilfe der 4. Gleichung (56) A_3 durch A_4 usw. Unter Berücksichtigung von (59) entsteht:

$$(60)\quad \sigma = 2^n \cdot e^{\beta_{23} + \beta_{45} + \cdots \beta_{2n,\,2n+1}} \cdot \frac{\cos(\eta_1 + \beta_{12})}{\cos \eta_1} \cdot \frac{\cos(\eta_3 + \beta_{34})}{\cos \eta_3} \cdots \frac{\cos(\eta_{2n-1} + \beta_{2n-1,\,2n})}{\cos \eta_{2n-1}}.$$

In analoger Weise ergibt sich:

$$(61)\quad \frac{1}{\sigma} = 2^n \cdot e^{\beta_{23} + \beta_{45} + \cdots \beta_{2n,\,2n+1}} \cdot \frac{\cos(\eta_2 + \beta_{12})}{\cos \eta_2} \cdot \frac{\cos(\eta_4 + \beta_{34})}{\cos \eta_4} \cdots \frac{\cos(\eta_{2n} + \beta_{2n-1,\,2n})}{\cos \eta_{2n}}.$$

Man kann leicht zeigen, daß (61) und (60), welche den Gleichungen (48) und (47) entsprechen, identisch sind.

Aus (58) und (58a) kann geschlossen werden, daß entweder η_2 oder η_3 oder beide, entweder η_4 oder η_5 oder beide, ... entweder η_{2n} oder η_1 oder beide nahezu gleich einem ganzen Vielfachen von π sein müssen, falls wir voraussetzen:

$$\beta_{23} \gg 1; \quad \beta_{45} \gg 1; \ldots \beta_{2n,\,2n+1} \gg 1.$$

Unter dieser Voraussetzung lassen sich aus den Eigenwertformeln (60) und (61) für $2n$ Nullstellen analoge Folgerungen über die Eigenwertflächen ziehen, wie aus (47) und (48) für zwei Nullstellen.

§ 19.

Asymptotische Eigenwertflächen für $2n$ Nullstellen.

Wir wollen zeigen, daß sich für $|\sigma| \approx 1$ unter obengenannter Voraussetzung ergibt: $\beta_{12} = (r_1 + \frac{1}{2})\pi - \delta_1$, oder $\beta_{34} = (r_3 + \frac{1}{2})\pi - \delta_3, \ldots$ $\beta_{2n-1,\,2n} = (r_{2n-1} + \frac{1}{2})\pi - \delta_{2n-1}$, wo alle r positive oder negative ganze Zahlen darstellen, während alle $|\delta| \ll 1$ sind. Es können auch mehrere β-Werte gleichzeitig obigen Bedingungen genügen. Den Beweis führen wir für $n = 2$ aus. Für höhere n-Werte verläuft er ebenso.

Wir nehmen zunächst an, daß nicht gleichzeitig η_1 und η_4 sowie η_2 und η_3 nahezu gleich einem ganzen Vielfachen von π sind, sondern nur jeweils eine dieser Größen. Dann gibt es folgende Fälle: 1. η_1 und η_2, 2. η_1 und η_3, 3. η_2 und η_4, 4. η_3 und η_4 nahezu gleich einem ganzen Vielfachen von π. Im 1. Fall geht aus (59) hervor: $\beta_{12} = (r_1 + \frac{1}{2})\pi - \delta_1$. Im 2. Fall ergibt sich aus (60):

$$\sigma = 2^2 \cdot e^{\beta_{23} + \beta_{45}} (\cos \beta_{12} - \operatorname{tg} \eta_1 \cdot \sin \beta_{12})(\cos \beta_{34} - \operatorname{tg} \eta_3 \cdot \sin \beta_{34}),$$

oder:

$$\sigma \approx 2^2 \cdot e^{\beta_{23} + \beta_{45}} \cos \beta_{12} \cdot \cos \beta_{34}$$

und für $|\sigma| \approx 1$ müssen wegen $\beta_{23} \gg 1$ und $p_{45} \gg 1$ entweder β_{12} oder β_{34} oder beide nahezu gleich einem ungeraden Vielfachen von $\pi/2$ sein. Im 3. Fall können wir diese Schlußweise im Anschluß an (61) mit gleichem Ergebnis wiederholen. Im 4. Fall ergibt sich aus (59) unmittelbar: $\beta_{34} = (r_3 + \frac{1}{2})\pi - \delta_3$. Wenn η_1 und η_4 oder η_2 und η_3 gleichzeitig nahezu gleich einem ganzen Vielfachen von π sind, läßt sich die obige Schlußweise im wesentlichen ebenso durchführen.

Es ist also stets für $|\sigma| \approx 1$ eine der Größen $\beta_{12}, \beta_{34}, \ldots \beta_{2n-1,\,2n}$ nahezu gleich einem ungeraden Vielfachen von $\pi/2$. Die in § 15 angeführten Überlegungen lehren im vorliegenden Fall, daß sich diese Größen bei monotoner

Änderung von λ oder von γ ebenfalls monoton ändern. Eine Wiederholung der Schlußweise von § 16 ergibt sodann unmittelbar, daß auch im vorliegenden Fall asymptotisch je zwei ungleichnamige periodische Eigenwertflächen nahe zusammenliegen, falls nur *eine* der Größen $\beta_{12}, \beta_{34} \ldots$ gleich $(r + \frac{1}{2})\pi - \delta$ ist. Falls mehrere dieser Größen diese Eigenschaft aufweisen, können wir vom Hilfssatz Gebrauch machen, daß sie sich alle bei Änderung von λ oder γ in *gleichem* Sinne ändern. Hieraus folgt auch in diesem Falle die Gültigkeit des obigen asymptotischen Lagensatzes. Wenn λ abnimmt, rücken je zwei ungleichnamige benachbarte Eigenwertflächen näher zusammen.

Auch im vorliegenden Fall kann man das Analogon der Gleichung (55) aus dem angegebenen Wert einer der Größen $\beta_{12}, \beta_{34}, \ldots$ herleiten, wobei die Integrationsgrenzen, welche zum betreffenden β-Wert gehören, eingesetzt werden müssen. Für alle Eigenwertflächen, für welche $|\sigma| \approx 1$ gilt somit asymptotisch: $\gamma \cdot \partial\lambda/\partial\gamma < 0$ unter den gleichen Voraussetzungen wie bei zwei Nullstellen.

Wenn die Nullstellenzahl sich beim Ändern von λ, γ_1 und γ_2 im Sinne von § 15 nicht ändert, kann in analoger Weise wie in § 16 geschlossen werden, daß $\partial^2\lambda/\partial\gamma^2$ für die Eigenwertflächen mit $|\sigma| \approx 1$ asymptotisch negativ ist und für $\lambda \to -\infty$ wird: $|\partial^2\lambda/\partial\gamma^2| \to 0$.

Unter den genannten Voraussetzungen erhält man demnach bei $2n$ Nullstellen im wesentlichen den gleichen asymptotischen Flächenverlauf wie bei zwei Nullstellen.

Es kann der Fall eintreten, daß zwei einfache Nullstellen der Funktion $\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2$ zu einer doppelten Nullstelle zusammenfallen. In solchen Fällen und auch bei mehrfachen Nullstellen höherer Ordnung ergeben sich gegenüber den mitgeteilten keine wesentlich neuen Gesichtspunkte. Man kann sie dadurch behandeln, daß einige der obigen β-Werte gleich Null gesetzt werden.

IV. Erweiterung auf $m + 1$ Parameter.

§ 20.

Schranken für die Eigenwerte bei $m + 1$ Parametern.

An Stelle der Gleichung (1) betrachten wir jetzt die Gleichung:

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \lambda w + \{\gamma_1\Phi_1(z) + \gamma_2\Phi_2(z) + \cdots + \gamma_m\Phi_m(z)\}w = 0, \tag{62}$$

wo $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_m$ reellwertige periodische Funktionen mit der gemeinsamen Grundperiode ζ darstellen, welche den Bedingungen für die Entwicklung in absolut und gleichmäßig konvergente Fourier-Reihen genügen. Die $m + 1$-Parameter $\lambda, \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_m$ sind reell, ebenso wie die unabhängige Veränder-

liche z. Wir suchen Lösungen dieser Gleichung (62), welche der Bedingung $w(z+\zeta) = \sigma\, w(z)$ für alle z, oder anders geschrieben:

$$(63) \qquad \begin{cases} w(z_0 + \zeta) = \sigma\, w(z_0); \\ w'(z_0 + \zeta) = \sigma\, w'(z_0), \end{cases}$$

wo Akzente Differentiation nach z bezeichnen, genügen. Bei gegebenen Werten von σ sowie von m der genannten $m+1$ Parameter suchen wir den $(m+1)$-ten Parameter so zu bestimmen, daß (63) und (62) erfüllt werden (verallgemeinerte Hillsche Aufgabe). Offenbar handelt es sich um eine Erweiterung der eingangs im Anschluß an Gleichung (1) und (2) gestellten Aufgabe, und wir werden versuchen, die bei letztgenannter Aufgabe erhaltenen Ergebnisse auf die vorliegende anzuwenden.

Hierzu betrachten wir die $m+1$ Parameter als rechtwinklige Koordinaten in einem $(m+1)$-dimensionalen euklidischen Raume. Die Gleichung (5) kann unmittelbar auf den vorliegenden Fall ausgedehnt werden und ergibt

$$(64) \qquad (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \cdots + \gamma_m^2)^{-1} \leqq \int_{z_0}^{z_1} \int_{z_0}^{z_1} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \cdots + \Phi_m^2)\, |G(z, \mathfrak{z})|^2\, dz\, d\mathfrak{z},$$

wo G die durch (4), (4a) oder (4b) dargestellte Funktion ist. Wenn ψ^2 den Höchstwert des ersten Faktors im Integranden bezeichnet, entsteht die Formel:

$$(64a) \qquad (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \cdots + \gamma_m^2)^{-1} \leqq \psi^2 \int_{z_0}^{z_1} \int_{z_0}^{z_1} |G(z, \mathfrak{z})|^2 dz\, d\mathfrak{z}.$$

Wir können demnach von jedem Punkt der λ-Achse aus eine m-dimensionale Kugeloberfläche im $(\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_m)$-Raum bestimmen, innerhalb derer für diesen λ-Wert keine γ-Eigenwerte liegen.

Als Anwendung betrachten wir die Hillsche Gleichung:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \lambda\, w + w\left(\gamma_1 \cos \frac{2\pi z}{\zeta} + \frac{\gamma_2}{2} \cos 2\, \frac{2\pi z}{\zeta} + \cdots\right) = 0.$$

Der Klammerausdruck stellt bei gleichmäßig beschränkten Größen γ_1, γ_2, $\gamma_3, \ldots$ die Fourier-Reihe einer der Dirichletschen Bedingung genügenden geraden Funktion von z dar. Hierbei wird ψ^2 nach (64a) gegeben durch:

$$\psi^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

und die Schranken für die Parameter gehen unmittelbar aus (64a) hervor. Die Reihe in den Klammern links konvergiert z. B., falls die periodische Funktion der Hillschen Gleichung eine stetige Ableitung 1. Ordnung und eine stückweise stetige Ableitung 2. Ordnung hat.

Die in § 3 angegebenen Maximum-Minimum-Eigenschaften der Eigenwerte können ebenfalls unmittelbar auf den vorliegenden Fall übertragen werden. Als Beispiel sei γ, wo $\gamma_1 = \mu_1 \gamma$, $\gamma_2 = \mu_2 \gamma \ldots \gamma_m = \mu_m \gamma$, zu be-

stimmen, während die $m + 1$-Größen $\lambda, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$ vorgegeben sind. Wir betrachten den Ausdruck (9) sowie:

$$N = \int_{z_0}^{z_1} (\mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2 + \cdots + \mu_m \Phi_m)\, w(z)\, w^*(z)\, dz \tag{65}$$

und die Nebenbedingungen:

$$\int_{z_0}^{z_1} (\mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2 + \cdots + \mu_m \Phi_m)\, w(z)\, F_k(z)\, dz = 0, \tag{66}$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots n - 1.$$

Für positive definite Werte M nach (9) ist der n-te positive Eigenwert γ der höchste Wert, den das Minimum von M annehmen kann, wenn wir die stetigen zweimal differenzierbaren adjungierten Funktionen w und w^*, welche den Randbedingungen (63) bzw. den hierzu adjungierten Randbedingungen sowie der Gleichung $N = 1$ [nach (65)] und den Nebenbedingungen (66) genügen, variieren und die stetigen Funktionen F_k verändern, bis das Maximum-Minimum von M erreicht wird.

Aus diesen und analogen Maximum-Minimum-Eigenschaften können auch im vorliegenden Fall mit $m + 1$ Parametern Schranken für dieselben hergeleitet werden. So z. B. *obere* Schranken für den jeweiligen Eigenwert mit dem kleinsten Betrag, welche zusammen mit den unteren Schranken nach (64) und (64a) diese Eigenwerte einschließen. Andererseits können wir die Eigenwerte der vorliegenden Aufgabe infolge ihrer Maximum-Minimum-Eigenschaften auch mit Eigenwerten anderer, einfach lösbarer Aufgaben vergleichen.

Als Beispiel hierzu wollen wir die Betrachtungen von § 4 auf den vorliegenden Fall erweitern. Wir gehen von der oben gegebenen Formulierung der Eigenwertaufgabe aus und suchen für gegebene Werte von $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$ sowie von λ für $\sigma = \pm 1$ Schranken für den n-ten Eigenwert γ. Es sei $g_{\max}$ der größte (positiv vorausgesetzte) und $g_{\min}$ der kleinste (negativ vorausgesetzte) Wert von $g = (\mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2 + \cdots + \mu_m \Phi_m)$. Die zu $g_{\max}$ an Stelle von g gehörenden Eigenwerte nennen wir $\Gamma^{\max}$, die zu $g_{\min}$ an Stelle von g gehörenden dagegen $\Gamma^{\min}$. Dann gelten auch im vorliegenden Fall die Gleichungen (13) sowie die Ungleichungen:

$$\text{für } M \text{ positiv definit: } \gamma_{+n} \geqq \Gamma^{\max}_{+n};\quad \gamma_{-n} \leqq \Gamma^{\min}_{-n};$$

$$\text{für } M \text{ negativ definit: } \gamma_{-n} \leqq \Gamma^{\max}_{-n};\quad \gamma_{+n} \geqq \Gamma^{\min}_{+n}.$$

Falls wir $g_{\max} = |g_{\min}|$ wählen, indem der kleinste der beiden absoluten Werte dem größten gleich gemacht wird, ist:

$$\Gamma^{\max}_{+n} = |\Gamma^{\min}_{-n}| = |\Gamma^{\max}_{-n}| = \Gamma^{\min}_{+n} = \Gamma$$

und:

$$|\gamma_{\pm n}| \geqq \Gamma.$$

§ 21.

Eigenwerthyperflächen.

Aus Gleichung (15) geht hervor, daß die Eigenwerte im vorliegenden Fall auf analytischen Hyperflächen liegen, welche je durch eine analytische Gleichung mit den $m+1$ Parametern als Veränderlichen bestimmt werden. Aus asymptotischen Betrachtungen (vgl. § 23) kann geschlossen werden, daß für jeden gegebenen σ-Wert abzählbar viele und zwar ∞^1 solcher Hyperflächen vorhanden sind. Die Überlegungen von § 5 führen auch im vorliegenden Fall zum Schluß, daß durch jeden Punkt $\lambda, \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_m$ des $(m+1)$-dimensionalen Raumes höchstens zwei verschiedene Eigenwerthyperflächen hindurchgehen können, und daß ein solcher zweifacher Eigenwert nur für $\sigma = +1$ oder $\sigma = -1$ auftreten kann. Weiter ergibt sich, daß λ eine ganze transzendente Funktion der Parameter $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$ für jene Eigenwertflächen ist, für die gilt: $|\sigma| = 1$ (vgl. unten). Hierdurch ist es ausgeschlossen, daß durch einen Punkt eine und dieselbe Eigenwerthyperfläche zweimal hindurchgeht.

Eine Wiederholung der Rechnung von § 7 für den vorliegenden Fall führt bei einem einfachen Eigenwert auf die Gleichungen:

$$(67)\qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} = -\frac{\int_{z_0}^{z_1} \Phi_1 w w^* dz}{\int_{z_0}^{z_1} w w^* dz}; \quad \cdots \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_m} = -\frac{\int_{z_0}^{z_1} \Phi_m w w^* dz}{\int_{z_0}^{z_1} w w^* dz}.$$

Bei einem zweifachen Eigenwert ergibt sich für jeden dieser Differentialquotienten eine der Gleichung (17a) analoge Gleichung, in der $\bar{\alpha}_{kl}$ die gleiche Bedeutung hat, aber $\bar{\beta}_{kl}$ durch:

$$\bar{\beta}_{kl} = \int_{z_0}^{z_1} \Phi_r w_k w_l dz; \quad r = 1, 2, \ldots m; \; k, l = 1, 2$$

gegeben ist. Die beiden Berührungshyperebenen werden durch die Gleichungen:

$$\lambda = \Lambda + \Delta_{11}(\gamma_1 - \Gamma_1) + \Delta_{21}(\gamma_2 - \Gamma_2) + \cdots + \Delta_{m1}(\gamma_m - \Gamma_m);$$
$$\lambda = \Lambda + \Delta_{12}(\gamma_1 - \Gamma_1) + \Delta_{22}(\gamma_2 - \Gamma_2) + \cdots + \Delta_{m2}(\gamma_m - \Gamma_m)$$

dargestellt, in denen der Eigenwert durch $\Lambda, \Gamma_1, \ldots \Gamma_m$ bestimmt ist, während $\Delta_{11}, \ldots \Delta_{m1}$ sowie $\Delta_{21}, \ldots \Delta_{m2}$ die Werte der Differentialquotienten $\partial\lambda/\partial\gamma_1, \ldots \partial\lambda/\partial\gamma_m$ im betreffenden Eigenwertpunkt bezeichnen, welche aus (17a) hervorgehen. Wie im Anschluß an (17a) erörtert, gehören auch hier jene Werte dieser Größen jeweils zu einer Berührungshyperebene, bei denen die aus (17a) hervorgehende Quadratwurzel das gleiche Vorzeichen hat.

In analoger Weise wie in § 8 gezeigt, ergibt sich aus den obigen Werten von $\partial\lambda/\partial\gamma_1$, $\partial\lambda/\partial\gamma_2$, $\ldots$ $\partial\lambda/\partial\gamma_m$, daß λ für jene Eigenwertflächen, welche

zu $|\sigma| = 1$ gehören, eine ganze transzendente Funktion von $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_m$ ist. Auch die weiteren Bemerkungen am Ende von § 8 können sinngemäß auf diesen Fall übertragen werden.

Die in § 9 durchgeführten Berechnungen ergeben im vorliegenden Fall unmittelbar Werte für $\partial^2\lambda/\partial\gamma_1^2$, $\partial^2\lambda/\partial\gamma_2^2$, $\ldots$ $\partial^2\lambda/\partial\gamma_1\,\partial\gamma_2$ usw., welche durch einfache Änderungen der Formeln (23), (24) und (25) angeschrieben werden können.

§ 22.

Lage und Verlauf der Eigenwerthyperflächen.

Im Anschluß an die Ausführungen in § 10 können wir die Lagenordnung der Eigenwerte nach O. Haupt und H. A. Kramers auf Geraden ausdehnen, welche als Schnitt der m Hyperebenen:

$$\gamma_1 - \Gamma_1 = (\lambda - \Lambda_0)\,\mathrm{tg}\,\varphi_1;$$
$$\gamma_2 - \Gamma_2 = (\lambda - \Lambda_0)\,\mathrm{tg}\,\varphi_2;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\gamma_m - \Gamma_m = (\lambda - \Lambda_0)\,\mathrm{tg}\,\varphi_m$$

durch den Punkt Λ_0, Γ_1, Γ_2, $\ldots$ Γ_m gehen. Die betreffenden Sätze: *Für* $\lambda \to -\infty$ *gilt*:

$$f \to + \exp\{\sqrt{|\lambda|}\cdot\int_{z_0}^{z_1}(1 + \Phi_1\,\mathrm{tg}\,\varphi_1 + \Phi_2\,\mathrm{tg}\,\varphi_2 + \cdots + \Phi_m\,\mathrm{tg}\,\varphi_m)^{1/2}\,dz\};$$

bei wachsendem λ *sinkt* f *bis zu einem kleinsten Wert herab und pendelt dann weiter jeweils zwischen einem Minimum und einem Maximum hin und her*; *für* $\partial f/\partial\lambda = 0$ *gilt*: $|f| \geqq 2$ *und* $f\cdot\partial^2 f/\partial\lambda^2 < 0$; gelten im Falle, daß $1 + \Phi_1\,\mathrm{tg}\,\varphi_1 + \cdots + \Phi_m\,\mathrm{tg}\,\varphi_m$ positiv ist.

In der Umgebung der λ-Achse stimmt der Verlauf der Eigenwerthyperflächen mit jenem der Eigenwertflächen nach § 11 überein und die dortigen Sätze können sinngemäß auf den vorliegenden Fall übertragen werden.

Der erste Satz von § 12 lautet hier: Alle Eigenwerthyperflächen für $|\sigma| = 1$ verlaufen für $-\infty < \lambda \leqq 0$ derart, daß $\gamma\cdot\partial\gamma/\partial\lambda < 0$ ist, wo $\gamma_1 = \mu_1\gamma$; $\gamma_2 = \mu_2\gamma$; $\ldots$ $\gamma_m = \mu_m\gamma$. Der im Anschluß an Gleichung (37) in § 12 bewiesene Minimalsatz für die Eigenwertflächen mit den jeweils kleinsten λ-Eigenwerten, für welche λ eine eindeutige Funktion von γ_1 und γ_2 ist, kann ebenfalls auf den Fall mehrerer Parameter γ übertragen werden. Für die entsprechenden Eigenwerthyperflächen gilt $\partial^2\lambda/\partial\gamma^2 < 0$, wo γ die oben angegebene Bedeutung hat. Dieser Satz kann auch aus den Differentialquotienten 2. Ordnung gefolgert werden, welche oben in § 21 für den Fall von m Parametern $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$ genannt wurden.

§ 23.

Asymptotischer Verlauf der Eigenwerthyperflächen.

Wir betrachten zuerst den Fall, daß die Funktion $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2 + \cdots + \gamma_m \Phi_m$ im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ genau *zwei* Nullstellen aufweist. Mit den Abkürzungen:

$$\beta_1 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \cdots + \gamma_m \Phi_m)^{1/2} dz;$$

$$\beta_2 = \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} |\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \cdots + \gamma_m \Phi_m|^{1/2} dz,$$

wo $\alpha_3 = \alpha_1 + \zeta$, während die obige Klammerfunktion im Bereich $\alpha_1 \leqq z \leqq \alpha_2$ positiv und im Bereich $\alpha_2 \leqq z \leqq \alpha_3$ negativ ist, ergeben sich die Eigenwertgleichungen (47) und (48). Die weiteren Betrachtungen von § 14 können sinngemäß übernommen werden. Falls wieder: $\gamma_1 = \mu_1 \gamma$; $\gamma_2 = \mu_2 \gamma$; $\ldots$ $\gamma_m = \mu_m \gamma$ gesetzt wird, kann geschlossen werden, daß β_1 und β_2 *monotone* Funktionen von λ und von γ sind. Bei veränderlichen Werten der Parameter sind stets zwei und nur zwei Nullstellen vorhanden, falls $\gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2 + \cdots + \gamma_m \Phi_m$ bei wachsendem z in der Periode ζ monoton von einem kleinsten bis zu einem höchsten und dann wieder bis zum kleinsten Wert verläuft. Die von O. Haupt und H. A. Kramers (vgl. § 22) angegebene Reihenfolge der Eigenwerte gilt asymptotisch entlang jeder Geraden durch die λ-Achse oder parallel zu dieser Achse. Asymptotisch liegen je zwei gleichnamige periodische Eigenwertflächen nahe zusammen, was man daran erkennt, daß der Abstand der Schnittpunkte zweier solcher Flächen mit einer Geraden der genannten Art von der Größenordnung:

$$\zeta (\sqrt{|\lambda|} + \sqrt{|\gamma_1|} + \cdots + \sqrt{|\gamma_m|}) \exp\{-\zeta (\sqrt{|\lambda|} + \sqrt{|\gamma_1|} + \cdots + \sqrt{|\gamma_m|})\}$$

ist. Bei abnehmendem λ und konstanten Werten der übrigen Parameter rücken zwei Eigenwerthyperflächen der genannten Art näher zusammen. Die weiteren Sätze von § 16 gelten sinngemäß auch im vorliegenden Fall. Geraden 1. Art sind jetzt durch die Ungleichung:

$$\psi \equiv 1 + \Phi_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg} \varphi_2 + \cdots + \Phi_m \operatorname{tg} \varphi_m \geqq 0$$

bestimmt und Geraden 2. Art durch die Ungleichung $\psi \gtreqless 0$.

Wir kommen, entsprechend den Betrachtungen von § 17, zum *asymptotischen* Verlauf der Eigenwerthyperflächen. Im vorliegenden Fall ist: $\gamma \, \partial\lambda/\partial\gamma < 0$, wo γ die bereits obengenannte Bedeutung hat und pos. ist.

Falls stets zwei und nur zwei Nullstellen der Funktion $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \cdots + \gamma_m \Phi_m$ vorhanden sind, während $\Phi_{\max}$ den größten (positiven) Wert dieser Funktion bei veränderlichem z bezeichnet, erhält man für $\lambda \to -\infty$ und γ positiv asymptotisch: $\partial\lambda/\partial\gamma \to -\Phi_{\max}$. Bei monotoner Abnahme von λ nimmt $|\partial\gamma/\partial\lambda|$ ebenfalls monoton ab. Asymptotisch ist $\partial^2\lambda/\partial\gamma^2$ für die Eigenwerthyperflächen negativ. Für $\lambda \to -\infty$ wird $|\partial^2\lambda/\partial\gamma^2| \to 0$. Auch hier nähern sich alle Eigenwerthyperflächen für $|\sigma| \approx 1$ asymptotisch für $\lambda \to -\infty$ den Eigenwerthyperflächen für $\sigma = \pm i$, denen Eigenfunktionen der Periode 4ζ entsprechen.

Der Fall, daß die Funktion $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2 + \cdots + \gamma_m \Phi_m$ im Grundbereich $2n$ Nullstellen aufweist, kann im Anschluß an die obigen Betrachtungen sowie an § 18 ohne weiteres in analoger Weise erledigt werden wie jener zweier Nullstellen dieser Funktion.

§ 24.

Anwendungsbeispiel aus der mathematischen Physik.

Die Wellengleichung im dreidimensionalen Raum:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

führt nach Transformation auf ein System krummliniger orthogonaler elliptischer Koordinaten nach Trennung der unabhängigen Veränderlichen auf Differentialgleichungen der Form [15]):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y\,(h + a k^2\, sn^2 x + b\, dn^4 x) = 0.$$

Auf diese Gleichung wenden wir die Transformation:

$$z = am\,(x, k); \quad \frac{dz}{dx} = (1 - k^2 \sin^2 x)^{1/2}; \quad k^2 < 1$$

an und erhalten:

$$(1 - k^2 \sin^2 z)\frac{d^2 y}{dz^2} - k^2 \sin z \cos z \frac{dy}{dz} + \\ + \{h + a k^2 \sin^2 z + b\,(1 - k^2 \sin^2 z)^2\} \cdot y = 0.$$

Weiter setzen wir:

$$w = y e^{-\frac{1}{2}\int_{z_0}^{z} \frac{k^2 \sin z \cos z}{1 - k^2 \sin^2 z}\, dz}$$

---

[15]) Vgl. z. B. M. J. O. Strutt, Ergebn. d. Math. I, H. 3, S. 76, Berlin, Springer 1932.

und finden:

$$\frac{d^2w}{dz^2} + w\left\{h + \frac{(h+a)\,k^2\sin^2 z}{1-k^2\sin^2 z} + b\,(1-k^2\sin^2 z)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\frac{k^2}{4}\cos^2 z\,(1+k^2\sin^2 z) + \frac{k^2}{4}\sin^2 z\,(k^2-1)}{(1-k^2\sin^2 z)^2}\right\} = 0.$$

Wenn wir nun $\lambda = h$, $\gamma_1 = h + a$, $\gamma_2 = b$ und $\gamma_3 = 1$ setzen, sowie

$$\Phi_1 = \frac{k^2\sin^2 z}{1-k^2\sin^2 z}; \quad \Phi_2 = (1-k^2\sin^2 z)^2;$$
$$\Phi_3 = \frac{\frac{k^2}{4}\cos^2 z\,(1+k^2\sin^2 z) + \frac{k^2}{4}\sin^2 z\,(k^2-1)}{(1-k^2\sin^2 z)^2},$$

gelangen wir zu einer erweiterten HILLschen Gleichung mit vier Parametern.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn N. S. MARKUS für seine Hilfe bei der Berechnung der GREENschen Funktionen (4) und (4a) sowie der Abb. 1, 3 und 4 herzlich danken.

(Eingegangen am 30. Mai 1943.)

Ein Satz über die absolute Konvergenz der Fourier-Reihe.

Von

Ludwig Neder in Münster (Westf.).

Über die absolute Konvergenz der Fourier-Reihe einer gegebenen Funktion $f(x)$ hat SERGE BERNSTEIN[1]) folgenden Satz veröffentlicht:

Wenn die Funktion $f(x)$ stetig und mod 2π periodisch ist, und wenn sie der Lipschitz-Bedingung genügt

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqq c|x_1 - x_2|^{\alpha}, \quad \text{wobei } \alpha > \tfrac{1}{2},$$

so ist ihre Fourier-Reihe absolut konvergent für alle x, d. h. es konvergiert die Reihe

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_r^2 + \beta_r^2}, \tag{1}$$

wenn α_0 und α_r, β_r die Fourier-Koeffizienten der Funktion $f(x)$ sind.

Diesen Satz wollen wir nachstehend verschärfen, indem wir zur Abkürzung für $t > 0$ setzen

$$l_1(t) = \log\left(e + \frac{1}{t}\right), \quad l_2(t) = \log\log\left(e^e + \frac{1}{t}\right),$$

$$l_3(t) = \log\log\log\left(e^{e^e} + \frac{1}{t}\right), \ \ldots$$

und dann die Funktion $f(x)$ nur der folgenden Lipschitz-Bedingung unterwerfen:

$$|f(x \pm t) - f(x)| \leqq \frac{c\,t^{\frac{1}{2}}}{l_1(t) \cdot l_2(t) \ldots l_{k-1}(t) \cdot l_k(t)^{1+\varkappa}},$$

wobei x beliebig, $t > 0$, $k =$ eine natürliche Zahl und $\varkappa > 0$. Es dürfte dabei genügen, den Beweis für den Fall $k = 2$ vorzuführen, da der allgemeine Fall dann keine Schwierigkeiten bietet. Wir beweisen also den folgenden

Hauptsatz. *Wenn die mod 2π periodische, überdies stetige Funktion $f(x)$ der Lipschitz-Bedingung genügt*

$$|f(x \pm t) - f(x)| \leqq \frac{c\,t^{\frac{1}{2}}}{l_1(t) \cdot l_2(t)^{1+\varkappa}} \quad (x \text{ beliebig}, \ t > 0, \ \varkappa > 0),$$

so konvergiert ihre Fourier-Reihe absolut, d. h. es konvergiert die Reihe (1).

[1]) S. BERNSTEIN, Sur la convergence absolue des séries trigonométriques. Pariser Comptes Rendus **158** (1919), S. 1661; vgl. auch den Beweis in dem Buche von L. TONELLI: Serie trigonometriche (Bologna 1928) auf S. 255.

Dem Beweise dieses Satzes schicken wir zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. Es gilt die Beziehung

$$I_n = \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi} t^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2 dt \leqq \frac{k}{n^{\frac{1}{2}}} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Bemerkung. Diese Ungleichung bildet den Hauptteil vom Beweise des sogenannten Lemmas von S. Bernstein im Falle $\alpha = \frac{1}{2}$ [2]). Sie ist daher bekannt.

Hilfssatz 2. Unter den Voraussetzungen unseres Hauptsatzes gilt, wenn $\sigma_n(x)$ das Fejersche Polynom $(n-1)$-ter Ordnung zur Fourier-Reihe von $f(x)$ bedeutet, die Ungleichung

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqq \frac{cK}{n^{\frac{1}{2}} \cdot \log n \cdot (\log\log n)^{1+\varkappa}} \quad \text{für große } n,$$

wobei die Konstante K nur von $\varkappa$ abhängt.

Beweis. Es ist

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi} \left[\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - f(x)\right] \cdot \left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2 dt$$

und daher

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqq \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi} \frac{c t^{\frac{1}{2}}}{l_1(t) \cdot l_2(t)^{1+\varkappa}} \cdot \left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2 dt.$$

Dieses Integral zerlegen wir beim Punkte $t = \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$ in zwei Teile. Dann ist für alle großen n im ersten Teil

$$t \leqq \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}, \quad \frac{1}{t} \geqq n^{\frac{1}{4}}, \quad \text{also } l_1(t) \geqq \frac{1}{4}\log n, \quad l_2(t) \geqq \frac{1}{2}\log\log n,$$

und im zweiten Teil

$$\frac{1}{t} \geqq 0, \quad \text{also } l_1(t) \geqq 1, \quad l_2(t) \geqq 1, \quad \text{sowie } \sin\frac{1}{2}t \geqq \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{2}\,t \geqq \frac{1}{\pi n^{\frac{1}{4}}},$$

[2]) Vgl. L. Tonelli, a. a. O., S. 252.

so daß man erhält

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqq \frac{2^{3+\varkappa} c}{\log n \cdot (\log\log n)^{1+\varkappa}} \cdot I_n + \frac{1}{\pi n} \cdot \pi \cdot \frac{c}{n^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\pi^2 n^{\frac{1}{2}}}}\ ^{3})$$

$$\leqq \frac{c}{n^{\frac{1}{2}} \cdot \log n \cdot (\log\log n)^{1+\varkappa}} \left\{ 2^{3+\varkappa} k + \pi^2 \frac{\log n \cdot (\log\log n)^{1+\varkappa}}{n^{\frac{1}{2}}} \right\},$$

womit unsere Abschätzung bewiesen ist, da der Quotient in der Klammer bei $n \to \infty$ gegen Null geht.

Beweis des Hauptsatzes. Die Fourier-Reihe der Funktion $f(x) - \sigma_n(x)$ hat formal die Gestalt

$$\sum_{r=1}^{n-1} \frac{r}{n} (\alpha_r \cos r x + \beta_r \sin r x) + \sum_{r=n}^{\infty} (\alpha_r \cos r x + \beta_r \sin r x),$$

wenn α_0 und α_r, β_r die Fourier-Koeffizienten von $f(x)$ bedeuten. Aus der Besselschen Ungleichung folgt daher für alle großen n

$$\sum_{r=n+1}^{2n} (\alpha_r^2 + \beta_r^2) \leqq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(x) - \sigma_n(x)]^2 \, dx \leqq \frac{2 c^2 K^2}{n \cdot (\log n)^2 \cdot (\log\log n)^{2+2\varkappa}}$$

und weiter

$$\sum_{r=n+1}^{2n} \sqrt{\alpha_r^2 + \beta_r^2} \leqq \sqrt{\sum_{r=n+1}^{2n} 1 \cdot \sum_{r=n+1}^{2n} (\alpha_r^2 + \beta_r^2)} \leqq \frac{c K \sqrt{2}}{\log n \cdot (\log\log n)^{1+\varkappa}}.$$

Diese Ungleichung verwenden wir für $n = 2^\nu$ bei genügend großem ν und finden

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \sum_{r=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \sqrt{\alpha_r^2 + \beta_r^2} \leqq \text{const.} \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \frac{1}{\nu \cdot (\log \nu)^{1+\varkappa}},$$

womit die Konvergenz der Reihe (1) bewiesen ist.

---

[3]) Bei der Abschätzung des zweiten Teils muß man zunächst $\sin \frac{1}{2} t \geqq \frac{1}{\pi} t$ verwenden, dann den Faktor $t^{\frac{1}{2}}$ wegheben und dann $t \geqq n^{-\frac{1}{4}}$ berücksichtigen. Der Effekt ist derselbe, wie wenn man, zugleich an beiden fraglichen Stellen, für t die genannte Schranke einsetzt.

(Eingegangen am 12. Juni 1943.)

Eine Bemerkung zum Schreierschen Verfeinerungssatz.

Von

Paul Lorenzen, z. Z. in Wesermünde.

Der SCHREIERsche Verfeinerungssatz[1]) sagt aus, daß zwei normale Ketten von Untergruppen einer Gruppe stets normale, isomorphe Verfeinerungen besitzen.

Die vorliegende Arbeit sucht nicht die Einordnung dieses Satzes in die Verbandstheorie[2]), sondern in die Theorie der Äquivalenzrelationen[3]). Wir geben zunächst eine Herleitung des Verfeinerungssatzes aus einem Axiomensystem, in dem als Grundbegriffe nur auftreten: Untermengen einer Gruppe G, Untergruppen von G. Durchschnitt und Produkt.

§ 3 zeigt dann, daß das Axiomensystem auch erfüllt wird, wenn statt der Untermengen einer Gruppe G zweistellige Relationen in einer beliebigen Menge M genommen werden, und statt der Untergruppen von G die Äquivalenzrelationen von M. Es läßt sich dann nämlich Durchschnitt und Produkt geeignet definieren. Aus der axiomatischen Herleitung erhält man also einen Verfeinerungssatz für Ketten von Äquivalenzrelationen beliebiger Mengen.

Die Tatsache, daß das Axiomensystem von den Untermengen einer Gruppe und von den zweistelligen Relationen einer beliebigen Menge erfüllt wird, erklärt sich in § 4 daraus, daß die Untermengen einer Gruppe G sich bezüglich Durchschnitt und Produkt isomorph den monotonen Relationen in G zuordnen lassen. Bei diesem Isomorphismus werden die Untergruppen von G gerade den monotonen Äquivalenzrelationen von G zugeordnet.

§ 1.

R sei eine Menge mit den Elementen $\alpha, \beta, \ldots$.

Es seien folgende Axiome erfüllt:

I. Es ist eine Relation $\leqq$ in R definiert, d. h. für je zwei Elemente α und β ist definiert, ob $\alpha \leqq \beta$ gilt oder nicht. Dabei gilt für alle Elemente α, β und γ:

$$\alpha \leqq \alpha$$

$$\alpha \leqq \beta, \quad \beta \leqq \gamma \rightarrow \alpha \leqq \gamma \text{ [4])}$$

$$\alpha \leqq \beta \quad \beta \leqq \alpha \rightarrow \alpha = \beta.$$

---

[1]) Vgl. H. ZASSENHAUS, Abh. Math. Seminar Hamburg **10** (1934).

[2]) Vgl. z. B. E. GEORGE, Journ. f. Math. **180** (1939); V. KORINEK, Vestn. Kralowske ceske **14** (1941).

[3]) Ein ähnliches Ziel hat die Arbeit von O. BORUVKA, Math. Annalen **118** (1941).

[4]) Dies ist eine Abkürzung für: wenn $\alpha \leqq \beta$ und $\beta \leqq \gamma$ gilt, so gilt $\alpha \leqq \gamma$. Diese Abkürzung wird in der ganzen Arbeit benutzt.

II. Je zwei Elemente α und β lassen sich zu einem eindeutig bestimmten Element $\alpha \wedge \beta$ von R verknüpfen. Dabei gilt für alle Elemente α, β und γ:

$$\alpha \wedge \beta \leqq \alpha$$
$$\alpha \wedge \beta \leqq \beta$$
$$\gamma \leqq \alpha, \quad \gamma \leqq \beta \rightarrow \gamma \leqq \alpha \wedge \beta.$$

III. Je zwei Elemente α und β lassen sich zu einem eindeutig bestimmten Element $\alpha\beta$ von R verknüpfen. Dabei gilt für alle α, β und γ:

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma.$$

IV. Für alle Elemente α_1, α_2, β_1 und β_2 gilt:

$$\alpha_1 \leqq \beta_1, \quad \alpha_2 \leqq \beta_2 \rightarrow \alpha_1\alpha_2 \leqq \beta_1\beta_2.$$

Es sei außerdem S eine Untermenge von R, die folgende Axiome erfüllt:

V. Für alle Elemente α und β gilt:

$$\alpha \in S, \quad \beta \in S \rightarrow \alpha \wedge \beta \in S.$$

VI. Für alle Elemente α und β gilt:

$$\alpha \in S, \quad \beta \in S, \quad \alpha\beta = \beta\alpha \rightarrow \alpha\beta \in S.$$

VII. Für alle Elemente α, β und γ von S gilt:

$$\alpha \leqq \alpha\beta$$
$$\beta \leqq \alpha\beta$$
$$\alpha \leqq \gamma, \quad \beta \leqq \gamma \rightarrow \alpha\beta \leqq \gamma.$$

VIII. Für alle Elemente α, β und γ gilt:

$$\alpha \in S, \quad \gamma \leqq \alpha \rightarrow \alpha \wedge \beta\gamma = (\alpha \wedge \beta)\gamma,$$
$$\alpha \in S, \quad \gamma \leqq \alpha \rightarrow \alpha_1\gamma\beta = \gamma(\alpha \wedge \beta).$$

Als Modell für das Axiomensystem I bis VIII kann man das folgende nehmen:

R sei die Menge aller Untermengen einer Gruppe G. Wir setzen für zwei Untermengen α und β fest, daß $\alpha \leqq \beta$ gelten soll, wenn α Untermenge von β ist.

Wir definieren $\alpha \wedge \beta$ als Durchschnitt von α und β und $\alpha\beta$ als das Produkt, das aus den Elementen ab von G mit $a \in \alpha$ und $b \in \beta$ besteht.

S sei die Menge aller Untergruppen von G.

Dieses Modell erfüllt bekanntlich alle Axiome.

§ 2.

Wir wollen jetzt aus den Axiomen I bis VIII einen Verfeinerungssatz herleiten. Dazu brauchen wir folgende Definitionen:

Unter einer Kette A verstehen wir eine endliche Folge $[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ von Elementen von S, in der $\alpha_i \leqq \alpha_{i-1}$ gilt für $i = 1, \ldots, n$. Die Elemente α_i

heißen die Glieder von A, α_0 und α_n heißen die Endglieder. Eine Kette A heißt Verfeinerung einer Kette B, wenn jedes Glied von B auch Glied von A ist.

Eine zweigliedrige Kette $[\alpha, \beta]$ heißt ein Quotient. Ist $A = [\alpha_0, \ldots, \alpha_n]$ eine Kette, so heißen die Quotienten $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ für $i = 1, \ldots, n$ die Quotienten von A.

Wir nennen einen Quotienten $[\alpha, \beta]$ normal, wenn für alle Elemente γ von R [5]) gilt

$$\gamma \leqq \alpha \to \beta\gamma = \gamma\beta.$$

Eine Kette heißt normal, wenn alle ihre Quotienten normal sind.

Hilfssatz 1. Sind $[\alpha, \beta]$ und $[\alpha, \gamma]$ normale Quotienten, so ist auch der Quotient $[\alpha, \beta\gamma]$ normal.

Beweis. Für jedes Element δ folgt aus $\delta \leqq \alpha$ sofort $\beta\,\delta = \delta\beta$ und $\gamma\delta = \delta\gamma$, also wegen III auch

$$(\beta\gamma)\,\delta = \beta\gamma\delta = \beta\delta\gamma = \delta\beta\gamma = \delta\,(\beta\gamma).$$

Hilfssatz 2. Ist $[\alpha, \beta]$ ein normaler Quotient, so ist für jedes Element γ von S auch der Quotient $[\alpha \wedge \gamma, \beta \wedge \gamma]$ normal.

Beweis. Für jedes Element δ folgt aus $\delta \leqq \alpha \wedge \gamma$ sofort $\delta\beta = \beta\delta$ wegen $\delta \leqq \alpha$, und wegen $\delta \leqq \gamma$ also

$$\delta(\beta \wedge \gamma) = \delta\beta \wedge \gamma = \beta\delta \wedge \gamma = (\beta \wedge \gamma)\,\delta.$$

Ein Quotient $[\gamma, \delta]$ heißt isomorpher Teil eines Quotienten $[\alpha, \beta]$, wenn $\alpha = \beta\gamma$ und $\delta = \beta \wedge \gamma$ gilt.

Hilfssatz 3. Ist $[\alpha, \beta]$ ein normaler Quotient und $[\gamma, \delta]$ isomorpher Teil von $[\alpha, \beta]$, so ist auch $[\gamma, \delta]$ normal. Ferner lassen sich die Elemente ζ von S, für die $\beta \leqq \zeta \leqq \alpha$ gilt, eineindeutig den Elementen η von S, für die $\delta \leqq \eta \leqq \gamma$ gilt, zuordnen, so daß für einander zugeordnete Elemente ζ und η der Quotient $[\gamma, \eta]$ bzw. $[\eta, \delta]$ isomorpher Teil ist von $[\alpha, \zeta]$ bzw. $[\zeta, \beta]$.

Beweis. $[\gamma, \delta]$ ist normal nach Hilfssatz 2, denn

$$[\gamma, \delta] = [\alpha \wedge \gamma, \beta \wedge \gamma].$$

Gilt $\beta \leqq \zeta \leqq \alpha$, so ordnen wir ζ das Element $\zeta \wedge \gamma$ zu. Gilt $\delta \leqq \eta \leqq \gamma$, so ordnen wir η das Element $\eta\beta$ zu (da $[\alpha, \beta]$ normal ist, folgt aus $\eta \leqq \alpha$ sofort $\eta\beta = \beta\eta \in S$). Wegen

$$(\zeta \wedge \gamma)\beta = \zeta \wedge \gamma\beta = \zeta \wedge \alpha = \zeta$$

und

$$\eta\beta \wedge \gamma = \eta(\beta \wedge \gamma) = \eta\delta = \eta$$

---

[5]) Beschränkt man γ auf Elemente von S, so bleiben die folgenden Sätze ebenfalls gültig. Wegen der Anwendung auf das gruppentheoretische Modell von § 1 durchläuft γ alle Elemente von R.

ist diese Zuordnung eineindeutig. Schließlich ist $[\gamma, \eta]$ isomorpher Teil von $[\alpha, \eta\beta]$, denn $\alpha = \eta\beta\gamma$ und $\eta = \eta\beta \wedge \gamma$. Ebenso ist $[\eta, \delta]$ isomorpher Teil von $[\eta\beta, \beta]$, denn $\delta = \beta \wedge \delta \leqq \beta \wedge \eta \leqq \beta \wedge \gamma = \delta$.

Auf Grund dieses Hilfssatzes nennen wir einen Quotienten $[\alpha, \beta]$ fastnormal, wenn es Elemente α', β', γ' und γ von S gibt, für die gilt:

1. $\gamma \leqq \beta \leqq \alpha$.
2. $[\alpha, \gamma]$ ist normal.
3. $[\alpha', \gamma']$ ist isomorpher Teil von $[\alpha, \gamma]$.
4. $\gamma' \leqq \beta' \leqq \alpha'$.
5. $\beta = \beta'\gamma$, $\beta' = \beta \wedge \alpha'$.
6. $[\alpha', \beta']$ ist normal.

Eine Kette heißt fastnormal, wenn alle ihre Quotienten fastnormal sind.

Hilfssatz 4. Sind $[\alpha_1, \alpha_2]$ und $[\beta_1, \beta_2]$ normale Quotienten, so sind die Quotienten $[\alpha_2(\alpha_1 \wedge \beta_1), \alpha_2(\alpha_1 \wedge \beta_2)]$ und $[\beta_2(\alpha_1 \wedge \beta_1), \beta_2(\alpha_2 \wedge \beta_1)]$ fastnormal.

Beweis. Nach Hilfssatz 2 ist $[\alpha_2(\alpha_1 \wedge \beta_1), \alpha_2]$ bzw. $[\beta_2(\alpha_1 \wedge \beta_1), \beta_2]$ normal. $[\alpha_1 \wedge \beta_1, \alpha_2 \wedge \beta_1]$ bzw. $[\alpha_1 \wedge \beta_1, \alpha_1 \wedge \beta_2]$ ist isomorpher Teil von $[\alpha_2(\alpha_1 \wedge \beta_1), \alpha_2]$ bzw. $[\beta_2(\alpha_1 \wedge \beta_1), \beta_2]$. Dem Element $(\alpha_1 \wedge \beta_2)(\alpha_2 \wedge \beta_1)$, für das

$$\alpha_2 \wedge \beta_1 \leqq (\alpha_1 \wedge \beta_2)(\alpha_2 \wedge \beta_1) \leqq \alpha_1 \wedge \beta_1$$

bzw.

$$\alpha_1 \wedge \beta_2 \leqq (\alpha_1 \wedge \beta_2)(\alpha_2 \wedge \beta_1) \leqq \alpha_1 \wedge \beta_1$$

gilt, ist nach Hilfssatz 3 das Element $\alpha_2(\alpha_1 \wedge \beta_2)$ bzw. $\beta_2(\alpha_2 \wedge \beta_1)$ zugeordnet.

Schließlich ist $[\alpha_1 \wedge \beta_1, (\alpha_1 \wedge \beta_2)(\alpha_2 \wedge \beta_1)]$ nach Hilfssatz 1 normal. Damit ist Hilfssatz 4 bewiesen.

Wir nennen zwei Quotienten $[\alpha_1, \alpha_2]$ und $[\beta_1, \beta_2]$ isomorph, wenn sie einen gemeinsamen isomorphen Teil besitzen, d. h. wenn es einen Quotienten $[\gamma, \delta]$ gibt, so daß $[\gamma, \delta]$ isomorpher Teil ist von $[\alpha_1, \alpha_2]$ und $[\beta_1, \beta_2]$. Zwei Ketten heißen isomorph, wenn sich die Quotienten der Ketten einander eineindeutig so zuordnen lassen, daß zugeordnete Quotienten isomorph sind.

Mit dieser Definition läßt sich Hilfssatz 4 dadurch ergänzen, daß die Quotienten $[\alpha_2(\alpha_1 \wedge \beta_1), \alpha_2(\alpha_1 \wedge \beta_2)]$ und $[\beta_2(\alpha_1 \wedge \beta_1), \beta_2(\alpha_2 \wedge \beta_1)]$ isomorph sind. Der gemeinsame isomorphe Teil ist nämlich $[\alpha_1 \wedge \beta_1, (\alpha_1 \wedge \beta_2)(\alpha_2 \wedge \beta_1)]$. Jetzt ergibt sich unmittelbar der folgende

Verfeinerungssatz. Gleichendige, normale Ketten haben fastnormale, isomorphe Verfeinerungen. D. h. sind $A = [\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m]$ und $B = [\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n]$ normale Ketten und ist $\alpha_0 = \beta_0$ und $\alpha_m = \beta_n$, so gibt es Ketten A' und B', so daß A' bzw. B' eine fastnormale Verfeinerung von A bzw. B ist, und A' und B' isomorph sind.

Beweis[1]). Wir bilden die Kette A' aus den Gliedern:

$$\alpha_0 = \alpha_1(\alpha_0 \wedge \beta_0)$$

$$\alpha_1(\alpha_0 \wedge \beta_1), \alpha_1(\alpha_0 \wedge \beta_2), \ldots, \alpha_1(\alpha_0 \wedge \beta_n) = \alpha_1 = \alpha_2(\alpha_1 \wedge \beta_0)$$

$$\alpha_2(\alpha_1 \wedge \beta_1), \alpha_2(\alpha_1 \wedge \beta_2), \ldots, \alpha_2(\alpha_1 \wedge \beta_n) = \alpha_2 = \alpha_3(\alpha_2 \wedge \beta_0)$$

$$\ldots$$

$$\alpha_m(\alpha_{m-1} \wedge \beta_1), \alpha_m(\alpha_{m-1} \wedge \beta_2), \ldots, \alpha_m(\alpha_{m-1} \wedge \beta_n) = \alpha_m$$

und die Kette B' aus den Gliedern:

$$\beta_0 = \beta_1(\alpha_0 \wedge \beta_0)$$

$$\beta_1(\alpha_1 \wedge \beta_0), \beta_1(\alpha_2 \wedge \beta_0), \ldots, \beta_1(\alpha_n \wedge \beta_0) = \beta_1 = \beta_2(\alpha_0 \wedge \beta_1)$$

$$\ldots$$

$$\beta_n(\alpha_1 \wedge \beta_{n-1}), \beta_n(\alpha_2 \wedge \beta_{n-1}), \ldots, \beta_n(\alpha_m \wedge \beta_{n-1}) = \beta_n.$$

A' bzw. B' ist Verfeinerung von A bzw. B. Außerdem sind nach Hilfssatz 4 die Quotienten $[\alpha_i(\alpha_{i-1} \wedge \beta_{j-1}),\ \alpha_i(\alpha_{i-1} \wedge \beta_j)]$ und $[\beta_j(\alpha_{i-1} \wedge \beta_{j-1}),\ \beta_j(\alpha_i \wedge \beta_{j-1})]$ fastnormal und einander isomorph, da ja $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ und $[\beta_{j-1}, \beta_j]$ normal sind.

Der Schreiersche Verfeinerungssatz entsteht durch Anwendung dieses Satzes auf das in § 1 angegebene Modell. Man hat dazu nur zu zeigen, daß

1. eine normale Kette von Untergruppen auch in unserem Sinne normal ist,
2. zwei Ketten von Untergruppen, die in unserem Sinne isomorph sind, auch im üblichen Sinne isomorph sind,
3. eine Kette von Untergruppen, die in unserem Sinne fastnormal ist, im üblichen Sinne normal ist.

Zu 1.: Ist die Gruppe β Normalteiler der Gruppe α, so gilt für jedes Element a von α: $a\beta = \beta a$. Also gilt auch für jede Untermenge γ von α: $\gamma\beta = \beta\gamma$.

Zu 2. und 3.: Dies sind unmittelbare Folgerungen der Isomorphiesätze der Gruppentheorie[6]).

§ 3.

Wir geben jetzt ein weiteres Modell für das Axiomensystem I bis VIII an.

M sei eine beliebige Menge und R die Menge der zweistelligen Relationen in M, die wir mit α, β, ... bezeichnen. Ein Element α von R nennen wir Äquivalenzrelation von M, wenn α reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, d. h. wenn für alle Elemente a, b und c von M gilt:

$$a \alpha a$$

$$a \alpha b \rightarrow b \alpha a$$

$$a \alpha b,\ b \alpha c \rightarrow a \alpha c.$$

Die Äquivalenzrelationen von M bilden eine Untermenge S von R.

---

[6]) Vgl. z. B. Enzykl. d. math. Wiss. I, 1, S. 9.

Um zu zeigen, daß die Elemente von R bzw. S das Axiomensystem I. bis VIII. erfüllen, definieren wir zunächst eine Relation $\leqq$ in R. Wir setzen fest, daß für zwei Elemente α und β genau dann $\alpha \leqq \beta$ gelten soll, wenn für alle Elemente a und b von M gilt:

$$a\,\alpha\,b \rightarrow a\,\beta\,b.$$

Dadurch wird I. erfüllt.

Wir verknüpfen je zwei Elemente α und β zu einem dritten Element $\alpha \wedge \beta$, indem wir festsetzen, daß für je zwei Elemente α und b von M genau dann $a\,\alpha \wedge \beta\,b$ gelten soll, wenn $a\,\alpha\,b$ und $a\,\beta\,b$ gilt.

Dadurch wird II. erfüllt.

Wir verknüpfen außerdem je zwei Elemente α und β zu einem Element $\alpha\,\beta$, indem wir festsetzen, daß für je zwei Elemente a und c von M genau dann $a\,\alpha\beta\,c$ gelten sollen, wenn es ein Element b von M gibt, so daß $a\,\alpha\,b$ und $b\,\beta\,c$ gilt.

Dadurch wird III. erfüllt.

Die Gültigkeit von IV. bis VII. ist ohne Schwierigkeit nachzuweisen. VIII. ergibt sich folgendermaßen: α sei eine Äquivalenzrelation von M, β und γ seien beliebige Relationen in M. Gilt dann $a\,\alpha \wedge \beta\,\gamma\,c$ für zwei Elemente a und c von M, so gilt $a\,\alpha\,c$ und $a\,\beta\,\gamma\,c$. Es gibt also ein Element b von M, so daß $a\,\beta\,b$ und $b\,\gamma\,c$ gilt. Setzen wir jetzt noch $\gamma \leqq \alpha$ voraus, so folgt $b\,\alpha\,c$, und wegen $a\,\alpha\,c$ also auch $a\,\alpha\,b$. Hieraus ergibt sich $a\,\alpha \wedge \beta\,b$ und $b\,\gamma\,c$, d. h. $a\,(\alpha \wedge \beta)\,\gamma\,c$. Damit ist $\alpha \wedge \beta\,\gamma \leqq (\alpha \wedge \beta)\,\gamma$ bewiesen. $(\alpha \wedge \beta)\,\gamma \leqq \alpha \wedge \beta\,\gamma$ ist trivial, so daß $\alpha \wedge \beta\,\gamma = (\alpha \wedge \beta)\,\gamma$ folgt.

Ebenso ergibt sich $\alpha \wedge \gamma\,\beta = \gamma\,(\alpha \wedge \beta)$.

Damit ist die Gültigkeit der Axiome I. bis VIII. erwiesen.

Um die Bedeutung des Verfeinerungssatzes für Ketten von Äquivalenzrelationen, dessen Gültigkeit damit gleichzeitig erwiesen ist, zu erhellen, wollen wir noch untersuchen, wann ein Quotient $[\gamma, \delta]$ von Äquivalenzrelationen isomorpher Teil eines Quotienten $[\alpha, \beta]$ ist. Dazu brauchen wir folgende Definitionen:

Ist α eine Äquivalenzrelation von M und x ein Element von M, so heißt die Menge x^α der Elemente a, für die $a\,\alpha\,x$ gilt, eine Klasse von α.

Ist α eine Äquivalenzrelation von M und $\mathfrak{a}$ eine Untermenge von M, so bezeichnen wir mit $\alpha_\mathfrak{a}$ diejenige Äquivalenzrelation von $\mathfrak{a}$, deren Klassen $x^\alpha \cap \mathfrak{a}$ sind. Enthält jede Klasse von α mindestens ein Element von $\mathfrak{a}$, so heißt $\alpha_\mathfrak{a}$ ein unechter Teil von α.

Isomorphiesatz[7]). Sind $[\alpha, \beta]$ und $[\gamma, \delta]$ Quotienten von Äquivalenzrelationen von M, so ist $[\gamma, \delta]$ genau dann isomorpher Teil von $[\alpha, \beta]$, wenn für jedes Element x von M die Äquivalenzrelation δ_{x^γ} unechter Teil von β_{x^α} ist.

---

[7]) Dieser Satz verallgemeinert den 1. Isomorphiesatz der Gruppentheorie. Vgl. [6]).

Beweis. 1. Es sei $[\gamma, \delta]$ isomorpher Teil von $[\alpha, \beta]$, d. h. $\alpha = \beta\gamma$ und $\delta = \beta \wedge \gamma$. Dann gilt für jedes Element x von M $\delta_{x^\gamma} = (\beta \wedge \gamma)_{x^\gamma} = \beta_{x^\gamma}$ $= (\beta_{x^\alpha})_{x^\gamma}$ wegen $x^\alpha = x^{\beta\gamma} \supseteq x^\gamma$. Also ist nur noch zu zeigen, daß jede Klasse von β_{x^α} mindestens ein Element von x^γ enthält. Ist a ein Element von x^α, so gilt $a\,\beta\gamma\,x$. Es gibt also ein Element b von M, für das $a\,\beta\,b$ und $b\,\gamma\,x$ gilt. b gehört zur selben Klasse von β_{x^α} wie a und liegt außerdem in x^γ.

2. Es sei für jedes Element x von M die Äquivalenzrelation δ_{x^γ} unechter Teil von β_{x^α}. Dann gilt $x^\alpha \supseteq x^\gamma$, d. h. $\gamma \leqq \alpha$. Wegen $\beta \leqq \alpha$ folgt hieraus $\beta\gamma \leqq \alpha$. Gilt $a\,\alpha\,x$, so enthält a^β ein Element b von x^γ. Für dieses gilt also $a\,\beta\,b$ und $b\,\gamma\,x$, d. h. es gilt $a\,\beta\gamma\,x$. Damit ist auch $\alpha \leqq \beta\gamma$ bewiesen. Wegen $\beta_{x^\gamma} = \delta_{x^\gamma}$ gilt ferner $\delta \wedge \gamma \leqq \beta$ und $\beta \wedge \gamma \leqq \delta$. Hieraus folgt wegen $\delta \leqq \gamma$ sofort $\delta = \beta \wedge \gamma$.

§ 4.

Die Beziehungen zwischen den Untermengen und Untergruppen einer Gruppe einerseits und den Relationen und Äquivalenzrelationen einer Menge andererseits erschöpfen sich nicht darin, daß beide Bereiche den Axiomen I. bis VIII. genügen. Es lassen sich vielmehr die Untermengen und Untergruppen einer Gruppe G bezüglich Durchschnitt und Produkt isomorph abbilden auf Relationen und Äquivalenzrelationen von G.

Ist nämlich $\mathfrak{a}$ eine Untermenge von G, so definieren wir eine Relation α von G, indem wir für je zwei Elemente a und b von G festsetzen, daß $a\,\alpha\,b$ genau dann gelten soll, wenn ab^{-1} in $\mathfrak{a}$ liegt.

Diese Relation α ist dann monoton, d. h. für je drei Elemente a, b und c von G gilt stets

$$a\,\alpha\,b \rightarrow a\,c\,\alpha\,b\,c.$$

Jeder Untermenge $\mathfrak{a}$ können wir also eine monotone Relation α zuordnen. Man sieht dann sofort, daß

1. diese Zuordnung eineindeutig ist,

2. einer Untermenge $\mathfrak{a}$ genau dann eine monotone Äquivalenzrelation zugeordnet ist, wenn $\mathfrak{a}$ Untergruppe ist,

3. diese Zuordnung bezüglich Durchschnitt und Produkt isomorph ist, d. h. ist der Untermenge $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ die Relation α bzw. β zugeordnet, so ist der Untermenge $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ die Relation $\alpha \wedge \beta$ bzw. $\alpha\beta$ zugeordnet.

Es ist also diese Isomorphie zwischen den Untermengen bzw. Untergruppen von G und den monotonen Relationen bzw. Äquivalenzrelationen von G, durch den sich die Gültigkeit des Verfeinerungssatzes von dem einen Bereich auf den anderen überträgt.

(Eingegangen am 14. Juni 1943.)

Studien über den Vielfachheitsbegriff und den Bézoutschen Satz.

Von

Oskar Perron in München.

§ 1.

Einleitung.

Die algebraische Geometrie ist, nachdem ihr in Deutschland durch die grundlegenden Untersuchungen von A. Brill und M. Noether neue und starke Impulse gegeben waren, bekanntlich ausgewandert und hat eine Stätte sorgsamster Pflege in Italien gefunden, wo sie durch die über mehr als ein halbes Jahrhundert sich erstreckende Arbeit vieler ausgezeichneter Forscher zu einem imposanten Gebäude emporgewachsen ist. Dabei ging es aber ähnlich wie schon mehrfach vorher in anderen Zweigen der Mathematik: Die solide Fundamentierung des Gebäudes wurde außer acht gelassen. Erst allmählich merkte man dieses Versäumnis, und so schrieb im Jahre 1933 der Meister der algebraischen Geometrie, Ecc. Fr. Severi ([10], S. 341), mit Bezug auf eine Verallgemeinerung des Bézoutschen Satzes: „Man muß jedoch zugeben, daß die zu einer genauen Formulierung des Satzes nötigen Überlegungen mit algebraisch-geometrischen Methoden bisher noch nicht durchgeführt worden sind, außer im Falle der ebenen Kurven. Das liegt daran, daß die erfahrensten algebraischen Geometer die Gewißheit hatten, daß sich jene Behauptungen ohne übertriebene Anstrengung würden in Ordnung bringen lassen, sobald es von den Bedürfnissen einer systematischen, didaktisch vollkommenen Darstellung der Theorie gefordert würde. Und deshalb hatten sie, von anderen neuen und schwierigen Problemen gefesselt, eine Frage beiseite gelegt, über deren Antwort sie vollkommen im klaren waren."

Bei dieser Feststellung darf aber nicht übersehen werden, daß in den letzten Jahrzehnten ganz unabhängig von der algebraischen Geometrie auch die reine Algebra sich kräftig entwickelt hat und daß als eine der Früchte dieser Entwicklung gerade die fehlende Fundamentierung der algebraischen Geometrie in ziemlichem, wenn auch zur Zeit wohl noch nicht erschöpfendem Umfang geliefert worden ist. Es handelt sich dabei neben der Theorie der Polynomideale, von der ich in dieser Arbeit absehen will, vor allem um den allgemeinen Resultantenbegriff von Mertens und den darauf gegründeten exakten Beweis des Bézoutschen Satzes mit Berücksichtigung der Vielfachheit.

Nun sind freilich die Originalarbeiten von Mertens ([4], [5]) schwer zu lesen, und das Buch von J. König [2], in dem diese Dinge behandelt sind, ist ebenfalls keine leichte Lektüre und auch nicht frei von Fehlern. Einfachere Zugänge zur Resultante haben Hurwitz [1] und Macaulay [3] geschaffen, und aus neuerer Zeit liegen zwei leicht faßliche Darstellungen vor, nämlich: Die moderne Algebra von Herrn van der Waerden [12] und mein Algebrabuch [6], in dem ich Wert darauf legte, auch die kleinsten Details lückenlos auszuarbeiten.

Die Geometer gehen aber an dieser Fundamentierung vorbei, vielleicht, weil sie, wie gesagt, noch nicht erschöpfend ist, aber auch weil man glaubt, die Sache mit einfacheren Mitteln und zugleich vollständiger machen zu können. Jedoch dürfte das eine Verkennung der Schwierigkeiten sein. Was die Algebra noch nicht hat leisten können, ist insbesondere die Schaffung eines brauchbaren Vielfachheitsbegriffes für eine nicht isolierte Lösung eines Systems von k oder mehr homogenen Gleichungen mit $k+1$ Unbekannten. Soweit der Vielfachheitsbegriff nur dazu dienen soll, dem Prinzip der Erhaltung der Anzahl Geltung zu verschaffen, kommen allerdings nur Systeme mit endlich vielen, also lauter isolierten Lösungen in Frage, und da hat die Algebra, wenigstens für k Gleichungen, alles gemacht. Aber an sich ist ein Vielfachheitsbegriff wohl auch aus anderen Gründen wünschenswert, und da kann es als Mangel empfunden werden, daß man ihn insbesondere in dem angegebenen Fall noch nicht hat. In einer soeben erschienenen Arbeit [11] hat nun Herr Severi den interessanten Versuch gemacht, einen ganz allgemein gültigen Vielfachheitsbegriff zu schaffen, und hat hinzugefügt, daß er diesen schon seit 40 Jahren in all seinen Arbeiten immer berücksichtigt hätte. Unmittelbar veranlaßt ist die Severische Arbeit durch meine Note [7] und weiter beeinflußt auch durch meine Note [8], da ich in beiden die Vielfachheit nicht berücksichtigt habe; es sieht daher fast so aus, als wäre ich der erste, der diesen Begriff nicht kennt. Leider ist aber Herrn Severis Versuch mißglückt, und sein Vielfachheitsbegriff ist wohl von niemand berücksichtigt worden; denn ich werde im folgenden zeigen, daß das von Herrn Severi angegebene auf der Kroneckerschen Eliminationsmethode beruhende Rezept zur Bestimmung der Vielfachheit schon im Fall endlich vieler Lösungen nicht brauchbar ist, indem es mit dem Bézoutschen Satz im Widerspruch steht. Das gibt dann naturgemäß Veranlassung, auch auf den Severischen Beweis des Bézoutschen Satzes einzugehen.

Für den speziellen Fall von drei Flächen des R_3, die sich in einer Kurve schneiden, gibt Herr Severi noch eine zweite Vielfachheitsdefinition, ohne zu prüfen, ob sie mit der ersten in Übereinstimmung ist. Ich werde zeigen, daß sie es nicht ist und daß sie außerdem keinesfalls das leistet, was die algebraische Geometrie vermutlich erwartet, indem sie z. B. bei Berührung der Flächen längs der Kurve nur die Vielfachheit 1 gibt.

Um Mißverständnissen vorzubeugen, soll aber gleich hier bemerkt werden, daß es im folgenden gar nicht meine Absicht ist, algebraische *Geometrie* zu treiben, sondern daß ich nur die rein *algebraischen* Grundlagen erörtern will. Ich werde also nicht oder höchstens nur ganz nebenbei von Schnittpunkten algebraischer Mannigfaltigkeiten reden, sondern genau wie in meinen Arbeiten [7] und [8], die Herrn SEVERI auf den Plan gerufen haben, mich nur mit Gleichungssystemen und ihren Lösungen beschäftigen.

§ 2.

Nachweis, daß die Kroneckersche Eliminationsmethode zur Bestimmung einer Vielfachheit unbrauchbar ist.

Diese Methode der sukzessiven Elimination liefert bekanntlich die Gesamtheit der Lösungen eines beliebigen Gleichungssystems ohne Berücksichtigung einer Vielfachheit der einzelnen Lösungen. Herr SEVERI [11] behauptet nun, die Methode liefere, „wenn sie aufmerksam angewandt würde", von selbst die den Lösungen zukommende Vielfachheit. Es soll nicht bestritten werden, daß dieses von Herrn SEVERI beschriebene und an Beispielen illustrierte Verfahren in vielen Fällen das liefert, was man rein gefühlsmäßig gern als die Vielfachheit einer Lösung ansprechen möchte. In anderen Fällen kann aber auch etwas herauskommen, was mit allgemein anerkannten Sätzen im Widerspruch steht, und deshalb kann das Verfahren nicht als allgemein gültige Definition zugelassen werden. Betrachten wir z. B. das System

$$x_1^2 = 0, \quad x_2^2 = 0, \quad x_3^2 = 0$$

(geometrisch den Schnittpunkt von drei Doppelebenen im R_3). Das System hat natürlich nur die eine Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Da es aber aus drei Gleichungen zweiten Grades besteht, kommt der Lösung nach dem auch von Herrn SEVERI als grundlegend angesehenen BÉZOUTschen Satz die Vielfachheit 8 zu. Durch Anwendung der SEVERI-KRONECKERschen Methode kommt aber, wie wir sehen werden, die Vielfachheit 16 heraus. In der Tat, wenn wir zunächst einmal annehmen, daß eine dem eigentlichen Eliminationsprozeß vorausgehende allgemeine Koordinatentransformation hier nicht erforderlich ist[1]), gestaltet sich die Rechnung folgendermaßen:

Von den Polynomen mit unbestimmten Koeffizienten ξ_ν, η_ν

$$\xi_1 x_1^2 + \xi_2 x_2^2 + \xi_3 x_3^2; \quad \eta_1 x_1^2 + \eta_2 x_2^2 + \eta_3 x_3^2$$

[1]) Wann sie erforderlich ist und wann nicht, ist mir nicht ganz klar geworden. In den Beispielen bei SEVERI wird die Transformation nie ausgeübt.

ist die Resultante nach x_1 zu bilden; sie ist[2])

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_2 x_2^2 + \xi_3 x_3^2 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 x_2^2 + \xi_3 x_3^2 \\ \eta_1 & 0 & \eta_2 x_2^2 + \eta_3 x_3^2 & 0 \\ 0 & \eta_1 & 0 & \eta_2 x_2^2 + \eta_3 x_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= [\xi_1(\eta_2 x_2^2 + \eta_3 x_3^2) - \eta_1(\xi_2 x_2^2 + \xi_3 x_3^2)]^2$$

$$= (\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2)^2 x_2^4 + 2(\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2)(\xi_1\eta_3 - \eta_1\xi_3) x_2^2 x_3^2 + (\xi_1\eta_3 - \eta_1\xi_3)^2 x_3^4.$$

Also ist jetzt noch das System

$$x_2^4 = 0, \quad x_2^2 x_3^2 = 0, \quad x_3^4 = 0$$

zu behandeln. Da die linken Seiten keinen nichtkonstanten gemeinsamen Teiler haben, muß jetzt entsprechend die Resultante der Polynome

$$\xi_1 x_2^4 + \xi_2 x_2^2 x_3^2 + \xi_3 x_3^4, \quad \eta_1 x_2^4 + \eta_2 x_2^2 x_3^2 + \eta_3 x_3^4$$

nach x_2 gebildet werden. Sie ist eine achtreihige Determinante, die man leicht berechnen kann. Aber auch ohne Rechnung weiß man, daß sie isobar vom Gewicht 16 ist[3]), so daß jedes Glied den Faktor x_3^{16} hat. Daher handelt es sich jetzt noch um die eine Gleichung $x_3^{16} = 0$; sie hat die 16fach zählende Lösung $x_3 = 0$. Ihre Ergänzung zu der Lösung des ursprünglichen Systems ist $x_3 = x_2 = x_1 = 0$, und dieser muß daher nach Herrn SEVERI ebenfalls die Vielfachheit 16 zuerkannt werden statt 8, wie es der BÉZOUTsche Satz verlangt.

Aber auch wenn eine vorausgehende allgemeine[4]) (projektive) Koordinatentransformation erforderlich sein sollte, wird die Rechnung nur etwas

---

[2]) Ich nehme dabei an, daß unter der Resultante von zwei Polynomen nach einer Variablen, wie allgemein üblich, die SYLVESTERsche Determinante zu verstehen ist. Bei SEVERI [9], S. 335 findet sich allerdings die folgende Definition: Die zwei Polynome

$$f_0(x_1, \ldots, x_r), \quad f_1(x_1, \ldots, x_r)$$

von den in bezug auf x_1 positiven Graden n_0 und n_1 seien relativ prim und keines habe einen von x_1 freien nichtkonstanten Teiler. Dann gibt es ein bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmtes Polynom $R(x_2, \ldots, x_r)$, das sich in der Gestalt $Af_0 + Bf_1$ darstellen läßt, wo A und B Polynome von $x_1, \ldots, x_r$ sind, und zwar in bezug auf x_1 höchstens vom Grad $n_1 - 1$ bzw. $n_0 - 1$. R heißt die Resultante von f_0, f_1 nach x_1. Daß diese Definition mißglückt ist, indem die darin enthaltene Behauptung nicht zutrifft, zeigt das Beispiel $f_0 = x_1^2 + x_2$, $f_1 = x_1^2 + x_3$. Hier sind alle Voraussetzungen erfüllt; aber die von R geforderten Eigenschaften kommen jedem Polynom der Form

$$\Phi(x_2, x_3) \cdot (x_2 - x_3) = \Phi(x_2, x_3) \cdot f_0 - \Phi(x_2, x_3) \cdot f_1$$

zu. Also ist R nicht bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt, und die Resultante ist nicht definiert. Die wahre Resultante ist aber natürlich die SYLVESTERsche Determinante, die hier gleich $(x_2 - x_3)^2$ ist.

[3]) Siehe z. B. [6], S. 207.

[4]) Zu diesem Begriff vgl. die Fußnote [10]).

umständlicher, ohne ein anderes Resultat zu liefern. Dann handelt es sich nämlich um das System

$$(\sum_{\nu=1}^{4} a_{1\nu}x_\nu)^2 = 0, \qquad (\sum_{\nu=1}^{4} a_{2\nu}x_\nu)^2 = 0, \qquad (\sum_{\nu=1}^{4} a_{3\nu}x_\nu)^2 = 0,$$

wobei man, indem man diese Gleichungen durch die allgemeinen[4]), also von 0 verschiedenen Größen a_{11}, a_{21}, a_{31} dividiert, einfach $a_{11} = a_{21} = a_{31} = 1$ annehmen darf. Setzt man dann zur Abkürzung

$$\sum_{\nu=2}^{4} a_{\lambda\nu}x_\nu = \varphi_\lambda, \qquad (\lambda = 1, 2, 3),$$

so daß das Gleichungssystem übergeht in

$$(x_1 + \varphi_1)^2 = 0, \quad (x_1 + \varphi_2)^2 = 0, \quad (x_1 + \varphi_3)^2 = 0,$$

so muß zunächst von den Polynomen

$$\xi_1(x_1 + \varphi_1)^2 + \xi_2(x_1 + \varphi_2)^2 + \xi_3(x_1 + \varphi_3)^2,$$
$$\eta_1(x_1 + \varphi_1)^2 + \eta_2(x_1 + \varphi_2)^2 + \eta_3(x_1 + \varphi_3)^2$$

die Resultante nach x_1 gebildet werden; diese ist

$$\begin{vmatrix} \Sigma\xi_\lambda & 2\Sigma\xi_\lambda\varphi_\lambda & \Sigma\xi_\lambda\varphi_\lambda^2 & 0 \\ 0 & \Sigma\xi_\lambda & 2\Sigma\xi_\lambda\varphi_\lambda & \Sigma\xi_\lambda\varphi_\lambda^2 \\ \Sigma\eta_\lambda & 2\Sigma\eta_\lambda\varphi_\lambda & \Sigma\eta_\lambda\varphi_\lambda^2 & 0 \\ 0 & \Sigma\eta_\lambda & 2\Sigma\eta_\lambda\varphi_\lambda & \Sigma\eta_\lambda\varphi_\lambda^2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \Sigma\xi_\lambda & \Sigma\xi_\lambda\varphi_\lambda^2 \\ \Sigma\eta_\lambda & \Sigma\eta_\lambda\varphi_\lambda^2 \end{vmatrix}^2 - 4 \begin{vmatrix} \Sigma\xi_\lambda & \Sigma\xi_\lambda\varphi_\lambda \\ \Sigma\eta_\lambda & \Sigma\eta_\lambda\varphi_\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Sigma\xi_\lambda\varphi_\lambda & \Sigma\xi_\lambda\varphi_\lambda^2 \\ \Sigma\eta_\lambda\varphi_\lambda & \Sigma\eta_\lambda\varphi_\lambda^2 \end{vmatrix}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\xi_\lambda\eta_\mu - \eta_\lambda\xi_\mu = \tau_{\lambda\mu} \qquad (1 \leqq \lambda < \mu \leqq 3),$$

so nimmt sie nach leichter Ausrechnung die folgende Gestalt an:

$$\tau_{12}^2(\varphi_2 - \varphi_1)^4 + 2\tau_{12}\tau_{13}(\varphi_2 - \varphi_1)^2(\varphi_3 - \varphi_1)^2 + \tau_{13}^2(\varphi_3 - \varphi_1)^4 -$$
$$- 2\tau_{12}\tau_{23}(\varphi_2 - \varphi_1)^2(\varphi_3 - \varphi_2)^2 + 2\tau_{13}\tau_{23}(\varphi_3 - \varphi_1)^2(\varphi_3 - \varphi_2)^2 +$$
$$+ \tau_{23}^2(\varphi_3 - \varphi_2)^4.$$

Daher ist jetzt das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$(\varphi_2 - \varphi_1)^4 = 0, \quad (\varphi_2 - \varphi_1)^2(\varphi_3 - \varphi_1)^2 = 0, \quad (\varphi_3 - \varphi_1)^4 = 0,$$
$$(\varphi_2 - \varphi_1)^2(\varphi_3 - \varphi_2)^2 = 0, \quad (\varphi_3 - \varphi_1)^2(\varphi_3 - \varphi_2)^2 = 0, \quad (\varphi_3 - \varphi_2)^4 = 0.$$

Nun sind von den drei Differenzen $\varphi_2 - \varphi_1$, $\varphi_3 - \varphi_1$, $\varphi_3 - \varphi_2$ die ersten beiden zwei allgemeine Linearformen von x_2, x_3, x_4, die wir mit χ_1, χ_2 bezeichnen wollen; die dritte ist dann gleich $\chi_2 - \chi_1$. Das Gleichungssystem ist also das folgende:

$$\chi_1^4 = 0, \ \chi_1^2\chi_2^2 = 0, \chi_2^4 = 0, \ \chi_1^2(\chi_2 - \chi_1)^2 = 0, \chi_2^2(\chi_2 - \chi_1)^2 = 0, \ (\chi_2 - \chi_1)^4 = 0,$$

oder, was augenscheinlich dasselbe ist, da beim weiteren Eliminationsprozeß ja doch wieder allgemeine Linearkombinationen zu bilden sind:

$$\chi_1^4 = 0, \quad \chi_1^3\chi_2 = 0, \quad \chi_1^2\chi_2^2 = 0, \quad \chi_1\chi_2^3 = 0, \quad \chi_2^4 = 0.$$

Hier darf man, indem man χ_1 und χ_2 durch den Koeffizienten von x_2, der ja allgemein, also von 0 verschieden ist, dividiert, diesen zu 1 machen. Setzt man demgemäß

$$\chi_1 = x_2 + \psi_1, \quad \chi_2 = x_2 + \psi_2,$$

so sind ψ_1, ψ_2 Linearformen von x_3, x_4, und es muß jetzt die Resultante der Polynome

$$\sum_{\lambda=1}^{5} \xi_\lambda (x_2 + \psi_1)^{5-\lambda}(x_2 + \psi_2)^{\lambda-1}, \quad \sum_{\lambda=1}^{5} \eta_\lambda (x_2 + \psi_1)^{5-\lambda}(x_2 + \psi_2)^{\lambda-1}$$

nach x_2 gebildet werden. Unter Benutzung der Formel[5])

$$\mathrm{Res}\big(f(x), g(x)\big) = \mathrm{Res}\big(f(x - \psi), g(x - \psi)\big)$$

ist das auch die Resultante der Polynome

$$\sum_{\lambda=1}^{5} \xi_\lambda x_2^{5-\lambda}(x_2 + \psi_2 - \psi_1)^{\lambda-1}, \quad \sum_{\lambda=1}^{5} \eta_\lambda x_2^{5-\lambda}(x_2 + \psi_2 - \psi_1)^{\lambda-1},$$

also, wenn $\psi_2 - \psi_1 = \omega$ gesetzt wird, die achtreihige Sylvesterscbe Determinante

$$\begin{vmatrix} \Sigma\xi_\lambda & \Sigma\xi_\lambda\binom{\lambda-1}{1}\omega & \Sigma\xi_\lambda\binom{\lambda-1}{2}\omega^2 & \Sigma\xi_\lambda\binom{\lambda-1}{3}\omega^3 & \Sigma\xi_\lambda\binom{\lambda-1}{4}\omega^4 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma\eta_\lambda & \Sigma\eta_\lambda\binom{\lambda-1}{1}\omega & \Sigma\eta_\lambda\binom{\lambda-1}{2}\omega^2 & \Sigma\eta_\lambda\binom{\lambda-1}{3}\omega^3 & \Sigma\eta_\lambda\binom{\lambda-1}{4}\omega^4 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

wo die nicht hingeschriebenen 3 + 3 Zeilen in bekannter Weise durch zyklische Verschiebung nach rechts entstehen. Diese enthält nach dem bekannten Satz über das Gewicht einer Resultante[6]) den Faktor ω^{16}. Dabei ist ω eine Linearform von x_3, x_4, etwa $\omega = c_3x_3 + c_4x_4$. Es ist also noch die Gleichung

$$(c_3x_3 + c_4x_4)^{16} = 0$$

zu lösen, die wieder eine 16fache Wurzel hat statt einer 8fachen.

Als Anwendung seiner unmöglichen Vielfachheitsdefinition beantwortet Herr Severi die Frage, wann ein System $f_\nu(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ eine irreduzible Kurve *einfach gezählt* vorstellt, folgendermaßen (S. 104): „Zunächst ist dafür notwendig, daß die Polynome f_ν keinen gemeinsamen Teiler besitzen, und dann genügt dafür (und ist auch notwendig, falls die Gleichungen vorher einer allgemeinen Koordinatentransformation unterworfen wurden), daß die Polynome

[5]) Siehe z. B. [6], Satz 134 (S. 258).

[6]) Siehe z. B. [6], S. 207.

in x_2 und x_3[7]), aus welchen das *erste System von Eliminationsgleichungen* besteht, als größten gemeinsamen Teiler ein irreduzibles Polynom (nicht etwa eine höhere Potenz desselben) besitzen, und endlich, daß die Polynome in x_3[7]), welche das *zweite System von Eliminationsgleichungen* bilden, keine gemeinsamen Wurzeln *auf*weisen."

Dieser *Spezialfall* der SEVERIschen Definition kann natürlich mit dem auf einen ganz anderen Spezialfall sich beziehenden BÉZOUTschen Satz nicht im Widerspruch stehen und auch sonst keiner früher gegebenen Definition widersprechen, weil eben für diesen Spezialfall noch nie eine gegeben worden ist. Insofern kann daher kein Einwand gegen diese spezielle Definition erhoben werden: aber sie ist dann eben jetzt zum ersten Male gegeben worden und konnte früher noch von niemand berücksichtigt werden, so daß auch gegen niemand ein Vorwurf wegen Nichtberücksichtigung erhoben werden kann. Allerdings muß nach der vorausgehenden Erfahrung stark bezweifelt werden, ob die Definition zweckmäßig ist und ob man viel mit ihr anfangen kann.

Anmerkung bei der Korrektur: Mein Zweifel an der Zweckmäßigkeit ist inzwischen durch die völlige Überzeugung von der Unzweckmäßigkeit abgelöst worden, nachdem Herr VAN DER WAERDEN bemerkt hat, daß es irreduzible Kurven gibt, die nach dieser Definition sich überhaupt nicht „einfach gezählt" darstellen lassen, wieviele Gleichungen man auch nehmen mag[8]).

§ 3.

Bemerkungen zu einem Beweis des Bézoutschen Satzes.

Folgendes ist bekannt und kann z. B. in meiner Algebra [6], § 57 nachgelesen werden: Wenn die

$$f_\nu(x_1, \ldots, x_{k+1}) \qquad (\nu = 1, \ldots, k) \tag{1}$$

k homogene Polynome von $k+1$ Variabeln sind, und zwar f_ν vom Grad n_ν (>0), so ist die MERTENSsche Resultante

$$R = R\begin{pmatrix} f_1, f_2, \ldots, f_k, u_1 x_1 + \ldots + u_{k+1} x_{k+1} \\ x_1, x_2, \ldots, x_k, \qquad x_{k+1} \end{pmatrix} \tag{2}$$

als Polynom der Unbestimmten $u_1, \ldots, u_{k+1}$ entweder identisch 0 oder sie zerfällt in ein Produkt von $l = n_1 \ldots n_k$ Linearfaktoren:

$$R = \prod_{\lambda=1}^{l} (\xi_{1\lambda} u_1 + \xi_{2\lambda} u_2 + \cdots + \xi_{k+1,\lambda} u_{k+1}). \tag{3}$$

Im ersten Fall hat das Gleichungssystem

$$f_1 = 0, \ldots, f_k = 0 \tag{4}$$

---

[7]) Herr SEVERI rechnet hier inhomogen und setzt $x_4 = 1$.

[8]) Vgl. den Nachtrag am Schluß dieser Arbeit.

unendlich viele Lösungen; im zweiten Fall hat es nur endlich viele Lösungen, nämlich die l Lösungen

$$x_1 = \xi_{1\lambda},\ x_2 = \xi_{2\lambda},\ \ldots,\ x_{k+1} = \xi_{k+1,\lambda}$$

und keine anderen[9]). Diese l Lösungen sind im allgemeinen alle voneinander verschieden. In Spezialfällen können aber auch gleiche dabei sein, und wenn eine Lösung etwa p-mal unter den l angegebenen vorkommt so schreibt man ihr die Vielfachheit p zu.

In diesem sehr einfachen und klaren Tatbestand ist der Bézoutsche Satz enthalten und auch eine Definition der Vielfachheit für den Fall, daß ein System von k homogenen Gleichungen mit $k+1$ Unbekannten nur endlich viele Lösungen hat. Die Verwendung der Mertensschen Resultante ist hier das naturgemäß Gegebene, und der daraus entspringende Vielfachheitsbegriff ist eine einfache Verallgemeinerung dessen, was man im Fall *einer* Gleichung ($k = 1$) von jeher als Vielfachheit bezeichnet hat (vgl. [6], S. 292). In seinem Buch [9] versucht nun Herr Severi ohne die Mertenssche Resultante auszukommen und den Bézoutschen Satz einfach *aus der Kroneckerschen Eliminationstheorie* zu gewinnen. Das ist nun nach den Ausführungen des vorigen Paragraphen ganz unmöglich. Der Versuch ist aber auch insofern mißglückt, als dabei einige nicht ausgesprochene Hilfssätze als selbstverständlich angenommen werden, die teils falsch, teils richtig sind, im letzteren Fall aber zum Teil nicht oder wenigstens nicht leicht ohne die Mertenssche Resultante sich beweisen lassen, so daß man mit dem gleichen Kraftaufwand eigentlich schon bis zum Bézoutschen Satz selbst vordringen kann.

Herr Severi behandelt das allgemeine[10]) *inhomogene* System, setzt also $x_{k+1} = 1$, und beginnt dann auf S. 408 damit, daß er die Polynome f_r zu Produkten von Linearfaktoren mit allgemeinen[10]) Koeffizienten spezialisiert. Weil *nach* dieser Spezialisierung, wie ohne weiteres zu sehen, nur endlich viele, nämlich gerade l verschiedene Lösungen vorhanden sind, so wird geschlossen, daß es *vor* der Spezialisierung ebenfalls nur endlich viele Lösungen geben kann. Es ist nicht recht ersichtlich, auf welchem irgendwo bewiesenen Satz dieser Schluß beruht. Der Satz muß wohl folgendes besagen: *Wenn die Koeffizienten eines Gleichungssystems Polynome von Unbestimmten sind und wenn das System unendlich viele Lösungen hat, dann hat jedes System, das aus dem gegebenen durch irgendwelche Spezialisierung der Unbestimmten entsteht,*

[9]) Proportionale Lösungen gelten natürlich als dieselbe: die triviale Lösung $x_1 = x_2 = \cdots = x_{k+1} = 0$ zählt nicht mit.

[10]) generico. Die in [9], S. 329ff. und 403 gegebene Definition dieses Begriffes scheint mir etwas verschwommen. Erreicht werden soll damit natürlich dasselbe, was man heute in der Algebra dadurch zu erreichen pflegt, daß man *Unbestimmte* als Koeffizienten nimmt.

ebenfalls unendlich viele Lösungen. Leider ist er falsch, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$a x_1^2 x_2 - b x_1 = 0, \quad a x_1 x_2^2 - b x_2 = 0.$$

Solange a eine Unbestimmte ist, gibt es unendlich viele Lösungen, nämlich

$$x_1 = \text{beliebig} \neq 0, \quad x_2 = \frac{b}{a x_1};$$

wenn aber a zu 0 spezialisiert wird, gibt es nur *eine* Lösung: $x_1 = x_2 = 0$. Das System dieses Beispiels ist inhomogen. Da es aber zweckmäßig ist, beim Bézoutschen Satz homogene Gleichungen zu betrachten, so fragt es sich, ob der falsche Satz bei Beschränkung auf homogene Gleichungen vielleicht richtig wird. Das trifft nun tatsächlich zu, ist aber nicht selbstverständlich, sondern bedarf eines Beweises. Er kann in dem hier benötigten Fall, daß die Anzahl der Gleichungen um 1 kleiner ist als die der Unbekannten, mit Benutzung der Mertensschen Resultante folgendermaßen geführt werden:

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das System (4) unendlich viele Lösungen hat, besteht nach dem zu Beginn dieses Paragraphen erwähnten Satz darin, daß die Resultante (2) als Polynom der Unbestimmten u_ν identisch verschwindet[11]). Diese Bedingung besagt, daß die Koeffizienten der f_ν einem System von Bedingungsgleichungen genügen müssen[12]). Tun sie das aber, solange sie Polynome von Unbestimmten sind, so tun sie es auch, wenn diese Unbestimmten irgendwie spezialisiert werden, so daß die Bedingung, die auch hinreichend ist, auch nach der Spezialisierung erfüllt bleibt.

Nun geht der Beweis bei Severi folgendermaßen weiter: Da nach der Spezialisierung genau l verschiedene Lösungen vorhanden sind, die in einem nicht weiter erklärten Sinne als „einfach" angesehen werden, so ist das Schlußpolynom $R(x_k)$[13]), das sich ergibt, nachdem man im spezialisierten System nach der Kroneckerschen Methode die Unbekannten $x_1, \ldots, x_{k-1}$ sukzessive eliminiert hat, genau vom Grad l. Dieser Schluß ist aber nicht zwingend; es wäre sehr wohl denkbar, daß $R(x_k)$ von höherem Grad ist und daß das Verfahren die „einfachen" Lösungen in zu hoher Vielfachheit liefert, genau wie es im vorigen Paragraphen die achtfache Lösung 16fach lieferte. Aber ich habe mich durch vollständige Durchführung der Rechnung davon überzeugt, daß dieser Übelstand hier nicht eintritt und daß $R(x_k)$ wirklich vom Grad l

---

[11]) Dieselben Dienste würde auch die folgende Resultante leisten:

$$R\begin{pmatrix} f_1^*, \ldots, f_k^* \\ x_1, \ldots, x_k \end{pmatrix}, \text{ wobei } f_\nu^* = f_\nu(x_1, \ldots, x_k, u_1 x_1 + \cdots + u_k x_k).$$

[12]) Ist die Anzahl der Gleichungen nicht gleich k, ein Fall, der hier allerdings nicht benötigt wird, so gilt ein analoger Satz, wie der Vollständigkeit halber im letzten Paragraphen dieser Arbeit noch bewiesen werden soll.

[13]) Eigentlich $R(x_k, x_{k+1})$. Aber Herr Severi rechnet ja inhomogen ($x_{k+1} = 1$).

ist. Die Rechnung ist in formaler Hinsicht sehr mühsam und mag hier unterbleiben, doch ist ohne sie natürlich wieder eine Lücke im Beweis des Bézoutschen Satzes. Eine weitere Lücke steckt in der folgenden Fortsetzung des Beweises: Weil das im *Spezialfall* erhaltene Schlußpolynom $R(x_k)$ vom Grad l ist, so ist das im *allgemeinen Fall* sich ergebende Schlußpolynom ebenfalls vom Grad l. Hier wird also einfach das Prinzip der Erhaltung der Anzahl ohne ein Wort der Rechtfertigung angewandt, was mir höchst bedenklich scheint. Die Eliminationsprozesse im allgemeinen und im spezialisierten Fall brauchen sich durchaus nicht Schritt für Schritt zu entsprechen, und selbst wenn sie es bis zum Schluß tun, wäre es immer noch möglich, daß das Schlußpolynom, welches ja als der größte gemeinsame Teiler vieler Polynome definiert ist, zwar *nach* der Spezialisierung vom Grad l, *vor* der Spezialisierung aber von geringerem Grad ist, genau wie z. B. der größte gemeinsame Teiler der beiden Polynome $x_1^2 - a x_1 x_2$ und $x_1^2 - b x_1 x_2$ *nach* der Spezialisierung $a = b$ vom Grad 2, *vor* der Spezialisierung aber nur vom Grad 1 ist. Die Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Anzahl dürfte sich hier *vielleicht* rechtfertigen lassen durch Überlegungen, wie sie Herr van der Waerden an vielen Stellen angestellt und auf seinen Begriff der relationstreuen Spezialisierung gegründet hat[14]), wobei man aber auch nicht ohne wesentlich tiefer liegende Hilfsmittel auskommt, als Herr Severi sie anwenden will.

Wenn nun all diese Lücken geschlossen sind, hat man den Bézoutschen Satz für den allgemeinen Fall, d. h. mit Unbestimmten als Koeffizienten. Ob man daraus den Satz für spezialisierte Systeme einfach durch die Feststellung gewinnen kann, daß „eine μ-fache Wurzel eines spezialisierten Polynoms $R(x_k)$ als Grenzwert von μ einfachen Wurzeln des nicht spezialisierten $R(x_k)$ entsteht und daß $x_1, \ldots, x_{k-1}$ rationale Funktionen von x_k sind", scheint mir sehr zweifelhaft. Es könnten ja beispielsweise, um nur einen der möglichen Einwände zu erwähnen, die Koeffizienten dieser rationalen Funktionen im Zähler und Nenner nach der Spezialisierung sämtlich verschwinden. Vor allem aber müßte überhaupt erst eine klare Vielfachheitsdefinition gegeben werden.

§ 4.

Eine andere Vielfachheitsdefinition.

Bei Severi [11] findet sich in Nr. 10 für den Fall $k = 3$ noch eine zweite Vielfachheitsdefinition: *Die Flächen $f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0$ von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 besitzen in P die Schnittmultiplizität i, wenn von den $l = n_1 n_2 n_3$ getrennten Schnittpunkten allgemeiner „benachbarter" Flächen derselben Ordnungen $F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = 0$ bei Konvergenz $F_\nu \to f_\nu$ immer mindestens i*

[14]) Vgl. insbesondere [13], Kap. 6.

(oder überhaupt keine) nach P streben. Vorher spricht Herr SEVERI allerdings davon, daß die drei Flächen eine Kurve gemein haben sollen und daß der Punkt P auf dieser Kurve liegen soll. Bei der Formulierung der Definition ist aber diese Einschränkung nicht wiederholt, was ich begrüße, weil im Fall nur endlich vieler Schnittpunkte diese Definition und ebenso ihre naturgemäße Ausdehnung aufs mehrdimensionale Gebiet im Gegensatz zur früheren wirklich die richtige durch den BÉZOUTschen Satz geforderte Vielfachheit liefert. Das soll im gegenwärtigen Paragraphen gezeigt werden, während der nächste die unliebsamen Überraschungen bringen wird, die sich ergeben, wenn die Flächen eine Kurve gemein haben.

Herr SEVERI fährt folgendermaßen fort: *Man sagt nun, die drei Flächen, die eine irreduzible Kurve gemeinsam haben, schneiden sich längs dieser Kurve einfach, wenn sie in jedem Punkt der Kurve die Schnittmultiplizität* 1 *haben.* Mir persönlich scheint es ja ein bißchen obstinat, wenn man hier nicht wenigstens endlich viele Ausnahmepunkte zulassen und daher, falls eine Kurve vielleicht nur einen einzigen zweifach zählenden und sonst lauter einfach zählende Punkte hat, gleich die ganze Kurve zweifach zählen will; aber immerhin, das ist Geschmacksache, logisch ist nichts einzuwenden.

Es soll jetzt zunächst die Ausdehnung der Definition aufs mehrdimensionale Gebiet gebracht werden *Sei*

$$f_\nu(x_1, \ldots, x_{k+1}) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, k) \tag{1}$$

ein homogenes Gleichungssystem mit komplexen Zahlen als Koeffizienten und sei f_ν *vom Grad* $n_\nu (> 0)$. *Ferner sei*

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k+1} \tag{2}$$

eine aus komplexen Zahlen bestehende Lösung[15]). *Dann werden wir beweisen, daß man in mannigfacher Weise die Koeffizienten eines „benachbarten" homogenen Systems*

$$F_\nu(x_1, \ldots, x_{k+1}) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, k) \tag{3}$$

derart gegen die Koeffizienten des Systems (1) *konvergieren lassen kann*[16]), *daß das System* (3) *dauernd* l *verschiedene Lösungen hat, wo* $l = n_1 n_2 \ldots n_k$ *ist, und daß eine von ihnen gegen die Lösung* (2) *des Systems* (1) *konvergiert. Ist dann* p *die größte Zahl derart, daß bei jedem solchen Grenzprozeß immer wenigstens* p *Lösungen gegen* (2) *konvergieren, so daß bei einem geeigneten Grenzprozeß*

---

[15]) Bei unendlich vielen Lösungen gibt es stets auch solche, die noch der Gleichung $\sum u_\nu x_\nu = 0$, wo die u_ν Unbestimmte sind, genügen und daher keine komplexen Zahlen sind; solche Lösungen müssen von der gegenwärtigen Betrachtung natürlich ausgeschlossen werden.

[16]) Wegen der Homogenität ist F_ν natürlich von selbst vom gleichen Grad wie f_ν; sonst hätte der Grenzübergang keinen Sinn.

auch nur p Lösungen das tun, so wird der Lösung (2) *die Vielfachheit p zugeschrieben.*

Wir zeigen jetzt, daß es benachbarte Polynome F_ν von der verlangten Art stets gibt, so daß die Definition nie versagt. Zu dem Zweck betrachten wir die k Produkte

$$\Phi_\nu(x_1, \ldots, x_{k+1}) = \prod_{\lambda=1}^{n_\nu} (a_{\nu 1 \lambda} x_1 + a_{\nu 2 \lambda} x_2 + \cdots + a_{\nu, k+1, \lambda} x_{k+1}) \tag{4}$$
$$(\nu = 1, \ldots, k).$$

Dabei seien die $a_{\nu \mu \lambda}$ komplexe Zahlen, die der Bedingung

$$a_{\nu 1 1} \xi_1 + a_{\nu 2 1} \xi_2 + \cdots + a_{\nu, k+1, 1} \xi_{k+1} = 0 \tag{5}$$

genügen und im übrigen so beschaffen sind, daß das System

$$\Phi_\nu(x_1, \ldots, x_{k+1}) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, k) \tag{6}$$

l verschiedene Lösungen hat (die man erhält, indem man aus jedem Produkt einen Faktor gleich 0 setzt). Für die Verschiedenheit der l Lösungen ist nur nötig, daß gewisse Determinantenrelationen zwischen den $a_{\nu \mu \lambda}$, die auch unter Berücksichtigung von (5) keine Identitäten sind, *nicht* bestehen; die Bedingung ist also stets erfüllbar. Unter den l Lösungen von (6) ist wegen (5) natürlich auch die Lösung (2) vorhanden.

Nach dem Satz zu Beginn des § 3 ist die Resultante

$$R\begin{pmatrix} \Phi_1, \ldots, \Phi_k, & u_1 x_1 + \cdots + u_{k+1} x_{k+1} \\ x_1, \ldots, x_k, & x_{k+1} \end{pmatrix} \tag{7}$$

nicht identisch 0. Daher ist auch die Resultante

$$R\begin{pmatrix} f_1 + \varepsilon \Phi_1, \ldots, f_k + \varepsilon \Phi_k, & u_1 x_1 + \cdots + u_{k+1} x_{k+1} \\ x_1, \ldots, x_k, & x_{k+1} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

die ein Polynom von ε ist, bei dem die höchste Potenz von ε die Resultante (7) zum Koeffizienten hat, höchstens für endlich viele Werte von ε identisch 0. Beim Grenzprozeß $\varepsilon \to 0$ bleibt daher (8) dauernd von 0 verschieden. Ferner ist die Diskriminante

$$\mathrm{Discr}\,(\Phi_1, \ldots, \Phi_k), \tag{9}$$

weil die l Lösungen von (6) alle voneinander verschieden sind, von 0 verschieden[17]), und folglich ist auch die Diskriminante

$$\mathrm{Discr}\,(f_1 + \varepsilon \Phi_1, \ldots, f_k + \varepsilon \Phi_k), \tag{10}$$

die ein Polynom von ε ist, bei dem die höchste Potenz von ε die Diskriminante (9) zum Koeffizienten hat, für $\varepsilon \to 0$ dauernd von 0 verschieden. Somit hat das System

$$f_\nu + \varepsilon \Phi_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, k) \tag{11}$$

---

[17]) Die Definition und die hier gebrauchte Eigenschaft der Diskriminante findet man bei KÖNIG [2], S. 323 und 338.

für $\varepsilon \to 0$ genau die von dem System (3) verlangte Eigenschaft. Dabei hat sogar eine der Lösungen von (11) nicht nur die Eigenschaft, gegen die Lösung (2) des Systems (1) zu konvergieren, sondern sie ist während des ganzen Grenzprozesses genau gleich der Lösung (2).

Nun nehmen wir an, daß das System (1) nur endlich viele Lösungen hat und daß die Lösung (2) nach der üblichen zu Beginn des § 3 gegebenen Definition etwa p-fach ist. Wir wollen zeigen, daß ihr dann nach der neuen Definition ebenfalls die Vielfachheit p zukommt. Nach dem Satz zu Beginn des § 3 ist jetzt

$$(12)\quad R\begin{pmatrix} f_1, \ldots, f_k, u_1 x_1 + \cdots + u_{k+1} x_{k+1} \\ x_1, \ldots, x_k, \qquad x_{k+1} \end{pmatrix} = \prod_{\lambda=1}^{l} (\xi_{1\lambda} u_1 + \cdots + \xi_{k+1,\lambda} u_{k+1}),$$

wobei von den l Lösungen

$$(13)\qquad \xi_{1\lambda}, \xi_{2\lambda}, \ldots, \xi_{k+1,\lambda} \qquad (\lambda = 1, \ldots, l)$$

etwa die p Lösungen

$$(14)\qquad \xi_{1\lambda}, \xi_{2\lambda}, \ldots, \xi_{k+1,\lambda} \qquad (\lambda = 1, \ldots, p)$$

mit der Lösung (2) übereinstimmen mögen. Eventuell durch lineare Transformation der Unbekannten kann man erreichen, daß in jeder Lösung speziell $\xi_{k+1,\lambda} \neq 0$ ist. Wir denken das gemacht und dürfen dann $\xi_{k+1,\lambda} = 1$ setzen, wonach die Formel (12) übergeht in

$$(15)\quad R\begin{pmatrix} f_1, \ldots, f_k, u_1 x_1 + \cdots + u_{k+1} x_{k+1} \\ x_1, \ldots, x_k, \qquad x_{k+1} \end{pmatrix} = C \cdot \prod_{\lambda=1}^{l} (\xi_{1\lambda} u_1 + \cdots + \xi_{k\lambda} u_k + u_{k+1}),$$

wo C eine von 0 verschiedene Konstante ist. Die l Lösungen des Systems (3) seien

$$(16)\qquad \eta_{1\lambda}, \eta_{2\lambda}, \ldots, \eta_{k+1,\lambda} \qquad (\lambda = 1, \ldots, l).$$

Wenn wir zeigen können, daß von diesen bei jedem Grenzprozeß $F_\nu \to f$ bei geeigneter Wahl des in jeder Lösung steckenden willkürlichen Proportionalitätsfaktors genau p gegen die Lösung (2) mit $\xi_{k+1} = 1$ konvergieren, so wird die Übereinstimmung beider Definitionen bewiesen sein. Das wird gemacht sein, wenn wir sogar zeigen können, daß die l Lösungen (16) bei geeigneter Numerierung gegen die l Lösungen (13) mit $\xi_{k+1,\lambda} = 1$ konvergieren.

Nun ist analog zu (12)

$$(17)\quad R\begin{pmatrix} F_1, \ldots, F_k, u_1 x_1 + \cdots + u_{k+1} x_{k+1} \\ x_1, \ldots, x_k, \qquad x_{k+1} \end{pmatrix} = \prod_{\lambda=1}^{l} (\eta_{1\lambda} u_1 + \ldots + \eta_{k+1,\lambda} u_{k+1}),$$

und da bei dem auszuführenden Grenzprozeß die Koeffizienten von F_ν gegen die von f_ν konvergieren, so folgt aus (15) und (17) die Beziehung

$$(18)\quad \lim \prod_{\lambda=1}^{l} (\eta_{1\lambda} u_1 + \cdots + \eta_{k+1,\lambda} u_{k+1}) = C \cdot \prod_{\lambda=1}^{l} (\xi_{1\lambda} u_1 + \cdots + \xi_{k\lambda} u_k + u_{k+1})$$

in dem Sinne, daß die Koeffizienten des links stehenden Polynoms der u_ν gegen die Koeffizienten des rechts stehenden Polynoms konvergieren.

Um hieraus folgern zu können, daß auch die $\eta_{\nu\lambda}$ gegen die $\xi_{\nu\lambda}$ konvergieren, schicken wir die Bemerkung voraus, daß man eine Matrix von komplexen (sogar ganzen rationalen) Zahlen mit k Spalten und unendlich vielen Zeilen

$$(19)\quad \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3k} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{matrix} \right\|$$

so angeben kann, daß alle Determinanten von 0 verschieden sind. In der Tat braucht man nur in die erste Zeile irgendwelche von 0 verschiedene Zahlen zu setzen. Alsdann kann man die Zahlen der zweiten Zeile der Reihe nach so wählen, daß die Determinanten der ersten zwei Zeilen sämtlich $\neq 0$ sind; man braucht ja nur bei jeder neu zu wählenden Zahl dafür zu sorgen, daß sie endlich vielen Gleichungen *nicht* genügt. Sodann kann man ähnlich die Zahlen der dritten Zeile der Reihe nach so wählen, daß die Determinanten der ersten drei Zeilen sämtlich $\neq 0$ sind usw. Dabei ist jede neu zu wählende Zahl immer nur der Bedingung unterworfen, daß sie endlich vielen Gleichungen *nicht* genügt.

Nun ergibt sich aus (18) speziell

$$\lim \prod_{\lambda=1}^{l} \eta_{k+1,\lambda} = C.$$

Daher sind die $\eta_{k+1,\lambda}$ von 0 verschieden, so daß wir $\eta_{k+1,\lambda} = 1$ setzen dürfen, wonach (18) übergeht in

$$(20)\quad \lim \prod_{\lambda=1}^{l} (\eta_{1\lambda} u_1 + \cdots + \eta_{k\lambda} u_k + u_{k+1}) = \prod_{\lambda=1}^{l} (\xi_{1\lambda} u_1 + \cdots + \xi_{k\lambda} u_k + u_{k+1}).$$

In dieser Formel spezialisieren wir jetzt die Variabeln $u_1, \ldots, u_k$ zu den Zahlen der μ-ten Zeile der Matrix (19). Dadurch entsteht die Formel

$$\lim \prod_{\lambda=1}^{l} (\eta_{1\lambda} a_{\mu 1} + \cdots + \eta_{k\lambda} a_{\mu k} + u_{k+1}) = \prod_{\lambda=1}^{l} (\xi_{1\lambda} a_{\mu 1} + \cdots + \xi_{k\lambda} a_{\mu k} + u_{k+1}),$$

die so zu verstehen ist, daß die Koeffizienten des linksstehenden Polynoms von u_{k+1} gegen die Koeffizienten des rechtsstehenden Polynoms konvergieren. Da aber die Wurzeln eines Polynoms stetige Funktionen der Koeffizienten sind[18]), ist daraus zu schließen, daß die l Zahlen

$$\eta_{1\lambda} a_{\mu 1} + \cdots + \eta_{k\lambda} a_{\mu k}$$

in geeigneter Reihenfolge, die für jeden der unendlich vielen Werte μ separat festzulegen ist, gegen die l Zahlen

$$\xi_{1\lambda} a_{\mu 1} + \cdots + \xi_{k\lambda} a_{\mu k}$$

konvergieren. Da das für unendlich viele Werte μ gilt, kann man gewiß k Werte μ angeben, für welche die festzulegende Reihenfolge dieselbe ist, etwa für $\mu = \mu_1, \ldots, \mu_k$. Dann hat man

$$\lim (\eta_{1\lambda} a_{\mu 1} + \cdots + \eta_{k\lambda} a_{\mu k}) = \xi_{1\lambda} a_{\mu 1} + \cdots + \xi_{k\lambda} a_{\mu k}$$
$$\text{für } \mu = \mu_1, \ldots, \mu_k;\ \lambda = 1, \ldots, l.$$

Da aber die Determinante der a_{μ_ν} von 0 verschieden ist, folgt hieraus

$$\lim \eta_{\nu\lambda} = \xi_{\nu\lambda} \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, k;\ \lambda = 1, \ldots, l.$$

W. z. b. w.

§ 5.

Die zweite Vielfachheitsdefinition im Fall einer nicht isolierten Lösung.

Es soll jetzt die im vorigen Paragraphen besprochene Definition an einigen Beispielen von Gleichungssystemen mit unendlich vielen Lösungen erprobt werden. Geometrisch handelt es sich bei allen Beispielen um drei Flächen im Raum, die die Gerade $x_1 = x_2 = 0$ gemein haben, und zwar *berühren* sie sich entweder längs dieser Geraden oder die Gerade ist für wenigstens eine der Flächen *Doppellinie*. Man wird daher gewiß für alle Punkte dieser Geraden mindestens die Vielfachheit 2 wünschen; *trotzdem liefert aber die gegebene Definition immer nur die Vielfachheit* 1.

Erstes Beispiel.

$$x_1^2 - x_2 x_3 = 0, \quad x_1^2 - 2 x_2 x_3 = 0, \quad x_1^2 - x_2 x_4 = 0.$$

Gleichbedeutend mit diesem System (das nur der hübscheren geometrischen Deutung wegen in dieser Gestalt geschrieben wurde) ist natürlich das folgende:

$$x_1^2 = 0, \quad x_2 x_3 = 0, \quad x_2 x_4 = 0.$$

---

[18]) Ein besonders durchsichtiger Beweis dafür findet sich bei SEVERI [9], S. 344—345.

Um die Lösung 0, 0, 1, 0 als einfach zu erkennen, betrachten wir das benachbarte System[19])

$$(x_1 - \varepsilon x_4)(x_1 - \varepsilon x_3) = 0,$$
$$(x_2 - \varepsilon x_4)(x_3 - \varepsilon x_1) = 0,$$
$$x_2 x_4 + \varepsilon (x_1 x_2 - x_2^2 - x_4^2) + 2\varepsilon^2 x_1 x_3 = 0$$

für $\varepsilon \to 0$. Es hat acht verschiedene Lösungen:

1:	0,	0,	1,	0	
2:	ε,	ε,	0,	1	
3:	ε,	$-\varepsilon$,	1,	-1	
4:	ε,	2ε,	1,	2	
5, 6:	0,	λ,	0,	μ	mit $\varepsilon\lambda^2 - \lambda\mu + \varepsilon\mu^2 = 0$
7, 8:	$\varepsilon\lambda$,	μ,	$\varepsilon^2\lambda$,	λ	mit $(\varepsilon - 2\varepsilon^5)\lambda^2 - (1 + \varepsilon^2)\lambda\mu + \varepsilon\mu^2 = 0$.

Nur *eine* davon, die erste, konvergiert für $\varepsilon \to 0$ gegen 0, 0, 1, 0. Durch Rollentauschung von x_3 mit x_4 ergibt sich auch die Lösung 0, 0, 0, 1 als einfach.

Um schließlich die Lösung 0, 0, 1, a für $a \neq 0$ ebenfalls als einfach zu erkennen, setzen wir $x_4 - a x_3 = x_4'$. Dann ist das System gleichbedeutend mit

$$x_1^2 = 0, \quad x_2 x_3 = 0, \quad x_2 x_4' = 0$$

und es handelt sich um die Lösung 0, 0, 1, 0. Man kann daher wie oben verfahren mit x_4' an Stelle von x_4. Damit ist für alle Lösungen, bei denen $x_1 = x_2 = 0$ ist, die Vielfachheit 1 nachgewiesen.

Zweites Beispiel.

$$x_1^2 - x_2 x_4 = 0, \quad 2x_1^2 - x_2 x_4 = 0, \quad 3x_1^2 - x_2 x_4 = 0.$$

Gleichbedeutend mit diesem System ist das folgende:

$$x_1^2 - x_2 x_4 = 0, \quad x_1^2 = 0, \quad x_1^2 = 0.$$

Um bei diesem die Lösung 0, 0, 0, 1 als einfach zu erkennen, betrachten wir das benachbarte System[20])

$$x_1^2 - x_2 x_4 = 0,$$
$$(x_1 + \varepsilon x_3)(x_1 + \varepsilon x_3 + \varepsilon x_4) = 0.$$
$$(x_1 - \varepsilon x_2)(x_1 + \varepsilon x_3 + \varepsilon x_4 - \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^6 x_4) = 0$$

---

[19]) Aus diesem kann man natürlich durch Linearkombination auch wieder ein gleichbedeutendes zum ursprünglichen System benachbartes bilden. Analoges gilt auch späterhin bei all diesen Beispielen.

[20]) Man sieht jetzt, warum es nötig war, die Gleichung $x_1^2 = 0$ oben zweimal zu schreiben. Wesentlich ist, daß man aus dem benachbarten System durch Linear-

für $\varepsilon \to 0$. Es hat acht verschiedene Lösungen:

$$\begin{array}{rcccc}
1: & 0, & 0, & 0, & 1 \\
2: & -\varepsilon, & 1, & 1, & \varepsilon^2 \\
3: & 0, & 0, & -1, & 1 \\
4: & -\varepsilon, & 1, & 1-\varepsilon^2, & \varepsilon^2 \\
5,6: & \pm\varepsilon^2, & \varepsilon^4, & -1\mp\varepsilon, & 1 \\
7,8: & -\varepsilon, & \pm\sqrt{\varepsilon+\varepsilon^6}, & 1, & \pm\dfrac{\varepsilon^2}{\sqrt{\varepsilon+\varepsilon^6}}.
\end{array}$$

Nur *eine* davon, die erste, konvergiert für $\varepsilon \to 0$ gegen 0, 0, 0, 1.

Um die Lösung 0, 0, a, 1 für $a \neq 0$ ebenfalls als einfach zu erkennen, setzen wir $x_3 - a x_4 = x_3'$. Das System bleibt dann, da x_3 nicht darin vorkommt, unverändert und es handelt sich um die Lösung 0, 0, 0, 1. Man kann daher verfahren wie oben mit x_3' an Stelle von x_3.

Um schließlich auch die Lösung 0, 0, 1, 0 als einfach nachzuweisen, betrachten wir das benachbarte System

$$\begin{gathered}
x_1^2 - (x_2 + \varepsilon x_3) x_4 = 0, \\
(x_1 - \varepsilon x_2 - \varepsilon^2 x_4)(x_1 - \varepsilon x_2 - \varepsilon x_3) = 0, \\
(x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_4)(x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon x_3) = 0
\end{gathered}$$

für $\varepsilon \to 0$. Es hat wieder acht verschiedene Lösungen:

$$\begin{array}{rcccc}
1: & 0, & 0, & 1, & 0 \\
2: & 0, & -\varepsilon, & 1, & 1 \\
3: & 0, & 0, & 0, & 1 \\
4: & 0, & -1, & 1, & 0 \\
5,6: & \varepsilon\lambda + \varepsilon^2\mu, & \lambda - \varepsilon\mu, & -2\lambda, & 2\mu \\
7,8: & \varepsilon\lambda + \varepsilon^2\mu, & -\lambda + \varepsilon\mu, & 2\lambda, & -2\mu
\end{array}
\Big\} \text{ mit } \varepsilon^2\lambda^2 - (2 - 4\varepsilon - 2\varepsilon^3)\lambda\mu + (2\varepsilon + \varepsilon^4)\mu^2 = 0.$$

Nur *eine* davon, die erste, konvergiert für $\varepsilon \to 0$ gegen 0, 0, 1, 0. Damit ist wieder für alle Lösungen, bei denen $x_1 = x_2 = 0$ ist, die Vielfachheit 1 nachgewiesen.

Drittes Beispiel.

$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0, \quad x_1 x_4 = 0, \quad x_2 x_4 = 0.$$

---

kombination wieder ein gleichbedeutendes zum ursprünglichen System benachbartes bilden kann. Während aber die drei Flächen des ursprünglichen Systems einem Büschel angehören, gilt das für die benachbarten Flächen nicht.

Um hier die Lösung 0, 0, 0, 1 als einfach zu erkennen, betrachten wir das benachbarte System

$$(x_1 + x_2 - \varepsilon x_3)(x_1 - x_2 - \varepsilon x_4) = 0,$$
$$x_1(x_4 + 2\varepsilon x_2 - \varepsilon x_3) = 0,$$
$$x_2 x_4 + \varepsilon(x_1^2 + x_2^2 - x_2 x_3) = 0$$

für $\varepsilon \to 0$. Es hat acht verschiedene Lösungen:

1:	0,	0,	0,	1
2:	0,	ε,	1,	$\varepsilon - \varepsilon^2$
3:	0,	0,	1,	0
4:	0,	$-\varepsilon^2$,	$1 - \varepsilon^2$,	ε
5:	-1,	1,	0,	-2ε
6:	ε,	ε,	2,	$2\varepsilon - 2\varepsilon^2$
7:	1,	1,	2,	0
8:	$-\varepsilon^2$,	ε^2,	$2\varepsilon^2 - 2$,	-2ε.

Nur *eine* davon, die erste, konvergiert für $\varepsilon \to 0$ gegen 0, 0, 0, 1. Um auch die Lösung 0, 0, a, 1 als einfach zu erkennen, setzen wir $x_3 - a x_4 = x_3'$. Dann bleibt das System, da x_3 nicht darin vorkommt, unverändert, und es handelt sich dann um die Lösung 0, 0, 0, 1. Man kann daher verfahren wie oben mit x_3' an Stelle von x_3.

Um schließlich auch die Lösung 0, 0, 1, 0 als einfach zu erkennen, betrachten wir das mit dem gegebenen gleichbedeutende System

$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0, \quad (x_1 + x_2) x_4 = 0, \quad (x_1 - x_2) x_4 = 0$$

und dazu das benachbarte

$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2 + \varepsilon x_3) = 0,$$
$$(x_1 + x_2 - \varepsilon x_4)(x_4 - \varepsilon x_3) = 0,$$
$$(x_1 - x_2) x_4 - \varepsilon(x_1 x_3 - x_2 x_3 - x_3 x_4) - \varepsilon^2[(x_1 - x_2)^2 - (x_1 + x_2) x_3] = 0$$

für $\varepsilon \to 0$. Es hat wieder acht verschiedene Lösungen:

1:	0,	0,	1,	0
2:	1,	-1,	-2ε,	0
3:	1,	-1,	2,	2ε
4:	1,	-1,	-2,	-2ε
5:	ε,	ε,	0,	2
6:	$\varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3$,	$\varepsilon - \varepsilon^2 - \varepsilon^3$,	-2ε,	$2 - 2\varepsilon^2$
7:	1,	1,	0,	0
8:	$1 + \varepsilon - \varepsilon^2$,	$1 - \varepsilon - \varepsilon^2$,	-2,	-2ε.

Nur *eine* davon, die erste, konvergiert für $\varepsilon \to 0$ gegen 0, 0, 1, 0. Damit ist für alle Lösungen, bei denen $x_1 = x_2 = 0$ ist, die Vielfachheit 1 nachgewiesen.

Viertes Beispiel.

$$x_1^2 = 0, \quad x_2^2 = 0, \quad x_2 x_3 = 0.$$

Hier wird man wegen der ersten Gleichung wohl jede Lösung mindestens zweifach zählen wollen, wegen der zweiten Gleichung vielleicht sogar vierfach, falls das nicht als zu hoch empfunden wird, weil der Faktor x_2 in der dritten Gleichung nur einfach auftritt. Aber für die spezielle Lösung 0, 0, 0, 1 dürfte, da bei ihr beide Faktoren der dritten Gleichung verschwinden, gewiß die Vielfachheit 8 angemessen sein. Ohne mich mit den anderen aufzuhalten, will ich aber jetzt gerade für diese letzte Lösung die Vielfachheit 1 nachweisen. Dazu dient das benachbarte System

$$(x_1 - \varepsilon x_3)(x_1 + \varepsilon x_4) = 0,$$
$$(x_2 - \varepsilon^3 x_3)(x_2 + \varepsilon^3 x_3 - \varepsilon^3 x_4) = 0,$$
$$x_2 x_3 + \varepsilon (x_1^2 + x_2 x_4) - \varepsilon^3 x_3 x_4 = 0$$

für $\varepsilon \to 0$. Es hat acht verschiedene Lösungen:

1:	0,	0,	0,	1	
2:	$\varepsilon - \varepsilon^2$,	$\varepsilon^3 - \varepsilon^4$,	$1 - \varepsilon$,	2	
3:	ε,	0,	1,	1	
4:	ε,	$-\varepsilon^3$,	1,	0	
5, 6:	$-\varepsilon$,	$\varepsilon^3 \lambda$,	λ,	1	mit $\lambda^2 - (1 - \varepsilon)\lambda + 1 = 0$
7:	$-\varepsilon$,	0,	1,	1	
8:	$-\varepsilon$,	$2\varepsilon^3 + \varepsilon^4$,	$-1 - \varepsilon$,	1	

Nur *eine* davon, die erste, konvergiert für $\varepsilon \to 0$ gegen 0, 0, 0, 1.

§ 6.

Zusammenfassung und Klarstellung.

Diese Beispiele mögen genügen. Ich habe noch einige weitere, auch höheren Grades, bei denen höhere Vielfachheit zu erwarten war, geprüft, stets mit negativem Erfolg. Zwar konnte ich nicht immer die Vielfachheit 1 nachweisen, weil mir die Aufstellung geeigneter benachbarter Systeme, die das erzwingen, nicht gelang. Andererseits konnte ich aber auch in keinem einzigen Fall beweisen, daß es solche benachbarte Systeme nicht gibt. Daher ist vielleicht die Vermutung nicht ganz unberechtigt (von deren Beweis ich allerdings weit entfernt bin), daß bei dieser Definition die Vielfachheit einer nicht isolierten Lösung *stets* gleich 1 ist, so daß dieser Begriff überhaupt gegenstands-

los ist. Übrigens würde die in § 2 als unmöglich nachgewiesene Vielfachheitsdefinition sich hier besser bewähren und eine höhere Vielfachheit liefern. Bei den ersten beiden Beispielen ist es z. B. so, daß die Polynome des ersten Systems von Eliminationsgleichungen ein Quadrat als gemeinsamen Teiler haben. Die beiden Definitionen decken sich also hier ebensowenig wie im Fall endlich vieler Lösungen. Jedenfalls dürfte aus § 2 und 5 zur Genüge hervorgehen, *daß die beiden von Herrn SEVERI gegebenen Vielfachheitsdefinitionen einander widersprechen und daß keine von beiden das leistet, was man erwartet.* Abschließend ist also festzustellen, *daß es eine brauchbare ganz allgemein gültige Vielfachheitsdefinition heute nicht gibt*; es gibt nicht einmal eine auf den Spezialfall von drei (und erst recht nicht von mehr als drei) homogenen Gleichungen mit vier Unbekannten und unendlich vielen Lösungen bezügliche.

Welche Schlußfolgerung ergibt sich nun daraus für den KRONECKERschen Satz und die VAHLENsche Quintik? Man muß mehrere Aussagen scharf auseinanderhalten:

Satz 1 (richtig). *Wenn ein System von beliebig vielen homogenen Gleichungen mit $k+1$ Unbekannten endlich oder unendlich viele Lösungen hat, so gibt es stets ein System von $k+1$ oder weniger homogenen Gleichungen, das genau dieselben Lösungen hat.*

Satz 2 (heute sinnlos). *Wenn ein System von beliebig vielen homogenen Gleichungen mit $k+1$ Unbekannten endlich oder unendlich viele Lösungen hat, so gibt es stets ein System von $k+1$ oder weniger homogenen Gleichungen, das genau dieselben Lösungen hat, und zwar jede mit der gleichen Vielfachheit wie das ursprüngliche System.*

Satz 3 (richtig). *Eine irreduzible Mannigfaltigkeit im R_k kann stets als Durchschnitt von $k+1$ oder weniger Flächen*[21]) *des R_k dargestellt werden.*

Satz 4 (zweifelhaft, für $k=3$ auch nicht eindeutig). *Eine irreduzible Mannigfaltigkeit im R_k kann stets als einfacher Durchschnitt von $k+1$ oder weniger Flächen des R_k dargestellt werden.*

Satz 5 (richtig). *Die VAHLENsche Quintik kann als Durchschnitt von drei Flächen des R_3 dargestellt werden.*

Satz 6 (nicht eindeutig und zweifelhaft). *Die VAHLENsche Quintik kann als einfacher Durchschnitt von drei Flächen des R_3 dargestellt werden.*

Zu diesen Sätzen ist folgendes zu sagen:

Der Satz 1 ist der allgemeine KRONECKERsche Satz, der z. B. in meiner Arbeit [8] bewiesen ist.

---

[21]) Unter Flächen des R_k sind natürlich *algebraische* Flächen (Hyperflächen) zu verstehen.

Der Satz 2 hat nur dann einen Sinn, wenn man einen allgemein gültigen Vielfachheitsbegriff hat. Da das heute nicht der Fall ist, ist der Satz heute sinnlos und er bleibt solange sinnlos, bis der fehlende Begriff geschaffen ist. Erst dann kann die Frage gestellt werden, ob der Satz richtig oder falsch ist.

Der Satz 3 ist lediglich die geometrische Fassung eines Spezialfalles von Satz 1, also richtig.

Der Satz 4 ist die geometrische Fassung eines Spezialfalles von Satz 2. Er ist solange sinnlos, wie der darin vorkommende Begriff „einfach" nicht definiert ist; das war mindestens bis zum Erscheinen der SEVERIschen Arbeit [11] der Fall. Durch diese Arbeit bekommt der Satz, wenn man die darin angegebene oben am Schluß des § 2 erwähnte Definition annehmen will (was ich aber nicht empfehle), einen Sinn. Ob er dann aber richtig oder falsch ist, vermag ich nicht zu sagen; jedenfalls ist er nie bewiesen worden[22]). Im Fall $k = 3$ kann man auch die zweite SEVERIsche Definition, die oben in § 4 und 5 besprochen wurde, annehmen (was ich aber auch nicht empfehle). Dann bekommt der Satz ebenfalls einen Sinn, aber einen anderen. Auch in diesem Sinn ist er nie bewiesen worden, und ich weiß nicht, ob er richtig oder falsch ist.

Der Satz 5 ist in meiner Arbeit [7] algebraisch bewiesen und der Beweis ist von Herrn SEVERI [11] in ein geometrisches Gewand gekleidet worden.

Der Satz 6 ist von mir nie behauptet und von Herrn SEVERI [11] als falsch bezeichnet worden. Aber der Satz ist überhaupt wieder solange sinnlos, wie der darin vorkommende Begriff „einfach" nicht definiert ist, was wieder mindestens bis zum Erscheinen der SEVERIschen Arbeit [11] der Fall war. Wenn nun, nachdem diese Arbeit erschienen ist, eine der beiden Definitionen angenommen wird, so bekommt der Satz einen Sinn, und zwar bei der ersten Definition einen anderen als bei der zweiten. Die Frage, ob er dann richtig oder falsch ist, dürfte in jedem der beiden Sinne sehr schwer zu entscheiden sein. Die speziellere Frage, ob gerade die in meiner Arbeit [7] angegebenen drei Flächen die Kurve als „einfachen" Durchschnitt enthalten, scheint Herr SEVERI im Sinne der ersten Definition geprüft und eine verneinende Antwort darauf gefunden zu haben. Im Sinn der zweiten Definition habe ich es versucht, ohne bis jetzt zu einem Resultat zu gelangen, und auch in der SEVERIschen Arbeit kann ich eine Klärung der Frage unter wirklicher Heranziehung der zweiten Definition nicht finden. Aber auch wenn diese Frage in beiden Sinnen zu verneinen sein sollte, so wäre damit noch lange nicht gesagt, daß es nicht drei andere Flächen gibt, die die Kurve im einen oder anderen Sinne

[22]) Das war der Stand meines Wissens am 19. Juli 1943. Inzwischen hat aber Herr VAN DER WAERDEN beweisen können, daß der Satz falsch ist. Vgl. den Nachtrag am Schluß dieser Arbeit [Zusatz bei der Korrektur].

als „einfachen" Durchschnitt enthalten. Der Satz 6 kann also heute auf keinen Fall als falsch erklärt werden, vielmehr ist die (nach meiner Meinung übrigens nicht sehr wichtige) Frage, ob er in einem der beiden Sinne richtig oder falsch ist, zur Zeit noch offen.

Herr Severi hat gegen meinen Satz 5 den merkwürdigen Einwand erhoben, daß er nur richtig sei, wenn man sich auf einen falschen Standpunkt stelle, daß aber vom richtigen Standpunkt aus nur der Satz 6 in Frage komme und daß der nicht bewiesen, ja sogar falsch sei. Mit derselben Logik hätte er schon längst gegen die Sätze 1 und 3 den Einwand erheben müssen, daß sie nur richtig seien, wenn man sich auf einen falschen Standpunkt stelle, daß aber vom richtigen Standpunkt aus nur die Sätze 2 und 4 in Frage kämen und daß die nicht bewiesen, also vielleicht falsch wären. Er hat das aber nie getan und tutes auch jetzt nicht, sagt vielmehr ausdrücklich, der Kroneckersche Satz oder wenigstens der auf die irreduzible Mannigfaltigkeit bezügliche Spezialfall sei von Molk, König und Bertini bewiesen worden. Daraus geht hervor, daß er den genannten Autoren den „richtigen" Standpunkt zuerkennt, d. h. daß er glaubt, sie hätten nicht nur den Satz 3 (und vielleicht auch den Satz 1), sondern sogar den Satz 4 (und vielleicht auch den Satz 2) bewiesen. Wie meine Bemerkungen zum Satz 4 (und Satz 2) zeigen, ist dieser Glaube ein Irrtum.

§ 7.

Über die Bedingungen dafür, daß ein Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

Es soll jetzt noch ein allgemeiner Satz hergeleitet werden, von dem in § 3 nur ein Spezialfall benötigt und bewiesen wurde. Wir schreiben dabei $k-1$ an Stelle des seitherigen k.

Hilfssatz. *Ein System von l homogenen Gleichungen*

$$\text{(A)} \qquad f_\lambda(x_1, \ldots, x_k) = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, l),$$

die alle vom selben Grad m sind, hat genau die gleichen Lösungen wie das System von k Gleichungen

$$\text{(B)} \qquad \sum_{\lambda=1}^{l} u_{\varkappa\lambda} f_\lambda(x_1, \ldots, x_k) = 0 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k),$$

wo die $u_{\varkappa\lambda}$ Unbestimmte sind.

Beweis. Daß (B) aus (A) folgt, ist klar; die Umkehrung muß bewiesen werden. Für $l \leqq k$ ist sie trivial, weil dann die Matrix $||u_{\varkappa\lambda}||$ vom Rang l ist. Sei also $l > k$. Dann setzen wir

$$\sum_{\lambda=1}^{l} u_{\varkappa\lambda} f_\lambda(x_1, \ldots, x_k) = \varphi_\varkappa(x_1, \ldots, x_k) \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

und außerdem

$$\sum_{\lambda=1}^{l} v_\lambda f_\lambda(x_1, \ldots, x_k) = \psi(x_1, \ldots, x_k),$$

wo die v_λ weitere Unbestimmte sind. Nun besteht zwischen den $\varphi_\varkappa$ und ψ eine homogene Abhängigkeit[23])

$$F(\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \psi) = 0, \tag{1}$$

etwa vom Grad M. Die Koeffizienten von (1) sind natürlich Polynome der $u_{\varkappa\lambda}$ und v_λ, was wir dadurch zum Ausdruck bringen wollen, daß wir statt (1) schreiben:

$$G(\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \psi; u_{\varkappa\lambda}, v_\lambda) = 0. \tag{1a}$$

Es gibt aber gewiß auch eine homogene Abhängigkeit vom Grad M, in der das Glied mit ψ^M wirklich vorkommt. Denn sollte das in (1a) noch nicht der Fall sein, so setzen wir

$$\varphi_\varkappa - a_\varkappa \psi = \Phi_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k),$$

wo die $a_\varkappa$ weitere Unbestimmte sind. Dann geht (1a) über in

$$G(\Phi_1 + a_1\psi, \ldots, \Phi_k + a_k\psi, \psi; u_{\varkappa\lambda}, v_\lambda) = 0, \tag{2}$$

wofür wir kürzer schreiben:

$$H(\Phi_1, \ldots, \Phi_k, \psi; u_{\varkappa\lambda}, v_\lambda) = 0. \tag{3}$$

Hier ist nun der Koeffizient von ψ^M gleich $G(a_1, \ldots, a_k, 1; u_{\varkappa\lambda}, v_\lambda)$, also gewiß von 0 verschieden, weil die $a_\varkappa$, $u_{\varkappa\lambda}$, v_λ Unbestimmte sind und G in bezug auf die ersten $k+1$ Argumente homogen ist. Da nun nach der Definition der $\varphi_\varkappa$, ψ, $\Phi_\varkappa$

$$\varphi_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{l} u_{\varkappa\lambda} f_\lambda, \quad \psi = \sum_{\lambda=1}^{l} v_\lambda f_\lambda, \quad \Phi_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{l} (u_{\varkappa\lambda} - a_\varkappa v_\lambda) f_\lambda$$

ist, so folgt aus (3) einfach durch die Bezeichnungsänderung $u_{\varkappa\lambda} \to u_{\varkappa\lambda} + a_\varkappa v_\lambda$ sofort

$$H(\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \psi, u_{\varkappa\lambda} + a_\varkappa v_\lambda, v_\lambda) = 0, \tag{4}$$

wobei der Koeffizient von ψ^M gleich $G(a_1, \ldots, a_k, 1; u_{\varkappa\lambda} + a_\varkappa v_\lambda, v_\lambda)$, also wieder $\neq 0$ ist. Mit (4) ist daher eine Abhängigkeit M-ten Grades zwischen den $\varphi_\varkappa$ und ψ gewonnen, in der das Glied mit ψ^M wirklich vorkommt. Aus (4) folgt dann sofort, daß die Gleichungen (B), d. h. die Gleichungen $\varphi_\varkappa = 0$ die Gleichung $\psi = 0$ nach sich ziehen.

Bilden wir jetzt $l - k$ Linearkombinationen (es ist ja $l > k$)

$$\psi_\mu = \sum_{\lambda=1}^{l} v_{\mu\lambda} f_\lambda \qquad (\mu = 1, \ldots, l-k),$$

[23]) Der einfache Beweis dafür verläuft genau wie in meiner Arbeit [8], S. 442.

wo die $v_{\mu\lambda}$ neue Unbestimmte sind, so ziehen die k Gleichungen (B) nach dem Bewiesenen die $l-k$ Gleichungen $\psi_\mu = 0$ nach sich. Dann ist also $\varphi_\varkappa = 0$, $\psi_\mu = 0$, d. h.

$$\sum_{\lambda=1}^{l} u_{\varkappa\lambda} f_\lambda = 0, \quad \sum_{\lambda=1}^{l} v_{\mu\lambda} f_\lambda = 0.$$

Daraus folgt aber, weil die l-reihige Determinante $\begin{vmatrix} u_{\varkappa\lambda} \\ v_{\mu\lambda} \end{vmatrix}$ lauter Unbestimmte zu Elementen hat, also $\neq 0$ ist, daß alle f_λ gleich 0 sind, daß also auch die Gleichungen (A) gelten. W. z. b. w.

Satz A. *Dafür, daß das System von l homogenen Gleichungen m-ten Grades*

$$f_\lambda(x_1, \ldots, x_k) = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots l)$$

unendlich viele Lösungen hat, ist notwendig und hinreichend, daß die Resultante

$$R\left(\sum_{\lambda=1}^{l} u_{1\lambda} f_\lambda - u_1 y^m, \ \ldots, \ \sum_{\lambda=1}^{l} u_{k\lambda} f_\lambda - u_k y^m, \ \sum_{\varkappa=1}^{k} v_\varkappa x_\varkappa - v y\right)$$
$$x_1 \qquad\quad , \ \ldots, \qquad x_k \qquad\quad , \qquad y$$

als Polynom der Unbestimmten $u_{\varkappa\lambda}$, $u_\varkappa$, $v_\varkappa$, v identisch verschwindet.

Beweis. Wenn das gegebene System unendlich viele Lösungen hat, so hat das System

$$\sum_{\lambda=1}^{l} u_{1\lambda} f_\lambda - u_1 y^m = 0, \ \ldots, \ \sum_{\lambda=1}^{l} u_{k\lambda} f_\lambda - u_k y^m = 0$$

mit den Unbekannten $x_1, \ldots, x_k, y$ ebenfalls unendlich viele Lösungen, nämlich schon unendlich viele mit $y = 0$. Daher verschwindet nach dem zu Beginn des § 3 erwähnten Satz die obige Resultante.

Wenn umgekehrt diese Resultante verschwindet, so hat das System

$$\sum_{\lambda=1}^{l} u_{1\lambda} f_\lambda - u_1 y^m = 0, \ \ldots, \ \sum_{\lambda=1}^{l} u_{k\lambda} f_\lambda - u_k y^m = 0, \tag{5}$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} v_\varkappa x_\varkappa - v y = 0$$

eine Lösung [24]). Dabei kann nicht $y \neq 0$ sein; sonst könnte man $y = 1$ setzen, und das System

$$\sum_{\lambda=1}^{l} u_{1\lambda} f_\lambda = u_1, \ \ldots, \ \sum_{\lambda=1}^{l} u_{k\lambda} f_\lambda = u_k, \ \sum_{\varkappa=1}^{k} v_\varkappa x_\varkappa = v$$

[24]) Siehe z. B. [6], Satz 139.

hätte eine Lösung. Aber das ist unmöglich, weil zwischen den linken Seiten eine Abhängigkeit besteht[25]) und zwischen den rechten, die ja Unbestimmte sind, nicht. Bei einer Lösung von (5) ist also $y = 0$, d. h. das System

$$(6) \qquad \sum_{\lambda=1}^{l} u_{1\lambda} f_\lambda = 0, \ \ldots, \ \sum_{\lambda=1}^{l} u_{k\lambda} f_\lambda = 0, \quad \sum_{\varkappa=1}^{k} v_\varkappa x_\varkappa = 0$$

hat eine Lösung. Daraus folgt aber, daß das System der ersten k Gleichungen in (6) sogar unendlich viele Lösungen hat. Denn wenn es nur endlich viele wären, so könnte keine von ihnen die letzte Gleichung in (6) erfüllen, da ja die $v_\varkappa$ Unbestimmte sind[26]).

Nunmehr folgt der Satz A sofort aus dem Hilfssatz.

Satz B. *Wenn die Koeffizienten eines homogenen Gleichungssystems*

$$f_\lambda(x_1, \ldots, x_k) = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, l)$$

Polynome von Unbestimmten sind und wenn das System unendlich viele Lösungen hat, dann hat jedes System, das aus dem gegebenen durch irgendwelche Spezialisierung der Unbestimmten entsteht, ebenfalls unendlich viele Lösungen.

Beweis. Das System hat natürlich, wenn n_λ der Grad von f_λ ist und wenn $\operatorname{Max} n_\lambda = m$ gesetzt wird, genau dieselben Lösungen wie das System

$$x_\varkappa^{m-n_\lambda} f_\lambda(x_1, \ldots, x_k) = 0 \ \ (\varkappa = 1, \ldots, k; \ \lambda = 1, \ldots, l).$$

Daher ist es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, daß alle Gleichungen des gegebenen Systems von gleichem Grad m sind. Wenn nun das System *vor* der Spezialisierung unendlich viele Lösungen hat, so verschwindet nach Satz A die dortige Resultante. Das tut sie dann aber auch *nach* der Spezialisierung, so daß nach Satz A immer noch unendlich viele Lösungen vorhanden sind.

Literatur.

[1] A. Hurwitz, Über Trägheitsformen eines algebraischen Moduls. Annali di matematica, ser. 3, **20** (1913).

[2] Jul. König, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen. Leipzig 1903.

[3] F. S. Macaulay, The algebraic theory of modular systems. Cambridge 1916.

[4] F. Mertens, Über die bestimmenden Eigenschaften der Resultante von n Formen mit n Veränderlichen. Sitzber. d. Wiener Akad., Math.-naturw. Klasse, Abt. IIa, **93** (1886).

[5] F. Mertens, Zur Theorie der Elimination. Ebenda **108** (1899).

[6] O. Perron, Algebra, Band 1, 2. Auflage. Berlin 1932.

[7] O. Perron, Über das Vahlensche Beispiel zu einem Satz von Kronecker. Math. Zeitschr. **47** (1941).

---

[25]) Siehe z. B. [6], Satz 56.

[26]) Eine genauere Detaillierung dieser Schlußweise findet man in [6], S. 290.

[8] O. PERRON, Beweis und Verschärfung eines Satzes von Kronecker. Math. Annalen 118 (1942).

[9] Fr. SEVERI, Lezioni di analisi, vol. 1, sec. ediz., Bologna 1941.

[10] Fr. SEVERI, Über die Grundlagen der algebraischen Geometrie. Abhandl. a. d. mathemat. Seminar der Hansischen Universität 9 (1933).

[11] Fr. SEVERI, Über die Darstellung algebraischer Mannigfaltigkeiten als Durchschnitt von Formen. Ebenda 15 (1943).

[12] B. L. VAN DER WAERDEN, Moderne Algebra, II. Teil. Berlin 1931. 2. Auflage, 1940.

[13] B. L. VAN DER WAERDEN, Einführung in die algebraische Geometrie. Berlin 1939.

Nachtrag. (Zusatz bei der Korrektur). Einer Mitteilung von Herrn VAN DER WAERDEN entnehme ich das folgende Beispiel einer Raumkurve, die sich nicht einfach gezählt als Schnitt von Flächen im Sinne der ersten Definition von SEVERI darstellen läßt, worauf oben S. 660 und 674 hingewiesen wurde. Herr VAN DER WAERDEN macht mich außerdem auf ein schon von MACAULAY [3], S. 22, angegebenes, ganz ähnliches Beispiel einer allerdings nicht irreduziblen Kurve aufmerksam. Die von MACAULAY angegebene Kurve zerfällt in drei Geraden, die durch einen Punkt gehen, aber nicht in einer Ebene liegen.

Zunächst sei an den Wortlaut der SEVERIschen Definition erinnert, der oben auf S. 659, 660 wiedergegeben ist.

Nun sei C eine irreduzible Raumkurve mit einem dreifachen Punkt O mit drei nicht in einer Ebene liegenden Tangenten. Eine solche Kurve wird z. B. durch die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x &= t\ (t-1)^2\,(t+1)^2 \\ y &= t^2\,(t-1)\ (t+1)^2 \\ z &= t^2\,(t-1)^2\,(t+1) \end{aligned}$$

gegeben. Ob man die Kurve vorher einer allgemeinen linearen Koordinatentransformation unterwirft oder nicht, macht für den folgenden Beweis nichts aus.

Es seien nun $f_1 = 0, \ldots, f_k = 0$ die Gleichungen von C. Zur Bildung des ersten Systems von Eliminationsgleichungen hat man aus

$$\begin{aligned} X &= \xi_1 f_1 + \cdots + \xi_k f_k, \\ Y &= \eta_1 f_1 + \cdots + \eta_k f_k \end{aligned}$$

die Resultante $R(y, z)$ nach x zu bilden, diese nach Potenzprodukten der ξ und η zu ordnen und die Koeffizienten $g_1, \ldots, g_l$ dieser Potenzprodukte gleich 0 zu setzen.

Jede durch C gehende Fläche $f = 0$ muß, wie MACAULAY [3] (S. 53) auch schon bemerkt hat, in O mindestens einen Doppelpunkt haben; denn sonst

müßten die drei Tangenten von C in O ja in der Tangentialebene der Fläche liegen. Das gilt insbesondere für die Flächen $X = 0$ und $Y = 0$. Die Schnittkurve dieser beiden Flächen hat also in O einen mindestens vierfachen Punkt. Dasselbe gilt also von ihrer Projektion auf die yz-Ebene, der Kurve $R(y, z) = 0$. Folglich fangen $R(y, z)$ und daher auch alle Polynome $g_1, \ldots, g_l$, nach steigenden Potenzen von y und z geordnet, erst mit Gliedern mindestens 4. Grades an.

Die Projektion von C auf die yz-Ebene ist eine irreduzible Kurve $g(y, z) = 0$, die in O nur einen dreifachen Punkt hat. $g_1, \ldots, g_l$ sind alle durch g teilbar, haben aber in O mindestens einen vierfachen Punkt. Also sind zwei Fälle möglich:

1. $g_1, \ldots, g_l$ sind durch eine höhere als die erste Potenz von g teilbar;

2. der g. g. T. von $g_1, \ldots, g_l$ ist g, aber nach der Entfernung dieses g. g. T. werden die übrigbleibenden Faktoren $\psi_1, \ldots, \psi_l$ alle im Punkte O noch Null.

In beiden Fällen ist C nicht einfach gezählter Durchschnitt der Flächen $f_1 = 0, \ldots, f_h = 0$ im Sinne der zitierten Severischen Definition; denn im Fall 1. hat das *erste System von Eliminationsgleichungen* als g. g. T. eine höhere Potenz eines irreduziblen Polynoms, und im Fall 2. hat das *zweite System von Eliminationsgleichungen* eine gemeinsame Wurzel.

(Eingegangen am 19. Juli 1943.)

Entfernung zweier zufälligen Größen und die Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit.

Von

Ky Fan in Paris.

Der Zweck dieser kurzen Mitteilung ist, eine neue Entfernungsdefinition für die zufälligen Größen derart zu geben, daß im metrischen Raume der zufälligen Größen mit dieser Entfernungsdefinition die Konvergenz genau die Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit und daß der Raum vollständig ist[1]).

I. Definition von (X, Y). Man betrachtet alle auf der Grundmenge eines BORELschen Wahrscheinlichkeitsfeldes[2]) definierten zufälligen Größen[2]) als die Punkte eines Raumes. Dabei sollen zwei äquivalente[2]) zufällige Größen demselben Punkt entsprechen. Es seien X, Y zwei zufällige Größen. Wir bezeichnen mit $P\{|X - Y| \geqq \varepsilon\}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Ungleichung $|X - Y| \geqq \varepsilon$ gilt. Der Ausdruck $\frac{P\{|X-Y| \geqq \varepsilon\}}{\varepsilon}$ ist also eine abnehmende Funktion von ε, wenn ε auf der Halbgerade $\varepsilon > 0$ variiert. Der Wert dieser Funktion ist offenbar kleiner als 1 für jede Zahl $\varepsilon > 1$. Wir nehmen nun als *Entfernung* (X, Y) der beiden zufälligen Größen X, Y die untere Grenze der positiven Werte von ε, für welche die Ungleichung

$$\frac{P\{|X-Y| \geqq \varepsilon\}}{\varepsilon} < 1 \tag{1}$$

gilt. Es ist klar, daß $0 \leqq (X, Y) = (Y, X) \leqq 1$ ist.

II. Bedingung für $(X, Y) = 0$. Sind X, Y zwei äquivalente zufällige Größen, so gilt offenbar die Ungleichung (1) für jede positive Zahl ε. Daraus folgt es, daß die Entfernung zweier äquivalenten zufälligen Größen immer verschwindet. Zum Beweise der Umkehrung genügt es, die folgende Tatsache zu beweisen: Die Bedingung $(X, Y) = 0$ hat zur Folge, daß für alle $\varepsilon > 0$, $P\{|X - Y| \geqq \varepsilon\} = 0$ ist.

Es sei $(X, Y) = 0$. Setzen wir voraus, im Gegensatz zu der zu beweisenden Behauptung, daß es eine positive Zahl ε_0 gibt, für welche $P\{|X - Y| \geqq \varepsilon_0\} > 0$ ist, so kann man eine Zahl ε_1 derart wählen, daß

$$0 < \varepsilon_1 < P\{|X - Y| \geqq \varepsilon_0\} \tag{2}$$

---

[1]) Eine andere solche Entfernungsdefinition wurde von Herrn FRÉCHET gegeben. Siehe M. FRÉCHET, Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités, I, Paris 1937. S. 194.

[2]) Vgl. A. KOLMOGOROFF, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin 1933.

ist. Wegen $(X, Y) = 0$ ist aber

$$P\{|X - Y| \geqq \varepsilon_0\} < \varepsilon_0, \tag{3}$$

$$P\{|X - Y| \geqq \varepsilon_1\} < \varepsilon_1. \tag{4}$$

Man erhält also, nach (2), (3), $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ und daher

$$P\{|X - Y| \geqq \varepsilon_0\} \leqq P\{|X - Y| \geqq \varepsilon_1\}. \tag{5}$$

Aus (2) und (5) folgt

$$\varepsilon_1 < P\{|X - Y| \geqq \varepsilon_1\},$$

was der Ungleichung (4) widerspricht. *Daher ist die Bedingung* $(X, Y) = 0$ *für die Äquivalenz der zufälligen Größen* X, Y *notwendig und hinreichend.*

III. Die Dreiecksungleichung. Wir wollen jetzt die Dreiecksungleichung

$$(X, Z) \leqq (X, Y) + (Y, Z) \tag{6}$$

beweisen. Setzen wir $d_1 = (X, Y)$, $d_2 = (Y, Z)$, so ist für jede positive Zahl ε

$$P\{|X - Y| \geqq d_1 + \varepsilon\} < d_1 + \varepsilon,$$

$$P\{|Y - Z| \geqq d_2 + \varepsilon\} < d_2 + \varepsilon,$$

also[3])

$$P\{|X - Z| \geqq d_1 + d_2 + 2\varepsilon\} \leqq P\{|X - Y| \geqq d_1 + \varepsilon\} + P\{|Y - Z| \geqq d_2 + \varepsilon\} < d_1 + d_2 + 2\varepsilon.$$

Es folgt daher $(X, Z) \leqq d_1 + d_2 + 2\varepsilon$. Die positive Zahl ε kann aber beliebig klein sein; also muß die Ungleichung (6) gelten.

IV. Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit[2]). *Für die Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit der Folge* $\{X_n\}$ *gegen eine zufällige Größe* X *ist die Bedingung*

$$\lim_{n \to \infty} (X_n, X) = 0$$

notwendig und hinreichend.

Konvergiert die Folge $\{X_n\}$ nach Wahrscheinlichkeit gegen X, so läßt sich zu jeder beliebig vorgegebenen positiven Zahl ε eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ finden mit der Eigenschaft: Für jedes $n \geqq N(\varepsilon)$ wird $P\{|X_n - X| \geqq \varepsilon\} < \varepsilon$. Daraus sieht man, daß $(X_n, X) \leqq \varepsilon$ ist für jedes $n \geqq N(\varepsilon)$. Also ist $\lim_{n \to \infty} (X_n, X) = 0$.

Ist umgekehrt $\lim_{n \to \infty} (X_n, X) = 0$, so läßt sich zu jeder Zahl $\delta > 0$ eine natürliche Zahl $N(\delta)$ so finden, daß $(X_n, X) < \delta$ ist für alle $n \geqq N(\delta)$. Es

---

[3]) Dabei wird eine bekannte Ungleichung der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet. Siehe das genannte Buch von FRÉCHET, S. 162.

folgt also:

$$P\{|X_n - X| \geqq \delta\} < \delta \quad \text{für alle } n \geqq N(\delta). \tag{7}$$

Es seien jetzt ε, η zwei beliebig vorgegebene positive Zahlen. Wir wählen eine positive Zahl δ, für welche $\delta < \varepsilon$, $\delta < \eta$ ist. Zu dieser Zahl δ läßt sich also eine natürliche Zahl $N(\delta)$ finden mit der Eigenschaft (7), dann ist

$$P\{|X_n - X| \geqq \eta\} \leqq P\{|X_n - X| \geqq \delta\} < \delta < \varepsilon \text{ für alle } n \geqq N(\delta);$$

was die Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit bedeutet.

V. Cauchysches Konvergenzkriterium. Nach einem bekannten Satze von Herrn E. Slutsky[4]) kann man leicht das folgende Kriterium beweisen: *Für die Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit der Folge $\{X_n\}$ ist die folgende Bedingung notwendig und hinreichend: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein solches n, daß für jedes $p > 0$ die Ungleichung $(X_n, X_{n+p}) < \varepsilon$ gilt.*

---

[4]) Siehe S. 169 in der zitierten Darstellung von Fréchet.

(Eingegangen am 12. August 1943.)

Integration linearer Differentialgleichungen durch Laplacesche Integrale. II*).

Von

J. Horn in Darmstadt.

§ 3.

Die lineare Differentialgleichung mit der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ *vom Rang* 2

$$(\mathfrak{A}) \qquad \frac{1}{x^m}\frac{d^m y}{dx^m} + \mathfrak{P}_1 \frac{1}{x^{m-1}}\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + \mathfrak{P}_{m-1}\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \mathfrak{P}_m y = 0,$$

wo

$$\mathfrak{P}_\mu = a_\mu + \frac{a_\mu^{(1)}}{x} + \frac{a_\mu^{(2)}}{x^2} + \cdots \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

in der Umgebung von $x = \infty$ *regulär ist*, hat die charakteristische Gleichung

$$\alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\alpha + a_m = 0,$$

deren Wurzeln verschieden sein mögen. Um die Differentialgleichung $(\mathfrak{A})$ auf ein Differentialgleichungssystem von der Form (A) oder (A_1) in § 1 zurückzuführen, führen wir die abhängigen Veränderlichen

$$y_1 = y, \quad y_2 = \frac{1}{x}\frac{dy_1}{dx}, \quad y_3 = \frac{1}{x}\frac{dy_2}{dx}, \ \ldots, \ y_m = \frac{1}{x}\frac{dy_{m-1}}{dx}$$

ein, so daß

$$\frac{dy_1}{dx} = x\,y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = x\,y_3, \ldots, \quad \frac{dy_{m-1}}{dx} = x\,y_m$$

ist. Wir drücken die Ableitungen von y durch die neuen Veränderlichen aus:

$$y = y_1, \ \frac{dy}{dx} = xy_2,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = x\frac{dy_2}{dx} + y_2 = x^2 y_3 + y_2,$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = x^2 \cdot xy_4 + 2\,xy_3 + xy_3 = x^3 y_4 + 3\,xy_3,$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = x^3 \cdot xy_5 + 3\,x^2 y_4 + 3\,x \cdot xy_4 + 3\,y_3 = x^4 y_5 + 6\,x^2 y_4 + 3\,y_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = x^n y_{n+1} + [n]_1 x^{n-2} y_n + [n]_2 x^{n-4} y_{n-1} + [n]_3 x^{n-6} y_{n-2} + \cdots,$$

*) Fortsetzung der Arbeit auf S. 339—350 dieses Bandes. § 3 und § 4 knüpfen an § 1 an, § 5 ist von § 1 unabhängig; § 6 verallgemeinert § 2.

wo es auf die Werte der Zahlenkoeffizienten $[n]_1, \ldots$ nicht ankommt. Es ist also

$$y = y_1, \quad \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} = y_2, \quad \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dx^2} = y_3 + \frac{1}{x^2}y_2,$$

$$\frac{1}{x^3}\frac{d^3y}{dx^3} = y_4 + \frac{2}{x^2}y_3, \quad \frac{1}{x^4}\frac{d^4y}{dx^4} = y_5 + \frac{6}{x^2}y_4 + \frac{3}{x^4}y_3, \ldots,$$

$$\frac{1}{x^n}\frac{d^ny}{dx^n} = y_{n+1} + \frac{[n]_1}{x^2}y_n + \frac{[n]_2}{x^4}y_{n-1} + \frac{[n]_3}{x^6}y_{n-2} + \cdots;$$

dabei ist zu setzen:

$$y_{m+1} = \frac{1}{x}\frac{dy_m}{dx}.$$

Demnach unterscheidet sich $\frac{1}{x^n}\frac{d^ny}{dx^n}$ von y_{n+1} um eine lineare homogene Funktion von $y_n, y_{n-1}, \ldots$; $\frac{1}{x^m}\frac{d^my}{dx^m}$ unterscheidet sich von $\frac{1}{x}\frac{dy_m}{dx}$ um eine lineare homogene Funktion von $y_m, y_{m-1}, \ldots$; die Koeffizienten dieser linearen Funktionen verschwinden für $x = \infty$.

Die Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$)

$$\frac{1}{x^m}\frac{d^my}{dx^m} + (a_1 + \cdots)\frac{1}{x^{m-1}}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + (a_{m-1} + \cdots)\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + (a_m + \cdots)y = 0$$

geht über in das System

$$(\mathfrak{A}') \quad \begin{cases} \frac{1}{x}\frac{dy_1}{dx} - y_2 = 0, \\ \frac{1}{x}\frac{dy_2}{dx} - y_3 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{x}\frac{dy_{m-1}}{dx} - y_m = 0, \\ \frac{1}{x}\frac{dy_m}{dx} + (a_1 + \cdots)y_m + (a_2 + \cdots)y_{m-1} + \cdots + (a_{m-1} + \cdots)y_2 + (a_m + \cdots)y_1 = 0; \end{cases}$$

die in den Klammern weggelassenen Glieder verschwinden für $x = \infty$.

Das allgemeinere System linearer Differentialgleichungen

$$\frac{1}{x}\frac{dy_\alpha}{dx} + \sum_{\beta=1}^{m}\left(a_{\alpha\beta} + \frac{a^{(1)}_{\alpha\beta}}{x} + \cdots\right)y_\beta = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

kann, wenn die Gleichung m-ten Grades in s

$$|a_{\alpha\beta} - s\,\delta_{\alpha\beta}| = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

m verschiedene Wurzeln $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ besitzt, durch eine lineare Transformation

$$y_\alpha = \sum_{\beta=1}^{m} h_{\alpha\beta}\, \eta_\beta \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

mit konstanten Koeffizienten $h_{\alpha\beta}$ in

$$\frac{1}{x}\frac{d\eta_\alpha}{dx} + \mathfrak{a}_\alpha \eta_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m}\left(\frac{\mathfrak{a}_{\alpha\beta}^{(1)}}{x} + \cdots\right)\eta_\beta = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

übergeführt werden.

In $(\mathfrak{A}')$ ist $a_{12} = -1$, $a_{23} = -1$, $\ldots$, $a_{m-1,m} = -1$, während alle anderen $a_{\alpha\beta}$, für welche α einen der Werte $1, \ldots, m-1$ hat, verschwinden; ferner ist

$$a_{m1} = a_m,\ a_{m2} = a_{m-1}, \ldots, a_{m,m-1} = a_2,\ a_{mm} = a_1.$$

Jetzt sind $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ die Wurzeln der Gleichung m-ten Grades in s

$$\begin{vmatrix} s, & -1 & & & \\ & s, & -1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & s, & -1 \\ a_m, & a_{m-1}, & a_{m-2}, \ldots, & a_2, & a_1 + s \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn man zur ersten Spalte der Determinante die mit s multiplizierte zweite, die mit s^2 multiplizierte dritte usw., die mit s^{m-1} multiplizierte m-te Spalte addiert, enthält die umgeformte erste Spalte $m-1$ Nullen, während ihr m-tes Glied

$$a_m + a_{m-1}\, s + \cdots + a_2\, s^{m-2} + a_1\, s^{m-2} + s^m$$

ist und die Unterdeterminante dieses Gliedes den Wert $(-1)^m$ hat. Durch Nullsetzen der umgeformten Determinante erhält man *die charakteristische Gleichung*

$$s^m + a_1\, s^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\, s + a_m = 0$$

mit den voneinander verschiedenen Wurzeln $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$.

Wir kommen so auf ein Gleichungssystem

$$(\mathfrak{A}'') \qquad x^{-1}\frac{d\eta_\alpha}{dx} + \mathfrak{a}_\alpha \eta_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{\mathfrak{a}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}}{x^\lambda}\eta_\beta = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m).$$

Durch die Substitution

$$\eta_\alpha = e^{-\frac{\mathfrak{a}_1 x^2}{2} - \mathfrak{a}_{11}^{(1)} x}\, \mathfrak{y}_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

erhalten wir das System

$$(\mathfrak{A}''') \qquad x^{-1}\frac{d\mathfrak{y}_\alpha}{dx} + \mathfrak{b}_\alpha \mathfrak{y}_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{\mathfrak{b}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}}{x^\lambda}\mathfrak{y}_\beta = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

in welchem

$$\mathfrak{b}_1 = 0, \quad \mathfrak{b}_1^{(1)} = 0, \quad \mathfrak{b}_\alpha = \mathfrak{a}_\alpha - \mathfrak{a}_1 \qquad (\alpha = 2, \ldots, m)$$

ist und welches demnach die in § 1 behandelte Form (A_1) hat. Die Rolle des dortigen $\mathfrak{a}_\alpha$ spielt jetzt $\mathfrak{b}_\alpha = \mathfrak{a}_\alpha - \mathfrak{a}_1$ $(\alpha = 2, \ldots, m)$.

Wir suchen das Differentialgleichungssystem $(\mathfrak{A}''')$ durch Laplacesche Integrale

$$\mathfrak{Y}_\alpha = \int_0^\infty \mathfrak{V}_\alpha(z)\, e^{xz}\, dz = \int_0^\infty \mathfrak{W}_\alpha(t)\, e^{-xt}\, dt \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

zu lösen, wobei

$$z = -t, \quad \mathfrak{V}_\alpha(z) = \mathfrak{V}_\alpha(-t) = \mathfrak{W}_\alpha(t)$$

ist; der Integrationsweg sei in der z-Ebene $\arg z = \omega$, in der t-Ebene $\arg t = \arg(-z) = \pi + \omega$. In § 1 hatten wir für den Integrationsweg der den Differentialgleichungen (A_1) genügenden Laplaceschen Integrale die Bedingungen $\Re(a_\alpha e^{-2i\omega}) \leqq 0$ $(\alpha = 2, \ldots, m)$. Wenn wir a_α durch $\mathfrak{a}_\alpha - \mathfrak{a}_1$ $(\alpha = 2, \ldots, m)$ und ω durch $\pi + \omega$ ersetzen, wobei $e^{-2i\omega}$ ungeändert bleibt, erhalten wir *für den Integrationsweg der den Gleichungen* $(\mathfrak{A}''')$ *genügenden Laplaceschen Integrale*

$$\mathfrak{Y}_\alpha = \int_0^\infty \mathfrak{V}_\alpha(z)\, e^{xz}\, dz \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

die Bedingungen

$$\Re\left((\mathfrak{a}_\alpha - \mathfrak{a}_1)\, e^{-2i\omega}\right) \leqq 0 \qquad (\alpha = 2, \ldots, m).$$

§ 4.

Die weitere Betrachtung knüpft an die *lineare Differentialgleichung*

$$(\mathfrak{B}) \qquad \mathfrak{P}_0 \frac{d^m y}{dx^m} + x\,\mathfrak{P}_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + x^{m-1}\,\mathfrak{P}_{m-1} \frac{dy}{dx} + x^m\,\mathfrak{P}_m\, y = 0$$

mit den in der Umgebung von $x = \infty$ *regulären Koeffizienten*

$$\mathfrak{P}_\mu = a_\mu + \frac{a_\mu^{(1)}}{x} + \frac{a_\mu^{(2)}}{x^2} + \cdots \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m)$$

$(a_0 \neq 0)$ an.

Die Differentialgleichung $(\mathfrak{B})$ kann durch Division mit $x^m \mathfrak{P}_0$ auf die in § 3 behandelte Form $(\mathfrak{A})$ gebracht werden, freilich im allgemeinen unter Verkleinerung des Konvergenzradius. In den Formeln von § 3 müssen $a_1, \ldots, a_m$ durch $\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_m}{a_0}$ ersetzt werden. So kann auch die Differentialgleichung $(\mathfrak{B})$ auf ein System von der Form (A) oder (A_1) in § 1 zurückgeführt werden.

Einer einfachen Wurzel α der charakteristischen Gleichung

$$a_0 \alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\alpha + a_m = 0$$

entspricht eine der Differentialgleichung $(\mathfrak{B})$ formal genügende Reihe

$$y = e^{\frac{\alpha z^2}{2} + \alpha' z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{x^{r+n}}.$$

Durch die Substitution

$$y = e^{\frac{\alpha z^2}{2} + \alpha' z} \mathfrak{y}$$

erhält man, wenn man die neue Veränderliche wieder mit $\mathfrak{y}$ bezeichnet, *die formale Reihe*

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{x^{r+n}}.$$

Dann ist

$$a_m = 0, \quad a_m^{(1)} = 0, \quad a_{m-1} \neq 0, \quad r = \frac{a_m^{(2)}}{a_{m-1}}.$$

Die so vereinfachte Differentialgleichung $(\mathfrak{B})$ bezeichnen wir mit $(\mathfrak{B}_1)$. Wir setzen den *Realteil von r positiv* voraus, was durch eine Substitution $y = x^q Y$ erreicht werden kann.

Wir wenden die LAPLACEsche Transformation in der Form

$$y = \int_0^{\infty} v(z)\, e^{xz}\, dz$$

an. Die mit x^{m-1} dividierte Differentialgleichung $(\mathfrak{B}_1)$ ist

$$\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a_\mu^{(\lambda)}}{x^{m-\mu+\lambda-1}} \frac{d^{m-\mu} y}{d x^{m-\mu}} = 0.$$

Dabei ist $a_\mu^{(0)} = a_\mu$; zu $\mu = m$ gehört $\lambda = 2, 3, \ldots$; das zu $\mu = m-1$, $\lambda = 0$ gehörige Glied ist

$$a_{m-1} \frac{d y}{d x}.$$

Es ist

$$\frac{d^{m-\mu} y}{d x^{m-\mu}} = \int_0^{\infty} z^{m-\mu} v(z)\, e^{xz}\, dz,$$

$$\frac{1}{x} \frac{d^{m-\mu} y}{d x^{m-\mu}} = -\int_0^{\infty} \int_0^{z} z^{m-\mu} v(z)\, dz \cdot e^{xz}\, dz$$

unter der Bedingung

$$\Big[\int_0^z z^{m-\mu}\, v(z)\, dz\Big]_0^\infty = 0,$$

$$\frac{1}{x^\nu}\,\frac{d^{m-\mu}y}{d\,x^{m-\mu}} = (-1)^\nu \int_0^\infty \int_0^{z^{(\nu)}} z^{m-\mu}\, v(z)\, d\,z^\nu \cdot e^{xz}\, d\,z$$

unter den Bedingungen

$$\Big[\int_0^{z^{(\nu')}} z^{m-\mu}\, v(z)\, dz^{\nu'}\Big]_0^\infty = 0 \qquad (\nu' = 1, \ldots, \nu).$$

Wenn wir diese Ausdrücke unter Berücksichtigung der Formel

$$\int_0^{z^{(\nu)}} z^{m-\mu}\, v(z)\, dz^\nu = \int_0^z \frac{(z-\zeta)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\,\zeta^{m-\mu}\, v(\zeta)\, d\,\zeta$$

in die mit x^{m-1} dividierte Differentialgleichung $(\mathfrak{B}_1)$ einsetzen, erhalten wir die Integralgleichung

$$a_{m-1}\, z\, v(z) = \sum_{\lambda=2}^{\infty} a_m^{(\lambda)} \int_0^z \frac{(\zeta-z)^{\lambda-2}}{(\lambda-2)!}\, v(\zeta)\, d\zeta +$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{m-1}^{(\lambda)} \int_0^z \frac{(\zeta-z)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}\, v(\zeta)\, d\zeta +$$

$$+ \sum_{\mu=0}^{m-2} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\mu^{(\lambda)} \int_0^z \frac{(\zeta-z)^{m-\mu+\lambda-2}}{(m-\mu+\lambda-2)!}\,\zeta^{m-\mu}\, v(\zeta)\, d\zeta.$$

Unter Einführung der beständig konvergenten Reihen

$$G_m(z) = \sum_{\lambda=2}^{\infty} a_m^{(\lambda)} \frac{(-z)^{\lambda-2}}{(\lambda-2)!},$$

$$G_{m-1}(z) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{m-1}^{(\lambda)} \frac{(-z)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!},$$

$$G_\mu(z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\mu^{(\lambda)} \frac{(-z)^{m-\mu+\lambda-2}}{(m-\mu+\lambda-2)!} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m-2)$$

haben wir *die Integralgleichung*

$$(\mathfrak{C}_1) \qquad a_{m-1}\, z\, v(z) = \int_\mu^s \sum_{\mu=0}^{m} G_\mu(z-\zeta)\,\zeta^{m-\mu} \cdot v(\zeta)\, d\zeta)$$

als Laplacesche *Transformierte von* $(\mathfrak{B}_1)$. Der Integralgleichung genügt die (vielleicht von $z = 0$ abgesehen) *beständig konvergente Reihe*

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n (-z)^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)}.$$

Von nun an möge die Potenzreihe $\mathfrak{P}_\mu$ von $\frac{1}{x}$ mit dem Glied $\frac{a_\mu^{(p+\mu)}}{x^{p+\mu}}$ abbrechen:

$$\mathfrak{P}_\mu = a_\mu + \frac{a_\mu^{(1)}}{x} + \cdots + \frac{a_\mu^{(p+\mu)}}{x^{p+\mu}} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m).$$

Wenn man

$$x^{p+\mu}\,\mathfrak{P}_\mu = P_\mu \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m)$$

setzt, ist

$$P_\mu = a_\mu x^{p+\mu} + a_\mu^{(1)} x^{p+\mu-1} + \cdots + a_\mu^{(p+\mu)} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, m-1)$$

eine ganze Funktion $(p+\mu)$-ten Grades; wegen $a_m = 0$, $a_m^{(1)} = 0$ ist

$$P_m = a_m^{(2)} x^{p+m-2} + \cdots + a_m^{(p+m)}.$$

Wir haben jetzt eine *Differentialgleichung vom Rang 2 mit ganzen rationalen Koeffizienten*

$$(\mathfrak{D}_1) \qquad P_0 \frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + P_{m-1} \frac{dy}{dx} + P_m y = 0,$$

deren Laplacesche Transformierte die Integralgleichung $(\mathfrak{C}_1)$ mit den ganzen Funktionen $(p+m-2)$-ten Grades

$$G_m(z) = \sum_{\lambda=2}^{p+m} a_m^{(\lambda)} \frac{(-z)^{\lambda-2}}{(\lambda-2)!},$$

$$G_{m-1}(z) = \sum_{\lambda=0}^{p+m-1} a_{m-1}^{(\lambda)} \frac{(-z)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!},$$

$$G_\mu(z) = \sum_{\lambda=0}^{p+m} a_\mu^{(\lambda)} \frac{(-z)^{m-\mu+\lambda-2}}{(m-\mu+\lambda-2)!} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, m-2)$$

ist. Durch $(m+p-1)$-malige Differentiation dieser Integralgleichung erhält man eine Differentialgleichung mit dem Glied höchster Ordnung

$$\frac{d^{p+m-1}}{dz^{p+m-1}} [a_{m-1} z v(z)],$$

welche in § 5 direkt hergeleitet wird. Die Herleitung der Differentialgleichung aus der für $\Re r > 0$ gültigen Integralgleichung zeigt, daß auch die Laplacesche transformierte Differentialgleichung für $\Re r > 0$ gilt.

Ist $\Re r \leqq 0$, so sei die positive Zahl q so gewählt, daß $\Re (r+q) > 0$ ist. Man setzt

$$y = x^q Y$$

und erhält die Differentialgleichung

$$P_0 x^m \frac{d^m Y}{d x^m} + (P_1 x^m + m q P_0 x^{m-1}) \frac{d^{m-1} Y}{d x^{m-1}} +$$

$$+\Big(P_2 x^m + (m-1) q P_1 x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} q(q-1) P_0 x^{m-2}\Big) \frac{d^{m-2} Y}{d x^{m-2}} + \cdots = 0.$$

Diese ist für $q = 1$ durch x^{m-1} teilbar, für $q = 2$ durch x^{m-2} usw., für $q = m-1$ durch x. Nunmehr wird die Laplacesche Transformation in der Form

$$Y = \int_0^\infty v(z)\, e^{xz}\, dz$$

angewandt [1]).

§ 5.

Wir suchen *die Differentialgleichung*

$$(\mathfrak{D}) \qquad P_0 \frac{d^m y}{d x^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{d x^{m-1}} + \cdots + P_{m-1} \frac{d y}{d x} + P_m y = 0$$

mit den ganzen rationalen Koeffizienten

$$P_\mu = a_\mu x^{p+\mu} + a_\mu^{(1)} x^{p+\mu-1} + \cdots + a_\mu^{(p+\mu)} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, m),$$

wobei $a_0 \neq 0$ sei, unabhängig von dem Bisherigen durch ein Laplacesches Integral von der von Poincaré benutzten Form

$$y = \int_l v(z)\, e^{xz}\, dz$$

zu befriedigen, wo l ein passender Integrationsweg ist, für welchen das Integral konvergiert. Durch partielle Integration ergibt sich

$$x^\lambda \frac{d^\varkappa y}{d x^\varkappa} = (-1)^\lambda \int_l \frac{d^\lambda (z^\varkappa v)}{d z^\lambda} e^{xz}\, dz$$

($\varkappa$, λ ganze positive Zahlen einschließlich Null) unter den Bedingungen

$$\left[\frac{d^{\lambda'} (z^\varkappa v)}{d z^{\lambda'}} e^{xz}\right]_l = 0 \qquad (\lambda' = 0, 1, \ldots, \lambda - 1).$$

---

[1]) Ähnlich kann die Differentialgleichung vom Rang 1 behandelt werden [vgl. Math. Zeitschr. 8 (1920), S. 106–107].

Demnach genügt das LAPLACEsche Integral der Differentialgleichung $(\mathfrak{D})$, wenn $v(z)$ *der* LAPLACE*schen Transformierten*

$$(\mathfrak{E}) \quad \sum_{\mu=0}^{m}\Big[(-1)^{p+\mu} a_\mu \frac{d^{p+\mu}(z^{m-\mu} v)}{dz^{p+\mu}} + \\ + (-1)^{p+\mu-1} a_\mu^{(1)} \frac{d^{p+\mu-1}(z^{m-\mu} v)}{dz^{p+\mu-1}} + \cdots + a_\mu^{(p+\mu)} z^{m-\mu} v\Big] = 0$$

genügt und die angegebenen Bedingungen erfüllt sind.

Wie in § 4 die Differentialgleichung $(\mathfrak{B})$ durch $(\mathfrak{B}_1)$, so kann hier die Differentialgleichung $(\mathfrak{D})$ durch eine Differentialgleichung $(\mathfrak{D}_1)$ ersetzt werden, für welche $\alpha = 0$, $\alpha' = 0$ ist und welche durch eine Reihe

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{x^{r+n}}$$

formal befriedigt wird. In $(\mathfrak{D}_1)$ ist

$$a_m = 0, \quad a_m^{(1)} = 0, \quad a_{m-1} \neq 0; \quad r = \frac{a_m^{(2)}}{a_{m-1}}.$$

Die LAPLACEsche Transformierte von $(\mathfrak{D}_1)$ ist von der Form

$$(\mathfrak{E}_1) \quad Q_1 \frac{d^{m+p-1} v}{dz^{p+m-1}} + \cdots + Q_m \frac{d^p v}{dz^p} + Q_{m+1} \frac{d^{p-1} v}{dz^{p-1}} + \cdots + Q_{m+p} v = 0;$$

$$Q_1 = -a_{m-1} z, \; Q_2 = a_{m-2} z^2 + \cdots, \; \cdots, \; Q_m = (-1)^m a_0 z^m + \cdots,$$

$$Q_{m+1} = (-1)^{m+1} a_0^{(1)} z^m + \cdots, \; \cdots, \; Q_{m+p} = (-1)^{m+p} a_0^{(p)} z^m + \cdots.$$

Ihre Unbestimmtheitsstelle $z = \infty$ vom Rang 2 hat die charakteristische Gleichung

$$-a_{m-1} \beta^{p+m-1} + \cdots + (-1)^{m-1} a_1 \beta^{p+1} + (-1)^m \beta^p = 0$$

mit den Wurzeln $\beta = -\frac{1}{\alpha_2}, \ldots, -\frac{1}{\alpha_m}$ und der p-fachen Wurzel $\beta = 0$, wenn $0, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$a_0 \alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \cdots + a_{m-1} \alpha = 0$$

von $(\mathfrak{D}_1)$ sind. Die zur singulären Stelle $z = 0$ von $(\mathfrak{E}_1)$ gehörige determinierende Gleichung hat die Wurzeln $0, 1, \ldots, p + m - 3$ und $r - 1$. Zur letzteren Wurzel gehört, wenn r keine ganze Zahl ist, eine beständig konvergente Reihe

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n (-z)^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)}.$$

Wir ziehen in der z-Ebene von $z = 0$ ins Unendliche eine Halbgerade, welche mit der positiven reellen Achse den Winkel ω bildet; wir beschreiben um

$z = 0$ einen kleinen Kreis, welcher die Halbgerade in $\mathfrak{q}$ schneidet. Dann soll der Integrationsweg l aus der von ∞ bis $\mathfrak{q}$ durchlaufenen Geraden, dem im positiven Sinn durchlaufenen Kreis und der von $\mathfrak{q}$ bis ∞ rückwärts durchlaufenen Geraden bestehen.

Der Schleifenweg l ist nur dann nicht anwendbar, wenn einer ganzen positiven Wurzel der determinierenden Gleichung ein logarithmenfreies v entspricht; dann wird l durch eine Gerade ersetzt, welche von $z = 0$ mit dem Argument ω ins Unendliche geht[2]).

Wir behandeln hier nur eine einfache *Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$(\mathfrak{d}) \quad x\frac{d^2y}{dx^2} + (a_1x^2 + a_1'x + a_1'')\frac{dy}{dx} + (a_2x^3 + a_2'x^2 + a_2''x + a_2''')y = 0.$$

Die dem Integrationsweg l aufzuerlegenden Bedingungen leiten wir unabhängig von § 1 her.

Wie oben gezeigt wurde, kann man $a_2 = 0$, $a_2' = 0$, $a_1 \neq 0$ voraussetzen, so daß die Differentialgleichung

$$(\mathfrak{d}_1) \qquad x\frac{d^2y}{dx^2} + (a_1x^2 + a_1'x + a_1'')\frac{dy}{dx} + (a_2''x + a_2''')y = 0$$

vorliegt. Sie wird durch die Reihe

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{x^{r+n}}; \quad r = \frac{a_2''}{a_1},$$

ihre Laplacesche Transformierte

$$(\mathfrak{e}_1) \quad a_1z\frac{d^3v}{dz^3} - (z^2 + a_1'z + a_2'' - 2a_1)\frac{dv}{dz} + ((a_1'' - 2)z + a_2''' - a_1')v = 0,$$

wenn r keine ganze Zahl ist, durch die beständig konvergente Reihe

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(-z)^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)}$$

befriedigt. Zur Unbestimmtheitsstelle $z = \infty$ vom Rang 2 gehört die charakteristische Gleichung

$$a_1\beta^2 - \beta = 0$$

mit den Wurzeln $\beta_1 = \frac{1}{a_1}$, $\beta_2 = 0$; $(\mathfrak{e}_1)$ wird durch zwei Reihen

$$S_1 = e^{\frac{z^2}{2a_1} + \frac{a_1'}{a_1}z} \ldots, \quad S_2 = \cdots$$

formal befriedigt, wo an Stelle der Punkte Reihen von der Form stehen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{z^{s+n}}.$$

[2]) Vgl. Poincaré, Act. math. 8, S. 310–314 für den Rang 1.

Durch eine Substitution $x = \text{Const}\, x'$ erreicht man, daß $a_1 = 1$, also

$$S_1 = e^{\frac{z^2}{2} + a_1' z} \ldots$$

wird.

Wenn z mit einem gegebenen Argument ω ins Unendliche geht, sind zwei Integrale der Differentialgleichung $(\mathfrak{e}_1)$ so vorhanden, daß die asymptotischen Gleichungen gelten:

$$v_1 \sim S_1, \quad v_2 \sim S_2.$$

Wenn v die oben eingeführte beständig konvergente Reihe ist, hat man

$$v = c_1 v_1 + c_2 c_2,$$

wo c_1, c_2 in einem gewissen Intervall von ω konstant sind.

[Die Differentialgleichung $(\mathfrak{e}_1)$ besitzt[3]) vier ausgezeichnete Integrale $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \varphi^{(3)}$, welche den folgenden asymptotischen Gleichungen genügen:

$$\varphi^{(0)} \sim S_2 \text{ für } -\frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4},$$

$$\varphi^{(1)} \sim S_1 \text{ für } -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4},$$

$$\varphi^{(2)} \sim S_2 \text{ für } \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{7\pi}{4},$$

$$\varphi^{(1)} \sim S_1 \text{ für } \frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{9\pi}{4}.$$

Demnach ist für jedes ω mindestens ein ausgezeichnetes Integral [$\varphi^{(0)}$ oder $\varphi^{(2)}$], welches durch S_2, und mindestens ein ausgezeichnetes Integral [$\varphi^{(1)}$ oder $\varphi^{(3)}$], welches durch S_1 asymptotisch dargestellt wird (und zwar so, daß ω im Innern desjenigen Intervalls von $\arg z$ liegt, in welchem die asymptotische Darstellung gilt.)]

Das Laplacesche Integral

$$\int_l v\, e^{x z}\, dz = \int_l (c_1 v_1 + c_2 v_2)\, e^{x z}\, dz$$

konvergiert dann und nur dann, wenn auf l im Unendlichen

$$\Re\left(\frac{z^2}{2}\right) = \Re\left(\frac{|z|^2}{2} e^{2 i \omega}\right) = \frac{|z|^2}{2} \cos 2\omega \leqq 0$$

oder

$$\cos 2\omega \leqq 0,$$

also

$$\frac{\pi}{2} \leqq 2\omega \leqq \frac{3\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{5\pi}{2} \leqq 2\omega \leqq \frac{7\pi}{2},$$

$$\frac{\pi}{4} \leqq \omega \leqq \frac{3\pi}{4} \quad \text{oder} \quad \frac{5\pi}{4} \leqq \omega \leqq \frac{7\pi}{4}$$

---

[3]) Nach Act. math. **23** (1900), S. 84 oder auch nach Journ. f. Math. **133** (1907), S. 67; vgl. die Figur Act. math. **23**, S. 184.

ist. Damit

$$\arg(xz) = \arg x + \omega$$

zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ liegt, nehmen wir $\arg x$ zwischen $\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ oder zwischen $\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ an, so daß das LAPLACEsche Integral und die daraus folgende asymptotische Darstellung für

$$-\frac{\pi}{4} < \arg x < \frac{5\pi}{4}$$

und für

$$-\frac{5\pi}{4} < \arg x < \frac{\pi}{4}$$

gilt.

Noch einfacher als die Differentialgleichung (b) wäre die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (a_1 x + a_1')\frac{dy}{dx} + (a_2 x^2 + a_2' x + a_2'')\, y = 0,$$

welche auf die HERMITEsche Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n\,y = 0$$

(n beliebig) zurückgeführt werden kann. Setzt man $x = \xi^2$, so hat man die Differentialgleichung mit linearen Koeffizienten

$$4\,\xi\frac{d^2y}{d\xi^2} + 2\,(1-\xi)\frac{dy}{d\xi} + n\,y = 0.$$

Die *Differentialgleichung dritter Ordnung*

$$\frac{d^3y}{dx^3} + (a_1 x + a_1')\frac{d^2y}{dx^2} + (a_2 x^2 + a_2' x + a_2'')\frac{dy}{dx} +$$
$$+ (a_3 x^3 + a_3' x^2 + a_3'' x + a_3''')\, y = 0$$

kann ebenso behandelt werden wie hier die Differentialgleichung (b). Als LAPLACEsche Transformierte ergibt sich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Integrale sich in bekannter Weise asymptotisch darstellen lassen. Aus dieser asymptotischen Darstellung erhält man zwei Bedingungen für die Existenz der LAPLACEschen Integrale, welche der Differentialgleichung dritter Ordnung genügen.

Anmerkung über die Differentialgleichung (b). Wenn in (b) oder ($\mathfrak{b}_1$) $a_1 = 1$ gesetzt wird, ist das System ($\mathfrak{A}'$) in § 3:

$$\frac{1}{x}\frac{dy_1}{dx} - y_2 = 0,$$

$$\frac{1}{x}\frac{dy_2}{dx} + \left(1 + \frac{a_1'}{x} + \frac{a_1''+1}{x^2}\right) y_2 + \left(\frac{a_2''}{x^2} + \frac{a_2'''}{x^3}\right) y_1 = 0,$$

für

$$\mathfrak{y}_1 = y_1 + y_2, \quad \mathfrak{y}_2 = y_2$$

hat man das System $(\mathfrak{A}''')$:

$$\frac{1}{x}\frac{d\mathfrak{y}_1}{dx}+\left(\frac{a_2''}{x^2}+\frac{a_3'''}{x^3}\right)\mathfrak{y}_1+\left(\frac{a_1'}{x}+\frac{a_1''+1-a_3'''}{x^2}-\frac{a_2'''}{x^3}\right)\mathfrak{y}_2=0,$$
$$\frac{1}{x}\frac{d\mathfrak{y}_2}{dx}+\left(\frac{a_2''}{x^2}+\frac{a_2'''}{x^3}\right)\mathfrak{y}_1+\left(1+\frac{a_1'}{x}+\frac{a_1''+1-a_3'''}{x^2}-\frac{a_2'''}{x^3}\right)\mathfrak{y}_2=0,$$

d. i. die Form (A_1) in § 1, so daß die dort mit a_2 bezeichnete Größe gleich 1 zu setzen ist. Die in § 1 dem Integrationsweg auferlegte Bedingung

$$\Re\,(a_2\,e^{-2i\omega})\leqq 0$$

lautet also hier

$$\Re\,(e^{-2i\omega})=\cos 2\omega\leqq 0,$$

womit sich die oben in § 5 gefundene Bedingung wieder ergeben hat.

§ 6[4]).

In dem Differentialgleichungssystem

$$(A)\qquad x^{-1}\frac{dy_\alpha}{dx}+a_\alpha y_\alpha+\sum_{\beta=1}^{m}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{a_{\alpha\beta}^{(\lambda)}}{x^\lambda}y_\beta=0\qquad(\alpha=1,\ldots,m)$$

sei

$$a_1=0,\ \ldots,\ a_\mu=0,\ a_{\mu+1}\neq 0,\ \ldots,\ a_m\neq 0.$$

Wir setzen die *Elementarteiler der Determinante*

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{(1)}-s, & \ldots, & a_{1\mu}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu 1}^{(1)}, & \ldots, & a_{\mu\mu}^{(1)}-s \end{vmatrix}$$

als linear voraus; dann erreichen wir durch eine lineare Transformation von $y_1,\ldots,y_\mu$, daß

$$a_{\alpha\beta}^{(1)}=0\qquad(\alpha,\beta=1,\ldots,\mu;\ \alpha\neq\beta)$$

wird. Durch die Substitution

$$y_\alpha=e^{-a_{\lambda\lambda}^{(1)}x}z_\alpha\qquad(\alpha=1,\ldots,m),$$

wo λ eine feste Zahl $1,\ldots,\mu$ ist, werden die Diagonalelemente $a_{11}^{(1)},\ldots,a_{mm}^{(1)}$ um $a_{\lambda\lambda}^{(1)}$ vermindert, also $a_{\lambda\lambda}^{(1)}$ und etwaige weitere mit $a_{\lambda\lambda}^{(1)}$ übereinstimmende Diagonalelemente durch 0 ersetzt. Wenn wir die verschwindenden unter den Diagonalelementen $a_{11},\ldots,a_{\mu\mu}$, deren Anzahl $\varkappa$ heißen möge, an den Anfang setzen, haben wir

$$a_{11}^{(1)}=0,\ \ldots,\ a_{\varkappa\varkappa}^{(1)}=0,\quad a_{\varkappa+1,\varkappa+1}^{(1)}\neq 0,\ \ldots,\ a_{\mu\mu}^{(1)}\neq 0.$$

---

[4]) Auf Anwendungen von § 6 wird in der Fußnote am Schluß von § 2 hingewiesen.

Das Differentialgleichungssystem (A), das wir in der Form

$$x^{-1}\frac{dy_\alpha}{dx}+\sum_{\beta=\mu+1}^{m}\frac{a_{\alpha\beta}^{(1)}}{x}y_\beta+\sum_{\beta=1}^{m}\frac{a_{\alpha\beta}^{(2)}}{x^2}y_\beta+\cdots=0 \qquad (\alpha=1,\ldots,\varkappa),$$

$$x^{-1}\frac{dy_\alpha}{dx}+\frac{a_{\alpha\alpha}^{(1)}}{x}y_\alpha+\sum_{\beta=\mu+1}^{m}\frac{a_{\alpha\beta}^{(1)}}{x}y_\beta+\sum_{\beta=1}^{m}\frac{a_{\alpha\beta}^{(1)}}{x^2}y_\beta+\cdots=0 \qquad (\alpha=\varkappa+1,\ldots,\mu),$$

$$x^{-1}\frac{dy_\alpha}{dx}+a_\alpha y_\alpha+\sum_{\beta=1}^{m}\frac{a_{\alpha\beta}^{(1)}}{x}y_\beta+\sum_{\beta=1}^{m}\frac{a_{\alpha\beta}^{(2)}}{x^2}y_\beta+\cdots=0 \qquad (\alpha=\mu+1,\ldots,m)$$

schreiben, wird durch Reihen

$$y_\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}} \qquad (\alpha=1,\ldots,m)$$

formal befriedigt. Durch deren Einsetzung und Vergleichung der Koeffizienten von $\frac{1}{x^r}, \frac{1}{x^{r+1}}, \frac{1}{x^{r+2}}, \ldots, \frac{1}{x^{r+n}}$ erhält man die Gleichungen

$$(g_0) \qquad a_\alpha A_{\alpha 0}=0,$$

$$(g_1) \qquad a_\alpha A_{\alpha 1}+\sum_{\beta=1}^{m}a_{\alpha\beta}^{(1)}A_{\beta 0}=0,$$

$$(g_2) \qquad -rA_{\alpha 0}+a_\alpha A_{\alpha 2}+\sum_{\beta=1}^{m}a_{\alpha\beta}^{(1)}A_{\beta 1}+\sum_{\beta=1}^{m}a_{\alpha\beta}^{(2)}A_{\beta 0}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(g_n) \qquad -(r+n-2)A_{\alpha,n-2}+a_\alpha A_{\alpha n}+\sum_{\beta=1}^{m}a_{\alpha\beta}^{(1)}A_{\beta,n-1}+$$
$$+\sum_{\beta=1}^{m}a_{\alpha\beta}^{(2)}A_{\beta,n-2}+\cdots+\sum_{\beta=1}^{m}a_{\alpha\beta}^{(n)}A_{\beta 0}=0.$$

Aus den Gleichungen (g_0) folgt

$$A_{\alpha 0}=0 \qquad (\alpha=\mu+1,\ldots,m).$$

Die Gleichungen (g_1) sind für $\alpha=1,\ldots,\varkappa$ von selbst erfüllt, für $\alpha=\varkappa+1,\ldots,\mu$ lauten sie

$$a_{\alpha\alpha}^{(1)}A_{\alpha 0}=0,$$

so daß

$$A_{\alpha 0}=0 \qquad (\alpha=\varkappa+1,\ldots,\mu)$$

ist. Aus den Gleichungen (g_1)

$$a_\alpha A_{\alpha 1}+a_{\alpha 1}^{(1)}A_{10}+\cdots+a_{\alpha\varkappa}^{(1)}A_{\varkappa 0}=0$$

folgt

$$A_{\alpha 1}=-\frac{a_{\alpha 1}^{(1)}}{a_\alpha}A_{10}-\cdots-\frac{a_{\alpha\varkappa}^{(1)}}{a_\alpha}A_\varkappa \qquad (\alpha=\mu+1,\ldots,m).$$

Die $\varkappa$ ersten Gleichungen $(\mathfrak{g}_2)$ lauten

$$-rA_{\alpha 0} + a^{(1)}_{\alpha,\mu+1} A_{\mu+1,1} + \cdots + a^{(1)}_{\alpha 1} A_{m1} + \\ + a^{(2)}_{\alpha 1} A_{10} + \cdots + a^{(2)}_{\alpha\varkappa} A_{\varkappa 0} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, \varkappa)$$

oder, wenn man $A_{\mu+1,1}, \ldots, A_{m1}$ durch $A_{10}, \ldots, A_{\varkappa 0}$ ausdrückt und

$$H_{\alpha\beta} = a^{(2)}_{\alpha\beta} - \sum_{\gamma=\mu+1}^{m} \frac{a^{(1)}_{\alpha\gamma} a^{(1)}_{\gamma\beta}}{a_\gamma} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, \varkappa)$$

setzt:

$$(H_{11} - r) A_{10} + \cdots + H_{1\varkappa} A_{\varkappa 0} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$H_{\varkappa 1} A_{10} + \cdots + (H_{\varkappa\varkappa} - r) A_{\varkappa 0} = 0,$$

während r der Gleichung $\varkappa$-ten Grades

$$\Delta(r) = \begin{vmatrix} H_{11} - r, & \ldots, & H_{1\varkappa} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ H_{\varkappa 1}, & \ldots, & H_{\varkappa\varkappa} - r \end{vmatrix} = 0$$

genügt.

Durch $A_{10}, \ldots, A_{\varkappa 0}$ ist nicht nur $A_{\alpha 1}$ $(\alpha = \mu + 1, \ldots, m)$, sondern vermöge $(\mathfrak{g}_1)$

$$a^{(1)}_{\alpha\alpha} A_{\alpha 1} + a^{(1)}_{\alpha,\mu+1} A_{\mu+1,1} + \cdots + a^{(1)}_{\alpha m} A_{m1} + \\ + a^{(2)}_{\alpha 1} A_{10} + \cdots + a^{(2)}_{\alpha\varkappa} A_{\varkappa 0} = 0 \quad (\alpha = \varkappa + 1, \ldots, \mu)$$

auch $A_{\alpha 1}$ $(\alpha = \varkappa + 1, \ldots, \mu)$, die Formel $(\mathfrak{g}_2)$ wird für $\alpha = \mu + 1, \ldots, m$:

$$a_\alpha A_{\alpha 2} + a^{(1)}_{\alpha 1} A_{11} + \cdots + a^{(1)}_{\alpha m} A_{m1} + a^{(2)}_{\alpha 1} A_{10} + \cdots + a^{(2)}_{\alpha\varkappa} A_{\varkappa 0} = 0;$$

da $A_{\varkappa+1,1}, \ldots, A_{m1}$ durch $A_{10}, \ldots, A_{\varkappa 0}$ ausgedrückt sind, hat man

$$A_{\alpha 2} = -\frac{a^{(1)}_{\alpha 1}}{a_\alpha} A_{11} - \cdots - \frac{a^{(1)}_{\alpha\varkappa}}{a_\alpha} A_{\varkappa 1} + \cdots \qquad (\alpha = \mu + 1, \ldots, m),$$

wo die weggelassenen Glieder von $A_{10}, \ldots, A_{\varkappa 0}$ abhängen. Die Gleichung $(\mathfrak{g}_3)$ wird für $\alpha = 1, \ldots, \varkappa$:

$$-(r+1) A_{\alpha 1} + a^{(1)}_{\alpha,\mu+1} A_{\mu+1,2} + \cdots + a^{(1)}_{\alpha m} A_{m2} + \\ + a^{(2)}_{\alpha 1} A_{11} + \cdots + a^{(2)}_{\alpha m} A_{m1} + a^{(3)}_{\alpha 1} A_{10} + \cdots + a^{(3)}_{\alpha\varkappa} A_{\varkappa 0} = 0;$$

$A_{\varkappa+1,1}, \ldots, A_{m1}$ hängen nur von $A_{10}, \ldots, A_{\varkappa 0}$ ab; nach Einsetzung von $A_{\mu+1,2}, \ldots, A_{m2}$ haben wir

$$-(r+1)A_{\alpha 1} + a^{(1)}_{\alpha,\mu+1}\Big(-\frac{a^{(1)}_{\mu+1,1}}{a_{\mu+1}}A_{11} - \cdots - \frac{a^{(1)}_{\mu+1,\varkappa}}{a_{\mu+1}}A_{\varkappa 1}\Big) +$$
$$+ \cdots + a^{(1)}_{\alpha m}\Big(-\frac{a^{(1)}_{m1}}{a_m}A_{11} - \cdots - \frac{a^{(1)}_{m\varkappa}}{a_m}A_{\varkappa 1}\Big) +$$
$$+ a^{(2)}_{\alpha 1}A_{11} + \cdots + a^{(2)}_{\alpha\varkappa}A_{\varkappa 1} + \cdots = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, \varkappa)$$

unter Weglassung der nur von $A_{10}, \ldots, A_{\varkappa 0}$ abhängigen Glieder. Zur Berechnung von $A_{11}, \ldots, A_{\varkappa 1}$ haben wir die Gleichungen

$$-(r+1)A_{\alpha 1} + H_{\alpha 1}A_{11} + \cdots + H_{\alpha\varkappa}A_{\varkappa 1} + \cdots = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, \varkappa)$$

oder

$$(H_{11} - r - 1)A_{11} + \cdots + H_{1\varkappa}A_{\varkappa 1} + \cdots = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$H_{\varkappa 1}A_{11} + \cdots + (H_{\varkappa\varkappa} - r - 1)A_{\varkappa 1} + \cdots = 0,$$

usw.

Wenn die Gleichung $\Delta(r) = 0$ $\varkappa$ verschiedene Wurzeln $r_1, \ldots, r_\varkappa$ ohne ganzzahlige Differenz besitzt, berechnen sich für $y_1, \ldots, y_m$ $\varkappa$ verschiedene Reihensysteme von der angegebenen Form. Wir lassen auch mehrfache Wurzeln der Gleichung $\Delta(r) = 0$ zu, setzen aber voraus, daß *die Determinante* $\Delta(r)$ *nur lineare Elementarteiler* $r - r_1, \ldots, r - r_\varkappa$ *besitzt und daß zwischen* $r_1, \ldots, r_\varkappa$ *keine von Null verschiedene ganzzahlige Differenz besteht.*

Durch die Laplacesche Transformation

$$y_\alpha = \int_0^\infty w_\alpha(t)\, e^{-tx}\, dt \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

gehen die Differentialgleichungen (A) nach § 1 über in die Integralgleichungen

$$(B) \quad \int_0^t \tau\, w_\alpha(\tau)\, d\tau = a_\alpha\, w_\alpha(t) + \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t G_{\alpha\beta}(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

mit

$$G_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{a^{(\lambda)}_{\alpha\beta}\, t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}, \quad G_{\alpha\beta}(0) = a^{(0)}_{\alpha\beta}.$$

Aus den Integralgleichungen (B) erhält man durch Einsetzung der Reihen

$$w_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}\, t^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

dieselben Rekursionsformeln für die $A_{\alpha n}$ wie oben aus den Differentialgleichungen (A).

Das System (B) geht durch Differentiation der zu $\alpha = 1, \ldots, \mu$ gehörigen Integralgleichungen über in

$$(\widetilde{\mathrm{B}}) \quad \begin{cases} t w_\alpha(t) = \sum_{\beta=\mu+1}^{m} a_{\alpha\beta}^{(1)} w_\beta(t) + \\ \qquad + \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t G'_{\alpha\beta}(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau \qquad (\alpha = 1, \ldots, \varkappa), \\ (t - a_{\alpha\alpha}^{(1)})\, w_\alpha(t) = \sum_{\beta=\mu+1}^{m} a_{\alpha\beta}^{(1)} w_\beta(t) + \\ \qquad + \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t G'_{\alpha\beta}(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau \qquad (\alpha = \varkappa+1, \ldots, \mu), \\ a_\alpha w_\alpha(t) = \int_0^t \tau\, w_\alpha(\tau)\, d\tau - \\ \qquad - \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t G_{\alpha\beta}(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau \qquad (\alpha = \mu+1, \ldots, m). \end{cases}$$

Wenn man in

$$\sum_{\beta=\mu+1}^{m} a_{\alpha\gamma}^{(1)} w_\gamma(t) \qquad (\alpha = 1, \ldots, \mu)$$

an Stelle von $w_\gamma(t)$ den Ausdruck

$$\frac{1}{a_\gamma} \int_0^t \tau\, w_\gamma(\tau)\, d\tau - \frac{1}{a_\gamma} \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t G_{\gamma\beta}(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau$$

setzt, erhält man Gleichungen

$$(\widetilde{\mathrm{C}}) \quad \begin{cases} t w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t f_{\alpha\beta}(t,\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau \qquad (\alpha = 1, \ldots, \varkappa), \\ w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t f_{\alpha\beta}(t,\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau \qquad (\alpha = \varkappa+1, \ldots, m). \end{cases}$$

Schließt man die Geraden aus, welche von $t = a_{\alpha\alpha}^{(1)}$ $(\alpha = \varkappa+1, \ldots, \mu)$ mit $\arg t = a_{\alpha\alpha}^{(1)}$ ins Unendliche gehen, so sind die Funktionen $f_{\alpha\beta}(t,\tau)$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$ für alle endlichen Werte von t regulär, wenn τ auf der Geraden $0 \ldots t$ angenommen wird.

Die Integralgleichungen $(\widetilde{\mathrm{C}})$ haben die Form der Gleichungen (C) in Jahresber. **24**, S. 315—318; es spielt nur jetzt $\varkappa$ die Rolle des dortigen μ. Wenn wir aus unseren m Integralgleichungen $(\widetilde{\mathrm{C}})$ die Funktionen $w_{\varkappa+1}(t)$, $\ldots, w_m(t)$ eliminieren, erhalten wir $\varkappa$ Integralgleichungen

$$t w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{\varkappa} \int_0^t Q_{\alpha\beta}(t,\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau \qquad (\alpha = 1, \ldots, \varkappa),$$

wo $Q_{\alpha\beta}(t,\tau)$ wie a. a. O., S. 316–317 gebildet und $Q_{\alpha\beta}(0,0) = f_{\alpha\beta}(0,0)$ $(\alpha,\beta = 1,\ldots,\varkappa)$ ist.

Wir haben für $\alpha,\ \beta = 1,\ldots,\varkappa$

$$f_{\alpha\beta}(t,\tau) = G'_{\alpha\beta}(t-\tau) - \sum_{\gamma=\mu+1}^{m} \frac{a^{(1)}_{\alpha\gamma}}{a_\gamma}\, G_{\gamma\beta}(t-\tau),$$

$$f_{\alpha\beta}(0,0) = a^{(2)}_{\alpha\beta} - \sum_{\gamma=\mu+1}^{m} \frac{a^{(1)}_{\alpha\gamma} a^{(1)}_{\gamma\beta}}{a_\gamma} = H_{\alpha\beta}.$$

Die Determinante

$$\Delta(s) = |f_{\alpha\beta}(0,0) - s\,\delta_{\alpha\beta}| = |H_{\alpha\beta} - s\,\delta_{\alpha\beta}| \quad (\alpha,\beta = 1,\ldots,\varkappa)$$

soll lineare Elementarteiler $s - r_1,\ldots,s - r_\varkappa$ besitzen, ohne daß zwischen $r_1,\ldots,r_\varkappa$ eine von 0 verschiedene ganzzahlige Differenz besteht. Die Realteile von $r_1,\ldots,r_\varkappa$ seien positiv. Dann haben die Integralgleichungen $(\widetilde{C})$ $\varkappa$ linear unabhängige Lösungen

$$w_\alpha(t) = t^{r_\lambda - 1}\mathfrak{p}_{\alpha\lambda}(t) \quad (\alpha = 1,\ldots,m;\ \lambda = 1,\ldots,\varkappa),$$

wo $\mathfrak{p}_{\alpha\lambda}(t)$ im oben bezeichneten Gebiet regulär und $\mathfrak{p}_{\alpha\lambda}(0) = 0$ $(\alpha = \varkappa+1,\ldots,m)$ ist. Wir können schreiben

$$w_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}\, t^{r_\lambda + n - 1}}{\Gamma(r_\lambda + n)} \qquad (\alpha = 1,\ldots,m)$$

für $|t| < R$, wo R die kleinste der Größen $|a^{(1)}_{\varkappa+1,\varkappa+1}|,\ldots,|a^{(1)}_{\mu\mu}|$ ist; im Falle $\varkappa = \mu$ haben wir beständig (abgesehen von $t = 0$) konvergente Reihen.

Die Differentialgleichungen $(\widetilde{A})$ *werden in dem Gebiet* $\Re(x\,e^{i\omega}) > \sigma(\omega)$ *durch* Laplacesche *Integrale*

$$y_\alpha = \int_0^\infty w_\alpha(t)\, e^{-tx}\, dt \qquad (\alpha = 1,\ldots,m)$$

befriedigt, wenn der Integrationsweg $\arg t = \omega$ *die Bedingungen*

$$\Re(a_\alpha\, e^{-2i\omega}) < 0 \qquad (\alpha = \mu+1,\ldots,m)$$

erfüllt.

Wie am Schluß von § 1 können diese Bedingungen durch

$$\Re(a_\alpha\, e^{-2i\omega}) \leqq 0 \qquad (\alpha = \mu+1,\ldots,m)$$

ersetzt werden.

(Eingegangen am 4. September 1943.)

Die zulässigen Randbedingungen bei den singulären Eigenwertproblemen der mathematischen Physik.

(Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung.)

Von

Franz Rellich in Dresden.

Das Eigenwertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form

$$-(p(x)u')' + q(x)u = \lambda k(x)u \qquad (l < x < L) \tag{1}$$

heißt *regulär*, wenn erstens das Intervall (l, L) endlich ist und wenn zweitens in dem abgeschlossenen Intervall $l \leqq x \leqq L$ gilt:

$$p(x),\ p'(x),\ q(x),\ k(x) \text{ stetig reell und } p(x) > 0,\ k(x) > 0. \tag{2}$$

Die Funktionen $u(x)$, auf welche der durch (1) gegebene Differentialoperator angewendet wird, also insbesondere die Eigenfunktionen, sind gewissen Bedingungen zu unterwerfen. Neben der Forderung, $u(x)$ soll in $l \leqq x \leqq L$ eine komplexwertige, zweimal stetig differenzierbare Funktion sein, sind das Randbedingungen von der Art, daß der Operator in dem so eingeschränkten Bereich von Funktionen genau eine Spektralzerlegung besitzt; solche „zulässigen" Randbedingungen[1]) sind z. B.

$$\begin{aligned} u(l)\cos\alpha + u'(l)\sin\alpha &= 0 \qquad (0 \leqq \alpha < \pi), \\ u(L)\cos\beta + u'(L)\sin\beta &= 0 \qquad (0 \leqq \beta < \pi). \end{aligned} \tag{3}$$

Das Eigenwertproblem (1) heißt *singulär*, wenn $l = -\infty$ bzw. $L = +\infty$ zugelassen wird und wenn die Voraussetzungen (2) nur mehr im offenen Intervall $l < x < L$ gemacht werden. Die Theorie dieser singulären Eigenwertprobleme ist von H. Weyl gegeben worden[2]). Die Bedingungen, welche nach Weyl für die Funktionen $u(x)$ zu fordern sind, lauten

---

[1]) Nach einer Bezeichnungsweise von K. Friedrichs. Vgl. die in Anm. 4 genannte Arbeit.

[2]) H. Weyl, Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen. Math. Ann. 68 (1910). S. 220–269. Außerdem Göttinger Nachrichten 1909, S. 37–63 und 1910, S. 442–467 Eine ausführliche Behandlung bei M. H. Stone, Linear transformations in Hilbert space. New York 1932.

(4) I. $u(x)$ komplexwertig und zweimal stetig differenzierbar,

II. $\int_l^L k|u|^2\,dx < \infty$ und $\int_l^L \frac{1}{k}\,|-(pu')'+qu|^2\,dx < \infty$.

Bezeichnet man die Gesamtheit der in $l < x < L$ erklärten (komplexwertigen) Funktionen $u(x)$, für welche $\int_l^L k|u|^2\,dx$ im Sinne von LEBESGUE existiert und endlich ist als den HILBERTschen *Raum* $\mathfrak{H}$ mit dem inneren Produkt $(u, v) = \int_l^L ku\bar{v}\,dx$, dann besagt die Bedingung II offenbar gerade, daß u und Au in $\mathfrak{H}$ liegen sollen, wenn man unter A den zu (1) gehörigen Differentialoperator bezeichnet: $Au = \frac{1}{k}\{-(pu')' + qu\}$. Die Bedingungen II sind also sogar *notwendig* — jedenfalls dann, wenn man die zu (1) gehörige Eigenwertaufgabe als die Spektralzerlegung eines Operators im HILBERTschen Raum auffassen will.

WEYL zeigt ferner: Wenn bei $x = l$ (bzw. bei $x = L$) der „Grenzpunktfall" vorliegt[3]), dann sind über (4) hinaus keine weiteren Bedingungen, insbesondere keine Randbedingungen bei $x = l$ (bzw. bei $x = L$) zu stellen. Da man bei den singulären Eigenwertaufgaben, welche in der mathematischen Physik vorkommen, bequem entscheiden kann, ob an den Intervallenden der Grenzpunkt- oder der Grenzkreisfall vorliegt, ist damit im Grenzpunktfall die Frage nach den zulässigen Randbedingungen in befriedigendster Weise beantwortet.

Wenn bei $x = l$ (bzw. bei $x = L$) der Grenzkreisfall vorliegt, dann muß nach WEYL über (4) hinaus bei $x = l$ (bzw. bei $x = L$) noch eine Randbedingung gestellt werden, und zwar gibt es (analog zum regulären Fall) eine bnendliche Schar möglicher Randbedingungen. Einen vollständigen Überulick über die Gesamtheit aller möglichen Randbedingungen gibt M. H. STONE

---

[3]) Bei $x = l$ (bzw. $x = L$) liegt der *Grenzpunktfall* vor, wenn (1) mit irgendeinem reellen oder komplexen λ eine Lösung besitzt, für die $\int_l^{x_0} k|u|^2\,dx = \infty$ (bzw. $\int_{x_0}^L k|u|^2\,dx = \infty$) ausfällt, $l < x_0 < L$; es liegt der *Grenzkreisfall* vor, wenn mit irgendeinem reellen oder komplexen λ für alle Lösungen $u(x)$ von (1) gilt $\int_l^{x_0} \kappa|u|^2 dx < \infty$ (bzw. $\int_{x_0}^L k|u|^2\,dx < \infty$). WEYL beweist die Alternative: Bei $x = l$ (bzw. bei $x = L$) liegt entweder der Grenzpunktfall oder der Grenzkreisfall vor.

in seinem Buche[2]). Diese Randbedingungen sind indes — auch in der von Stone verbesserten Form — nicht direkt verwendbar: selbst in dem Spezialfall des regulären Eigenwertproblems ist eine verhältnismäßig mühsame Reduktion erforderlich, um sie auf die Form (3) zu bringen.

Solange man über das Verhalten der Koeffizienten $p(x)$, $q(x)$, $k(x)$ an den Intervallenden keinerlei Voraussetzungen macht, dürfte die von Stone gegebene Formulierung der Randbedingungen im Grenzkreisfall kaum wesentlich verbessert werden können. Bei den singulären Eigenwertproblemen, die in der mathematischen Physik eine Rolle spielen, liegt indes, soviel ich sehe, an einer Stelle, bei welcher der Grenzkreisfall gegeben ist, in der Regel auch eine Stelle der Bestimmtheit vor. Ich setze daher in dieser Arbeit voraus, daß ein Intervallende, bei dem der Grenzkreisfall vorliegt, zugleich eine Stelle der Bestimmtheit für die Differentialgleichung (1) ist und gebe unter dieser Voraussetzung zulässige Randbedingungen an, die ebenso handlich sind wie die Randbedingungen (3) im regulären Fall [vgl. insbesondere die Formulierung am Ende von § 2][4]).

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß am linken Intervallende der Grenzkreisfall gegeben ist und wählen $l = 0$; die Stelle $x = 0$ soll also für die Differentialgleichung eine Stelle der Bestimmtheit sein. Für das rechte Intervallende $x = L$ könnte man offen lassen, ob der Grenzkreis- oder der Grenzpunktfall eintritt. Da indes im Grenzpunktfall bei $x = L$ gegenüber Weyl nichts Neues zu beweisen wäre, und, falls $x = L$ eine singuläre Stelle mit Grenzkreisfall wäre, nur das an der Stelle $x = 0$ Gesagte wiederholt werden müßte, setzen wir das Eigenwertproblem bei $x = L$ regulär voraus, verlangen also insbesondere endliches L. Auf diese Weise wird die ganze Arbeit unabhängig von den Arbeiten von Weyl und Stone lesbar.

Demnach sind die genauen Voraussetzungen über das in dieser Arbeit behandelte Eigenwertproblem diese: Für die Koeffizienten der Differentialgleichung

$$-(p(x)u')' + q(x)u = \lambda k(x)u \tag{5}$$

soll gelten:

---

[4]) K. Friedrichs gibt in der Arbeit „Über die ausgezeichnete Randbedingung in der Spektraltheorie der halbbeschränkten gewöhnlichen Differentialoperatoren zweiter Ordnung", Math. Ann. 112 (1936), S. 1–23 gleichfalls eine bequem verwendbare Randbedingung unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen über die Funktionen $p(x)$, $q(x)$, $k(x)$. Die Tendenz dieser Arbeit ist aber eine andere als die der vorliegenden, da nicht die ganze Schar der möglichen Randbedingungen angegeben wird, sondern nur eine einzige, eben die „ausgezeichnete Randbedingung".

1) $p(x)$, $p'(x)$ reell und stetig, $q(x)$, $k(x)$ reell und stückweise stetig[5]) in $0 < x \leqq L$.

2) $p(x) > 0$, $k(x) > 0$ in $0 < x \leqq L$.

3) Die Stelle $x = 0$ ist für jeden Wert von λ eine Stelle der Bestimmtheit[6]).

4) Bei $x = 0$ liegt der Grenzkreisfall vor, d. h. es gibt ein (komplexes) λ_0, so daß für alle Lösungen von (5) mit $\lambda = \lambda_0$ gilt $\int_0^L k\,|u|^2 dx < \infty$.

Die Voraussetzungen 1) bis 4) werden in der ganzen Arbeit zugrunde gelegt und nicht wiederholt. Desgleichen soll in der ganzen Arbeit unter „Lösung" der Differentialgleichung (5) immer nur eine Funktion mit den Eigenschaften

(6) $u(x)$ komplexwertig; u, u' stetig; u'' stückweise stetig in $0 < x \leqq L$

verstanden werden.

§ 1.

Stelle der Bestimmtheit und Grenzkreisfall.

Da die Stelle $x = 0$ für die Differentialgleichung (5) eine Stelle der Bestimmtheit ist, wird der analytische Charakter der Lösungen von (5) in der Umgebung von $x = 0$ durch die charakteristischen Exponenten gegeben. Da zugleich der Grenzkreisfall vorliegt, läßt sich zeigen — und darauf beruht die Möglichkeit der ganzen folgenden Darstellung —, daß sowohl die charakteristischen Exponenten als auch gewisse Anfangskoeffizienten eines geeignet ausgesuchten Fundamentalsystems von λ unabhängig sind. Dem Nachweis dieser Tatsache dient dieser Paragraph.

Die Differentialgleichung (5) oder $u'' + \frac{p'}{p} u' + \lambda \frac{k}{p} u - \frac{q}{p} u = 0$ hat $x = 0$ für jeden Wert der (komplexen) Konstanten λ offenbar genau dann zur Stelle der Bestimmtheit, wenn

$$\frac{p'}{p} = \sigma x^{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots, \quad \frac{q}{p} = \beta_{-2} x^{-2} + \beta_{-1} x^{-1} + \cdots,$$

$$\frac{k}{p} = \gamma_{-2} x^{-2} + \gamma_{-1} x^{-1} + \cdots$$

---

[5]) Eine Funktion heißt in $0 < x \leqq L$ stückweise stetig, wenn sie dort bis auf endlich viele endliche Sprungstellen stetig ist. Für die physikalische Anwendung ist es häufig bequem, unstetiges $q(x)$ benutzen zu dürfen.

[6]) Der analytische Charakter, der dadurch für p, q, k vorausgesetzt wird, soll natürlich nur in einer Umgebung von $x = 0$ gefordert werden.

ist, wobei die Reihen reelle Koeffizienten haben und in einer Umgebung von $x = 0$ konvergieren[7]). Es wird also

$$\begin{aligned} p(x) &= x^{\sigma}(p_0 + p_1 x + \cdots) \\ q(x) &= x^{\sigma-2}(q_0 + q_1 x + \cdots) \\ k(x) &= x^{\sigma-2}(k_0 + k_1 x + \cdots) \end{aligned} \tag{7}$$

mit reellem σ, $p_0, p_1, \ldots, q_0, q_1, \ldots, k_0, k_1, \ldots$. Es ist $p_0 \neq 0$. Da $k(x)$ nach Voraussetzung nicht identisch verschwindet, gibt es eine ganze Zahl g derart, daß

$$k_g \neq 0 \text{ und } k_j = 0 \quad \text{für } j < g. \tag{8}$$

Die Differentialgleichung (5) bekommt die Form

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j\Big) x^2 u'' + \Big(\sum_{j=0}^{\infty} p_j (j+\sigma) x^j\Big) x u' + \Big(\sum_{j=0}^{\infty} (\lambda k_j - q_j) x^j\Big) u = 0 \tag{9}$$

und die Gleichung für die charakteristischen Exponenten heißt $p_0 \varrho(\varrho - 1) + p_0 \sigma \varrho + \lambda k_0 - q_0 = 0$ oder

$$\varrho^2 + (\sigma - 1)\varrho + \lambda \frac{k_0}{p_0} - \frac{q_0}{p_0} = 0. \tag{10}$$

Die beiden Wurzeln dieser quadratischen Gleichung seien ϱ_1 und ϱ_2. Es sei

(11) $r_1 = Re\, \varrho_1$, $r_2 = Re\, \varrho_2$, $r_1 \geqq r_2$; wenn $r_1 = r_2$, dann $Im\, \varrho_1 \geqq Im\, \varrho_2$;

also $\varrho_1 + \varrho_2 = 1 - \sigma = r_1 + r_2$. Dann gibt es bekanntlich eine Lösung von (5), welche in einer Umgebung von $x = 0$ die Form hat

$$\omega(x) = x^{\varrho_1}(\omega_0 + \omega_1 x + \cdots); \quad \omega_0 = 1, \tag{12}$$

und eine zweite Lösung von der Form

$$\psi(x) = x^{\varrho_2}(\psi_0 + \psi_1 x + \cdots) + c\,\omega(x) \log x \tag{13}$$

mit

$$\begin{aligned} &\psi_0 = 1, \quad c = 0, && \text{wenn } \varrho_1 - \varrho_2 \text{ nicht ganz} \\ &\psi_0 = 0, \quad c = 1, && \text{wenn } \varrho_1 - \varrho_2 = 0 \\ &\psi_0 = 1, \quad \psi_n = 0, && \text{wenn } \varrho_1 - \varrho_2 = n \text{ ganz positiv.} \end{aligned} \tag{14}$$

Wir nennen $\psi(x)$, $\omega(x)$ das genormte Fundamentalsystem der Differentialgleichung (5).

[7]) Vgl. Anm. 6.

Da bei $x = 0$ der Grenzkreisfall vorliegt, ist mit einem geeigneten (komplexen) $\lambda = \lambda_0$ und genügend kleinem $\delta > 0$ jedenfalls $\int_0^\delta k|\psi|^2 dx < \infty$. Also wegen $k(x) = x^{\sigma-2+g}(k_g + k_{g+1}x + \cdots), k_g \neq 0$ auch $\int_0^\delta x^{\sigma-2+g} x^{2r_2} dx < \infty$, d. h. $\sigma - 2 + g + 2r_2 > -1$, also

$$g > r_1 - r_2. \tag{15}$$

Auf jeden Fall ist also $g > 0$, $k_0 = 0$. Daher sind die charakteristischen Exponenten ϱ_1 und ϱ_2 von λ unabhängig. Eine Folge davon ist, daß nicht nur für $\lambda = \lambda_0$, sondern für jedes (komplexe) λ sämtliche Lösungen $u(x)$ von (5) die Beziehung $\int_0^L k|u|^2 dx < \infty$ erfüllen[8]).

Zur Bestimmung der Koeffizienten $\omega_0, \omega_1, \ldots; \psi_0, \psi_1, \ldots; c$ gehen wir zunächst mit dem Ansatz (12) in die Gleichung (9) ein und erhalten

$$\sum_{\nu=0}^{\mu} [p_{\mu-\nu}(\varrho_1+\nu)(\varrho_1+\nu-1) + p_{\mu-\nu}(\mu-\nu+\sigma)(\varrho_1+\nu) + \lambda k_{\mu-\nu} - q_{\mu-\nu}]\omega_\nu = 0; \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots. \tag{16}$$

Für $\mu = 0$ ergibt sich wegen $\omega_0 = 1$ die Gleichung (10) mit $\varrho = \varrho_1$; für $\mu = 1, 2, \ldots$ wird

$$[p_0(\varrho_1+\mu)(\varrho_1+\mu-1) + p_0\sigma(\varrho_1+\mu) + \lambda k_0 - q_0]\omega_\mu + \sum_{\nu=0}^{\mu-1} [p_{\mu-\nu}(\varrho_1+\nu)(\varrho_1+\nu-1) + p_{\mu-\nu}(\mu-\nu+\sigma)(\varrho_1+\nu) + \lambda k_{\mu-\nu} - q_{\mu-\nu}]\omega_\nu = 0. \tag{17}$$

Also sind die $\omega_0 = 1, \omega_1, \omega_2, \ldots$ eindeutig bestimmt und wegen $k_0 = k_1 = \cdots = k_{g-1} = 0$ ist $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{g-1}$ von λ unabhängig.

Wenn $\varrho_1 - \varrho_2$ nicht ganz ist, dann gelten sofort die Gleichungen, die man aus (16) und (17) erhält, indem man ϱ_1 durch ϱ_2 und ω_ν durch ψ_ν ersetzt. Es sind in diesem Falle die $\psi_0 = 1, \psi_1, \psi_2, \ldots$ eindeutig bestimmt und $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{g-1}$ von λ unabhängig. Da ϱ_1 und ϱ_2 konjugiertkomplex sind, wenn sie nicht reell sind, so ist in diesem Falle $\psi_0 = \bar{\omega}_0, \psi_1 = \bar{\omega}_1, \ldots, \psi_{g-1} = \bar{\omega}_{g-1}$.

Wenn $\varrho_1 - \varrho_2 = n$ ganz, dann

$$\sum_{j,\nu=0}^{\infty} [p_j(\varrho_2+\nu)(\varrho_2+\nu-1) + p_j(j+\sigma)(\varrho_2+\nu) + \lambda k_j - q_j]\psi_\nu x^{\varrho_2+j+\nu} + c\sum_{j,\nu=0}^{\infty} [-p_j + 2p_j(\varrho_1+\nu) + p_j(j+\sigma)]\omega_\nu x^{\varrho_1+\nu+j} = 0$$

[8]) Das ist ein Spezialfall eines allgemeinen Satzes von WEYL über den Grenzkreisfall, der die in Anm. 3 gegebene Definition überhaupt erst rechtfertigt.

oder

$$(18)\quad \sum_{\mu=0}^{\infty} x^{\varrho_2+\mu} \sum_{\nu=0}^{\mu} [p_{\mu-\nu}(\varrho_2+\nu)(\varrho_2+\nu-1)+p_{\mu-\nu}(\mu-\nu+\sigma)(\varrho_2+\nu)+$$
$$+\lambda k_{\mu-\nu}-q_{\mu-\nu}]\psi_\nu + c\sum_{\mu=0}^{\infty} x^{\varrho_1+\mu}\sum_{\nu=0}^{\mu}[-1+2(\varrho_1+\nu)+\mu-\nu+\sigma]\,p_{\mu-\nu}\omega_\nu = 0.$$

Sei zunächst $n = 0$, also $\psi_0 = 0$, $c = 1$. Dann wird

$$(19)\quad \sum_{\nu=0}^{\mu}[p_{\mu-\nu}(\varrho_2+\nu)(\varrho_2+\nu-1)+p_{\mu-\nu}(\mu-\nu+\sigma)(\varrho_2+\nu)+$$
$$+\lambda k_{\mu-\nu}-q_{\mu-\nu}]\psi_\nu+\sum_{\nu=0}^{u}[-1+2\varrho_2+\mu+\nu+\sigma]\,p_{\mu-\nu}\omega_\nu=0.$$

Für $\mu = 0$ wird $-1+2\varrho_2+\sigma = 0$, was nichts Neues liefert. Für $\mu = 1, 2, \ldots$ erhält man

$$(20)\quad [p_0(\varrho_2+\mu)(\varrho_2+\mu-1)+p_0\sigma(\varrho_2+\mu)+\lambda k_0-q_0]\psi_\mu+$$
$$+\sum_{\nu=0}^{\mu-1}[p_{\mu-\nu}(\varrho_2+\nu)(\varrho_2+\nu-1)+p_{\mu-\nu}(\mu-\nu+\sigma)(\varrho_2+\nu)+$$
$$+\lambda k_{\mu-\nu}-q_{\mu-\nu}]\psi_\nu+\sum_{\nu=0}^{\mu}[-1+2\varrho_2+\mu+\nu+\sigma]\,p_{\mu-\nu}\omega_\nu=0.$$

Also $\psi_0 = 0$, $\psi_1, \psi_2, \ldots$ eindeutig bestimmt und $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{g-1}$ von λ unabhängig. Ist schließlich $\varrho_1 - \varrho_2 = n > 0$ ganz, dann $\psi_0 = 1$, $\psi_n = 0$. Aus (18) folgt

$$(21)\quad \sum_{\nu=0}^{\mu}[p_{\mu-\nu}(\varrho_2+\nu)(\varrho_2+\nu-1)+p_{\mu-\nu}(\mu-\nu+\sigma)(\varrho_2+\nu)+$$
$$+\lambda k_{\mu-\nu}-q_{\mu-\nu}]\psi_\nu=0,\quad \mu=0,1,\ldots,n-1:$$

$$(22)\quad \sum_{\nu=0}^{n}[p_{n-\nu}(\varrho_2+\nu)(\varrho_2+\nu-1)+p_{n-\nu}(n-\nu+\sigma)(\varrho_2+\nu)+$$
$$+\lambda k_{n-\nu}-q_{n-\nu}]\psi_\nu+c\,[-1+2(\varrho_2+n)+\sigma]\,p_0\omega_0=0;$$

$$(23)\quad \sum_{\nu=0}^{\mu}[p_{\mu-\nu}(\varrho_2+\nu)(\varrho_2+\nu-1)+p_{\mu-\nu}(\mu-\nu+\sigma)(\varrho_2+\nu)+$$
$$+\lambda k_{\mu-\nu}-q_{\mu-\nu}]\psi_\nu+c\sum_{\nu=0}^{\mu-n}[-1+2(\varrho_2+n+\nu)+$$
$$+\mu-n-\nu+\sigma]\,p_{\mu-n-\nu}\omega_\nu=0,\quad \mu=n+1,\,n+2,\ldots.$$

Aus (21) sieht man, daß $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ eindeutig bestimmt und (wegen $g > n$) von λ unabhängig ist, aus (22) folgt wegen $\psi_n = 0$ und $-1+2\varrho_2+2n+\sigma = -1+2\varrho_2+2n+1-\varrho_1-\varrho_2 = n > 0$, daß c eindeutig bestimmt ist und nicht von λ abhängt. Aus (23) folgt, daß $\psi_{n+1}, \psi_{n+2}+\cdots$ eindeutig bestimmt ist. Wenn $g > n+1$, dann ist $\psi_{n+1}, \psi_{n+2}, \ldots, \psi_{g-1}$ von λ unabhängig.

In allen Fällen sind die durch (12), (13) und (14) festgelegten Lösungen $\omega(x)$ und $\psi(x)$ eindeutig bestimmt. Die Zahlen $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{g-1}; \psi_0, \psi_1, \ldots,$

ψ_{g-1}; c sind von λ unabhängig, sie sind reell, wenn ϱ_1 und ϱ_2 reell sind und es ist $\psi_0 = \overline{\omega}_0$, $\psi_1 = \overline{\omega}_1, \ldots, \psi_{g-1} = \overline{\omega}_{g-1}$, wenn ϱ_1, ϱ_2 nicht reell sind.

Es sei $\Omega_g(x)$ derjenige Abschnitt von $\omega(x)$, in dem alle Potenzen weggelassen sind, deren Exponenten einen Realteil größer als $r_2 + g - 1$ besitzen[9]), also

$$\Omega_g(x) = x^{\varrho_1}(\omega_0 + \omega_1 x + \cdots + \omega_{h-1} x^{h-1}), \tag{24}$$

wobei die Zahl h erklärt ist durch $r_2 + g - 1 \leqq r_1 + h - 1 < r_2 + g$. Offenbar $1 \leqq h \leqq g$. Ferner setzen wir

$$\Psi_g(x) = x^{\varrho_2}(\psi_0 + \psi_1 x + \cdots + \psi_{g-1} x^{g-1}) + c\,\Omega_g(x) \log x. \tag{25}$$

Die beiden Funktionen $\Psi_g(x)$ und $\Omega_g(x)$ sind von λ unabhängig.

Jede Lösung $u(x)$ der Differentialgleichung (5) läßt sich mit geeigneten (komplexen) Zahlen u_0 und u_1 in einer rechtsseitigen Umgebung von $x = 0$ schreiben in der Form

$$u(x) = u_0 \Psi_g(x) + u_1 \Omega_g(x) + O_2(x^{r_2+g} |\log x|), \tag{26}$$

wenn wir unter $O_2(x^{r_2+g} |\log x|)$ eine Funktion $w(x)$ verstehen, die in einer rechtsseitigen Umgebung von $x = 0$ zweimal stetig differenzierbar ist und für die

$$w(x) = O(x^{r_2+g} |\log x|), \quad w'(x) = O(x^{r_2+g-1} |\log x|), \tag{27}$$
$$w''(x) = O(x^{r_2+g-2} |\log x|)$$

gilt, unter O das Landausche Symbol bei Annäherung an $x = 0$ von rechts verstanden. In der Tat ist

$$w(x) = u(x) - u_0 \Psi_g(x) - u_1 \Omega_g(x) = u_0(\psi_g x^{\varrho_2+g} + \psi_{g+1} x^{\varrho_2+g+1} + \cdots) +$$
$$+ u_0 c\,(\omega_h x^{\varrho_1+h} + \omega_{h+1} x^{\varrho_1+h+1} + \cdots) \log x + u_1(\omega_h x^{\varrho_1+h} + \omega_{h+1} x^{\varrho_1+h+1} + \cdots),$$

woraus die Behauptung abgelesen werden kann.

Die Gesamtheit der Funktionen $u(x)$, welche die Darstellung (26) gestatten (ohne notwendig Lösungen der Differentialgleichung zu sein), wollen wir $\mathfrak{D}$ nennen, also

Definition. *$\mathfrak{D}$ ist die Gesamtheit aller komplexwertigen $u(x)$ mit den Eigenschaften*

1. *In $0 < x \leqq L$ ist $u(x)$, $u'(x)$ stetig, $u''(x)$ stückweise[5]) stetig.*

2. *In einer rechtsseitigen Umgebung von $x = 0$ ist $u(x) = u_0 \Psi_g(x) + u_1 \Omega_g(x) + O_2(x^{r_2+g} |\log x|)$ mit geeigneten Konstanten u_0, u_1.*

---

[9]) Der Grund hierzu wird unten klar: Für Potenzen $f(x) = x^{r_2+g}$ und für höhere Potenzen ist $\int_0^L \frac{1}{k} |(pf')' - qf|^2\, dx < \infty$.

Wenn $u(x)$ eine Funktion aus $\mathfrak{D}$ ist, dann lassen sich die Zahlen u_0 und u_1 von (26) aus $u(x)$ folgendermaßen herleiten:

$$u_0 = \lim_{x\to 0} \frac{u(x)}{x^{\varrho_2}}, \quad u_1 = \lim_{x\to 0} \frac{u(x) - u_0 \Psi_g(x)}{x^{\varrho_1}}; \quad \varrho_1, \varrho_2 \text{ reell verschieden,}$$

$$(28) \qquad u_0 = \lim_{x\to 0} \frac{u(x)}{u^{\varrho_2}\log x}, \quad u_1 = \lim_{x\to 0} \frac{u(x) - u_0 \Psi_g(x)}{x^{\varrho_1}}; \quad \varrho_1 = \varrho_2,$$

$$u_0 = \lim_{x\to 0} \frac{\varrho_1 u(x) - x u'(x)}{(\varrho_1 - \varrho_2) x^{\varrho_2}}, \quad u_1 = \lim_{x\to 0} \frac{\varrho_2 u(x) - x u'(x)}{(\varrho_2 - \varrho_1) x^{\varrho_1}}; \quad \varrho_1, \varrho_2 \text{ nicht reell.}$$

Die ersten beiden Zeilen können direkt aus (26) abgelesen werden. Zur Herleitung der letzten Zeile bedenke man, daß bei konjugiert komplexen ϱ_1, ϱ_2 natürlich $h = g$, $\Omega_g(x) = \overline{\Psi_g(x)}$ ist. Also

$$u(x) = u_0(x^{\varrho_2} + \psi_1 x^{\varrho_2+1} + \cdots + \psi_{g-1} x^{\varrho_2+g-1}) + u_1(x^{\varrho_1} + \overline{\psi}_1 x^{\varrho_1+1} + \\ + \cdots + \overline{\psi}_{g-1} x^{\varrho_1+g-1}) + O(x^{r_2+g}|\log x|),$$

$$x u'(x) = u_0(\varrho_2 x^{\varrho_2} + (\varrho_2+1)\psi_1 x^{\varrho_2+1} + \cdots + (\varrho_2+g-1)\psi_{g-1} x^{\varrho_2+g-1}) + \\ + u_1(\varrho_1 x^{\varrho_1} + (\varrho_1+1)\overline{\psi}_1 x_{\varrho_1+1} + \cdots + (\varrho_1+g-1)\overline{\psi}_{g-1} x^{\varrho_1+g-1}) + \\ + O(x^{r_2+g}|\log x|),$$

woraus die dritte Zeile (28) folgt.

Aus dieser Darstellung folgt, daß u_0 und u_1 durch $u(x)$ eindeutig bestimmt sind. Wenn $u(x)$ reell, dann sind u_0, u_1 reell, falls ϱ_1, ϱ_2 reell sind, sonst sind sie konjugiertkomplex. Wenn die Differentialgleichung (5) bei $x = 0$ regulär ist, $\sigma = 0$, $g = 2$, $q_0 = q_1 = 0$, dann wird $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = 0$. Nach (22) ist $c = 0$. Also $\Psi_g(x) = 1$ und $u_0 = \lim_{x\to 0} u(x) = u(0), u_1 = \lim_{x\to 0} \frac{u(x) - u_0}{x} = u'(0)$.

Hilfssatz. *Für jedes $u(x)$ aus $\mathfrak{D}$ ist* $\int_0^L k|u|^2\,dx < \infty$ *und* $\int_0^L \frac{1}{k}|(pu')' - qu|^2\,dx < \infty$.

Beweis. Gewiß ist $u(x) = O(x^{r_2}|\log x|)$, also $k|u|^2 = O(x^{\sigma-2+g+2r_2}\log^2 x)$ $= O(x^{-1+g+r_2-r_1}\log^2 x)$. Wegen (15) daher $\int_0^L k|u|^2\,dx < \infty$. Setzt man $U(x) = u_0\,\psi(x) + u_1\,\omega(x)$, so ist $U(x)$ eine Lösung von (5), also auch $\int_0^L \frac{1}{k}|(pU')' - qU|^2\,dx < \infty$. Es ist $w = U - u = O_2(x^{r_2+g}|\log x|)$, also

$$(pw')' - qw = O(x^{\sigma+r_2+g-2}|\log x|), \quad \frac{1}{k}|(pw')' - qw|^2 \\ = O(x^{-\sigma+2-g+2\sigma+2r_2+2g-4}\log^2 x) = O(x^{-1-r_1+r_2+g}\log^2 x),$$

also wieder $\int_0^L \frac{1}{k}|(pw')' - qw|^2\,dx < \infty$, also auch $\int_0^L \frac{1}{k}|(pu')' - qu|^2\,dx < \infty$.

Es ist also $\mathfrak{D}$ ein Teilraum des HILBERTschen Raumes $\mathfrak{H}$ [aller Funktionen $u(x)$ mit $\int_0^L k\,|u|^2\,dx < \infty$] und für jedes u aus $\mathfrak{D}$ sind die WEYLschen Bedingungen II von (4) erfüllt.

§ 2.

Die Randbedingungen.

Für jedes $u(x)$ aus $\mathfrak{D}$ ist der Operator $A\,u = \frac{1}{k}\{-(p\,u')' + q\,u\}$ erklärt (und liefert ein Element aus $\mathfrak{H}$). Der Bereich $\mathfrak{D}$ muß aber weiter so eingeschränkt werden, daß für zwei Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ des eingeschränkten Bereiches

$$(29)\quad (Au, v) - (u, Av) = \int_0^L [-(p\,u')' + q\,u]\,\bar{v}\,dx - \int_0^L u\cdot[-(p\bar{v}')' + q\bar{v}]\,dx = 0$$

wird. Es ist $(Au, v) - (u, Av) = B_L(u, v) - B_0(u, v)$, wenn

$$(30)\quad \begin{aligned} B_x(u, v) &= -p(x)\,u'(x)\,\bar{v}(x) + p(x)\,u(x)\,\bar{v}'(x), \\ B_L(u, v) &= \lim_{x\to L} B_x(u, v), \quad B_0 = \lim_{x\to 0} B_x(u, v) \end{aligned} \qquad 0 < x \leqq L,$$

gesetzt wird. Daß diese Grenzwerte für Funktionen u, v aus $\mathfrak{D}$ existieren, ist klar. Offenbar

$$(31)\quad B_L(u, v) = -p(L)\,u'(L)\,\bar{v}(L) + p(L)\,u(L)\,\bar{v}'(L).$$

Zur Berechnung von $B_0(u, v)$ setzen wir $u = u_0\Psi_\varrho + u_1\Omega_\varrho + \tilde{u}$, $v = v_0\Psi_\varrho + v_1\Omega_\varrho + \tilde{v}$. Es wird $B_x(u, v) = B_x(u_0\Psi_\varrho + u_1\Omega_\varrho, v_0\Psi'_\varrho + v_1\Omega_\varrho) + B_x(u_0\Psi_\varrho + u_1\Omega_\varrho, \tilde{v}) + B_x(\tilde{u}, v_0\Psi_\varrho + v_1\Omega_\varrho) + B_x(\tilde{u}, \tilde{v})$. Die Funktionen $\Psi_\varrho, \Omega_\varrho$ sind $O(x^{r_2}|\log x|)$ und die Ableitungen $\Psi'_\varrho, \Omega'_\varrho$ sind $O(x^{r_2-1}|\log x|)$. Daher $B_x(u_0\Psi_\varrho + u_1\Omega_\varrho, \tilde{v}) = O(x^{\sigma+2r_2-1+\varrho}\log^2 x) = O(x^{r_2-r_1+\varrho}\log^2 x)$, also $B_0(u_0\Psi_\varrho + u_1\Omega_\varrho, \tilde{v}) = 0$ wegen (15). Ebenso zeigt man $B_0(\tilde{u}, v_0\Psi_\varrho + v_1\Omega_\varrho) = 0$. $B_x(\tilde{u}, \tilde{v}) = O(x^{\sigma+2r_2+2\varrho-1}\log^2 x) = O(x^{r_2-r_1+2+\varrho}\log^2 x)$, also $B_0(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0$. Es ist also

$$(32)\quad \begin{aligned} B_0(u, v) = {} & u_0\bar{v}_0 B_0(\Psi_\varrho, \Psi_\varrho) + u_1\bar{v}_0 B_0(\Omega_\varrho, \Psi_\varrho) + u_0\bar{v}_1 B_0(\Psi_\varrho, \Omega_\varrho) + \\ & + u_1\bar{v}_1 B_0(\Omega_\varrho, \Omega_\varrho). \end{aligned}$$

Es sei weiter ϱ_1, ϱ_2 nicht reell. Wegen $\Omega_\varrho = \overline{\Psi}_\varrho$ ist $B_x(\Omega_\varrho, \Psi_\varrho) \equiv 0$, $B_x(\Psi_\varrho, \Omega_\varrho) \equiv 0$, $B_x(\Psi_\varrho, \Psi_\varrho) = x^\sigma(p_0 + \cdots)\{-(\varrho_2 x^{\varrho_2-1} + \cdots)(x^{\varrho_1} + \cdots) + (x^{\varrho_2} + \cdots)(\varrho_1 x^{\varrho_1-1} + \cdots)\} = x^{\sigma+\varrho_2+\varrho_1-1}\,p_0(\varrho_1 - \varrho_2)$ + höhere Potenzen von x. Wegen $\sigma + \varrho_2 + \varrho_1 - 1 = 0$ ist $B_0(\Psi_\varrho, \Psi_\varrho) = p_0(\varrho_1 - \varrho_2)$ und $B_0(\Omega_\varrho, \Omega_\varrho) = \overline{B_0(\Psi_\varrho, \Psi_\varrho)} = p_0(\varrho_2 - \varrho_1)$. Also

$$(33)\quad B_0(u, v) = p_0(\varrho_1 - \varrho_2)\,(u_0\bar{v}_0 - u_1\bar{v}_1).$$

Es seien nun ϱ_1, ϱ_2 reell. Dann sind auch Ψ_ν, Ω_ν reell, also $B_0(\Psi_\nu, \Psi_\nu) = B_0(\Omega_\nu, \Omega_\nu) = 0$. Erstens $\varrho_1 - \varrho_2$ nicht ganz. In diesem Fall wird

$$B_x(\Psi_\nu, \Omega_\nu) = x^\sigma(p_0 + \cdots)\{-(\varrho_2 x^{\varrho_2 - 1} + \cdots)(x^{\varrho_1} + \cdots) + (x^{\varrho_2} + \cdots)(\varrho_1 x^{\varrho_1 - 1} + \cdots)\} = x^{\sigma + \varrho_2 + \varrho_1 - 1} p_0(\varrho_1 - \varrho_2) + \text{höhere Potenzen von } x.$$

Daraus $B_0(\Psi_\nu, \Omega_\nu) = p_0(\varrho_1 - \varrho_2)$ und $B_0(\Omega_\nu, \Psi_\nu) = -p_0(\varrho_1 - \varrho_2)$, also

(34) $B_0(u, v) = (u_0 \bar{v}_1 - u_1 \bar{v}_0) p_0(\varrho_1 - \varrho_2)$, ϱ_1, ϱ_2 reell, $\varrho_1 - \varrho_2$ nicht ganz.

Zweitens $\varrho_1 - \varrho_2 = n$ ganz.

$$B_x(\Psi_\nu, \Omega_\nu) = x^\sigma(p_0 + \cdots)\{-[\varrho_2 \psi_0 x^{\varrho_2 - 1} + \cdots + (\varrho_2 + g - 1)\psi_{g-1} x^{\varrho_2 + g - 2} + c\,\omega_0 x^{\varrho_1 - 1}(\varrho_1 \log x + 1) + \cdots] \cdot [\omega_0 x^{\varrho_1} + \cdots] + [\psi_0 x^{\varrho_2} + \cdots + c\,\omega_0 x^{\varrho_1} \log x + \cdots][\omega_0 \varrho_1 x^{\varrho_1 - 1} + \cdots]\}.$$

Es sei zunächst $\varrho_1 - \varrho_2 = 0$. Dann ist $\psi_0 = 0$, $c = 1$ und es wird

$$B_x(\Psi_\nu, \Omega_\nu) = -x^{\sigma + \varrho_1 - 1 + \varrho_1} p_0 \omega_0^2 + \cdots,$$

wobei die Punkte Glieder bedeuten, die mit x gegen Null gehen; $B_0(\Psi_\nu, \Omega_\nu) = -p_0$, $B_0(\Omega_\nu, \Psi_\nu) = p_0$ also

(35) $$B_0(u, v) = -p_0(u_0 \bar{v}_1 - u_1 \bar{v}_0).$$

Schließlich $\varrho_1 - \varrho_2 = n > 0$. Dann $\Psi_0 = 1$ und

$$B_x(\Psi_\nu, \Omega_\nu) = x^{\sigma + \varrho_2 + \varrho_1 - 1} \cdot p_0(\varrho_1 - \varrho_2) + \cdots,$$

also $B_0(\Psi_\nu, \Omega_\nu) = p_0(\varrho_1 - \varrho_2)$ und daher

(36) $B_0(u, v) = (u_0 \bar{v}_1 - u_1 \bar{v}_0) p_0(\varrho_1 - \varrho_2)$, $\varrho_1 - \varrho_2 = n$ ganz positiv.

Zusammenfassung: Für u, v aus $\mathfrak{D}$ gilt

(37) $$B_0(u, v) = \begin{cases} (u_0 \bar{v}_1 - u_1 \bar{v}_0) \cdot P_0, & \text{wenn } \varrho_1, \varrho_2 \text{ reell} \\ (u_0 \bar{v}_0 - u_1 \bar{v}_1) p_0(\varrho_1 - \varrho_2), & \text{wenn } \varrho_1, \varrho_2 \text{ nicht reell;} \end{cases}$$

dabei ist $P_0 = p_0(\varrho_1 - \varrho_2)$, wenn $\varrho_1 - \varrho_2 \neq 0$ und $P_0 = -p_0$, wenn $\varrho_1 - \varrho_2 = 0$.

Wir legen nun den Funktionen aus $\mathfrak{D}$ am regulären Intervallende $x = L$ die Randbedingung

(38) $$u(L) \cos\beta + u'(L) \sin\beta = 0, \qquad 0 \leqq \beta < \pi$$

auf und nennen den so entstehenden Teilraum $\mathfrak{D}_\beta$. Es ist für u, v aus $\mathfrak{D}_\beta$ offenbar $(Au, v) - (u, Av) = -B_0(u, v)$. Um $(Au, v) - (u, Av) = 0$ zu erhalten, schränken wir $\mathfrak{D}_\beta$ weiter ein, indem wir mit einem festen α aus $0 \leqq \alpha < \pi$ verlangen

(39) $$\begin{cases} u_0 \cos\alpha + u_1 \sin\alpha = 0, & \text{wenn } \varrho_1, \varrho_2 \text{ reell} \\ u_0 e^{i\alpha} + u_1 e^{-i\alpha} = 0, & \text{wenn } \varrho_1, \varrho_2 \text{ nicht reell.} \end{cases}$$

Definition. $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ *ist die Gesamtheit der Funktionen* $u(x)$ *aus* $\mathfrak{D}$, *welche mit einem festen Paar* α, β *aus* $0 \leqq \alpha, \beta < \pi$ *die Randbedingungen* (38) *bei* $x = L$ *und die Randbedingungen* (39) *bei* $x = 0$ *erfüllen.*

Offenbar $B_0(u, v) = 0$ für u, v aus $\mathfrak{A}_{\alpha,\beta}$ und daher auch $(Au, v) = (u, Av)$. Gezeigt soll werden, daß der Operator A in $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ *ein diskretes Spektrum besitzt*, d. h. daß es Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$ und Eigenfunktionen $z_1(x), z_2(x), \ldots$ aus $\mathfrak{A}_{\alpha,\beta}$ gibt, die ein vollständiges, orthogonales und normiertes System bilden.

Um das nachzuweisen, genügt es zu zeigen, daß der Operator $A - i$ in $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ eine vollstetige Reziproke besitzt. Zu dieser Reziproken gelangt man in der üblichen Weise mit Hilfe der GREENschen Funktion. Es sei $\psi(x)$, $\omega(x)$ das im Sinne von (12) bis (14) genormte Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$-(p u')' + q u - i k u = 0 \tag{40}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sin\alpha\, \psi(x) - \cos\alpha\, \omega(x), && \text{wenn } \varrho_1, \varrho_2 \text{ reell.} \\ \varphi(x) &= e^{-i\alpha} \psi(x) - e^{i\alpha} \omega(x), && \text{wenn } \varrho_1, \varrho_2 \text{ nicht reell.} \end{aligned} \tag{39a}$$

Dann genügt $\varphi(x)$ bei $x = 0$ der Randbedingung (39). Unter $\chi_1(x)$ werde eine nicht identisch verschwindende Lösung von (40) verstanden, für die bei $x = L$ die Randbedingung (38) erfüllt ist. Wären $\varphi(x)$ und $\chi_1(x)$ linear abhängig, dann würde $\varphi(x)$ auch die Randbedingung (38) erfüllen, es läge also $\varphi(x)$ in $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$, was nicht möglich ist, weil $(A\varphi, \varphi) = (\varphi, A\varphi)$ reell wäre, während $(A\varphi, \varphi) = (i\varphi, \varphi) = i(\varphi, \varphi)$ sein müßte. Also $\varphi(x)$ und $\chi_1(x)$ linear unabhängig, die Konstante $\Delta = -p\varphi\chi_1' + p\varphi'\chi_1 \neq 0$. Wir setzen $\chi(x) = \chi_1/\Delta$, erhalten die GREENsche Funktion $G(x, \xi) = \varphi(x)\chi(\xi)$ für $0 < x < \xi$ und $G(x, \xi) = \varphi(\xi)\chi(x)$ für $\xi < x < L$ und betrachten den Integraloperator

$$Rf = \int_0^L G(x, \xi)\, k(\xi)\, f(\xi)\, d\xi = \chi(x) \int_0^x \varphi\, k f\, d\xi + \varphi(x) \int_x^L \chi\, k f\, d\xi \tag{41}$$

zunächst im Bereich $\mathfrak{F}$ aller in $0 < x \leqq L$ stückweise stetigen Funktionen, die in einer Umgebung von $x = 0$ identisch verschwinden. Es ist $u = Rf$ in $0 < x \leqq L$ stetig differenzierbar, $u' = \chi'(x) \int_0^x \varphi\, k f\, d\xi + \varphi'(x) \int_x^L \chi\, k f\, d\xi$, weiter $-(pu')' + qu = (-p\chi'\varphi + p\varphi'\chi)\, kf + iku$, also $-(pu')' + q u - -iku = kf$, insbesondere u'' stückweise stetig in $0 < x \leqq L$. Da für x genügend nahe an $x = 0$ jedenfalls $u(x) = \varphi(x) \int_0^L \chi\, k f\, d\xi$ ist, hat $u(x)$ die

Form (26), ist also ein Element aus $\mathfrak{D}$, für das überdies die beiden Randbedingungen (38) und (39) erfüllt sind, d. h. $u(x)$ ist ein Element aus $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ und $(A - i)\,u = f$. Bezeichnet man mit $\dot{\mathfrak{A}}_{\alpha\beta}$ die Gesamtheit der u von der Form $u = Rf$ mit f aus $\dot{\mathfrak{H}}$, so ist für A in $\dot{\mathfrak{A}}_{\alpha\beta}$ die Symmetriebedingung $(Au, v) = (u, Av)$ gültig und R in $\dot{\mathfrak{H}}$ ist die Reziproke von A in $\dot{\mathfrak{A}}_{\alpha\beta}$. Es ist $(Rf, Rf) \leqq M\,(f, f)$ mit $M = \int_0^L\int_0^L |G(x,\xi)|^2\, k(x)\, k(\xi)\, dx\, d\xi \leqq 2\int_0^L k|\chi|^2\, d\xi \int_0^L k|\varphi|^2\, d\xi < \infty$. Also ist R in $\dot{\mathfrak{H}}$ ein beschränkter, sogar vollstetiger Operator. Er kann auf ganz $\mathfrak{H}$ fortgesetzt werden; $\dot{\mathfrak{H}}$ liegt dicht in $\mathfrak{H}$. Die Gesamtheit $\overline{\mathfrak{A}_{\alpha\beta}}$ der $u = Rf$ mit f aus $\mathfrak{H}$ ist der größte Bereich, auf den man den Operator A in $\dot{\mathfrak{A}}_{\alpha\beta}$ als symmetrischen Operator fortsetzen kann: Man sagt A in $\overline{\mathfrak{A}_{\alpha\beta}}$ ist selbstadjungiert (= hypermaximal). Da R vollstetig ist, besitzt A in $\overline{\mathfrak{A}_{\alpha\beta}}$ ein diskretes Spektrum. Man sieht aber leicht, daß alle Eigenfunktionen bereits in $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ liegen. Sei nämlich $z(x)$ eine Eigenfunktion von A in $\overline{\mathfrak{A}_{\alpha\beta}}$, λ sein Eigenwert. Dann ist $(A - i)\,z = (\lambda - i)\,z$,

$$(42)\qquad z(x) = (\lambda - i)\,Rz = (\lambda - i)\,\chi(x)\int_0^x \varphi\, k\, z\, d\xi + (\lambda - i)\,\varphi(x)\int_x^L \chi\, k\, z\, d\xi.$$

Jedenfalls liegt z in $\mathfrak{H}$. Es folgt aber aus dieser Integraldarstellung sogar, daß $z(x), z'(x)$ in $0 < x \leqq L$ stetig und z'' stückweise stetig ist und $-(pz')' + qz = \lambda k z$. Da $z(x)$ Lösung der Differentialgleichung ist, hat es in der Umgebung von $x = 0$ die Form $z(x) = z_0 \Psi_\varrho(x) + z_1 \Omega_\varrho(x) + O_2(x^{r_2+\varrho}|\log x|)$, gehört also zu $\mathfrak{D}$. Für $x = L$ genügt es der Randbedingung (38), wie direkt aus (42) folgt. Daß auch (39) erfüllt ist, läßt sich so einsehen: Sei $\tilde{\varphi}(x)$ eine Funktion, die in $0 < x \leqq L$ stetig ist, für die $\tilde{\varphi}'(x)$ stetig und $\tilde{\varphi}''(x)$ stückweise stetig ist; $\tilde{\varphi}(x) \equiv \varphi(x)$ in einer Umgebung von $x = 0$ und $\tilde{\varphi} \equiv 0$ in einer Umgebung von $x = L$. Dann liegt $\tilde{\varphi}$ in $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$, also $(Az, \tilde{\varphi}) - (z, A\tilde{\varphi}) = 0$, also $B_L(z, \tilde{\varphi}) - B_0(z, \tilde{\varphi}) = 0$. Wegen $B_L(z, \tilde{\varphi}) = 0$ auch $B_0(z, \tilde{\varphi}) = 0$, d. h. $B_0(z, \varphi) = 0$. Aus (37) wird wegen (39) sofort $0 = z_0 \cdot -\cos\alpha - z_1 \sin\alpha$, wenn ϱ_1, ϱ_2 reell und sonst $0 = z_0 e^{i\alpha} + z_1 e^{-i\alpha}$. Das sind aber genau die Randbedingungen (39). Damit ist nachgewiesen, daß jede Eigenfunktion $z(x)$ tatsächlich schon im Bereich $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ liegt.

Man kann folgenden Satz aussprechen: *Die Differentialgleichung* $-(pu')' + qu = \lambda ku$, *deren Koeffizienten in* $0 < x \leqq L$ *die am Ende der Einleitung genannten Voraussetzungen* 1. *bis* 4. *erfüllen, besitzt ein vollständiges orthogonales und normiertes System von Eigenfunktionen, welche folgenden Randbedingungen genügen: Sind* α, β *zwei feste Zahlen aus den Intervallen* $0 \leqq \alpha < \pi$, $0 \leqq \beta < \pi$, *so ist* $u(L)\cos\beta + u'(L)\sin\beta = 0$ *die Randbedingung bei* $x = L$. *Bedeuten* $\psi(x)$ *und* $\omega(x)$ *das genormte Fundamental-*

system [vgl. (12) bis (14)] der Differentialgleichung[10]) *und wird* $u(x) = u_0\,\psi(x) + u_1\omega(x)$ *gesetzt, so ist* $u_0 \cos\alpha + u_1 \sin\alpha = 0$ *(wenn die charakteristischen Exponenten* ϱ_1, ϱ_2 *reell sind) bzw.* $u_0 e^{i\alpha} + u_1 e^{-i\alpha} = 0$ *(wenn* ϱ_1, ϱ_2 *nicht reell sind) die Randbedingung bei* $x = 0$.

Die zugehörigen Eigenwerte haben keinen endlichen Häufungspunkt.

§ 3.

Kreisförmige Membran mit festgehaltenem Rand.

Dieses Problem führt auf die Eigenwertaufgabe $u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0$ in $x^2 + y^2 < 1$ und $u = 0$ auf $x^2 + y^2 = 1$. Bei Einführung von Polarkoordinaten genügen die radialen Bestandteile $u = u(r)$ der Gleichung

$$-(r\,u')' + \frac{n^2}{r}u = \lambda\, r\, u, \qquad 0 < r \leqq 1, \tag{43}$$

wobei $n = 0, 1, \ldots$ sein kann. In $r = 1$ ist die Randbedingung $u(1) = 0$ zu stellen. Die Zahlen x, y, r sollen nicht die üblichen Längen, sondern diese Längen geteilt durch den Radius R der Membran bedeuten. Insbesondere sind r und λ reine Zahlen. Welches sind die (mathematisch) zulässigen Randbedingungen in $r = 0$, die über die Bedingungen $\int_0^1 r\,|u|^2\,dr < \infty$ und $\int_0^1 \frac{1}{r}\left|-(r\,u')' + \frac{n^2}{r}u\right|^2 dr < \infty$ hinaus gestellt werden müssen? Die charakteristischen Exponenten von (43) für $r = 0$ sind $\varrho_1 = +n$, $\varrho_2 = -n$. Also liegt für $n > 0$ an der Stelle $r = 0$ der Grenzpunktfall vor und eine Randbedingung bei $r = 0$ kommt allein für $n = 0$ in Frage (Grenzkreisfall). Die Differentialgleichung (43) für $n = 0$, also

$$-(r\,u')' = \lambda\, r\, u \tag{44}$$

besitzt als Fundamentalsystem die beiden Lösungen $J_0(\sqrt{\lambda}\,r) = 1 - \frac{\lambda}{4}r^2 + \cdots$ und $Y_0(\sqrt{\lambda}\,r) = \frac{2}{\pi}\left(C + \log\frac{\sqrt{\lambda}\,r}{2}\right) J_0(\sqrt{\lambda}\,r) + \frac{\lambda}{2\pi}r^2 + \cdots$[11]). Das genormte Fundamentalsystem [vgl. (12) bis (14)] ist also

$$\omega(r) = J_0(\sqrt{\lambda}\,r), \quad \psi(r) = \frac{\pi}{2}\,Y_0(\sqrt{\lambda}\,r) - \left(\log\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + C\right) J_0(\sqrt{\lambda}\,r).$$

---

[10]) Dabei ist λ als Veränderliche aufzufassen, so daß $\psi(x)$, $\omega(x)$ und daher auch u_0 und u_1 Funktionen von λ sind.

[11]) $C = 0{,}577\ldots$ ist die EULERsche Konstante.

Jede Lösung von (44) hat die Form $u = u_0 \psi(r) + u_1 \omega(r)$. In $r = 1$ lautet die Randbedingung

$$u_0 \psi(1) + u_1 \omega(1) = 0. \tag{45}$$

In $r = 0$ ist eine jede Bedingung der Form

$$u_0 \cos\alpha + u_1 \sin\alpha = 0 \tag{46}$$

zulässig, unter α irgendeinen Wert aus $0 \leqq \alpha < \pi$ verstanden. Nach (45) und (46) ergibt sich als transzendente Gleichung für die Eigenwerte $\omega(1)\cos\alpha - \psi(1)\sin\alpha = 0$ oder

$$J_0(\sqrt{\lambda}) \cdot \left(\cos\alpha + \left(\log\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + C\right)\sin\alpha\right) - \frac{\pi}{2} Y_0(\sqrt{\lambda})\sin\alpha = 0. \tag{47}$$

Wählt man speziell $\alpha = 0$, so entsteht aus (46) die Randbedingung $u_0 = 0$, also $u = u_1\omega(r)$; aus (47) wird $J_0(\sqrt{\lambda}) = 0$. Es ist das die einzige Randbedingung, bei der alle Eigenfunktionen in $r = 0$ stetig sind. Man kann daher die Bedingung $u_0 = 0$ auch durch die Forderung der Stetigkeit bei $r = 0$ ersetzen. Für $\alpha = 0$ ergibt sich also die übliche Behandlung der schwingenden eingespannten Membran.

Was ist aber die physikalische Bedeutung der Bedingung (46) für $\alpha \neq 0$? Ich behaupte, man kann diese Bedingung folgendermaßen deuten. Man denke sich auf die Punkte der Membran pro Flächeneinheit in der u-Richtung eine elastische Kraft wirken der Größe $-Qu$. Dabei soll Q verschwinden außerhalb des kleinen Kreises $x^2 + y^2 \leqq s^2 < 1$ und in diesem Kreis den konstanten (aber von s abhängenden) Wert $Q_0 = Q_0(s)$ haben. Das Potential dieser Kraft ist $\frac{1}{2} Q u^2$. Die Schwingungszustände, die dem Grundproblem $n = 0$ entsprechen, genügen der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -(rU')' + qrU &= \lambda rU \quad \text{für } 0 < r \leqq s, \\ -(rU')' &= \lambda rU \quad \text{für } s \leqq r \leqq 1. \end{aligned} \tag{48}$$

Es ist $q = q(s) = \frac{Q_0}{S} R^2$ (S Vorspannung, R Radius der Membran). Für $r = 0$ soll die Forderung „$U(r)$ stetig in $r = 0$" gestellt werden [die, wie wir eben sahen, auf die Wahl $\alpha = 0$ in der Randbedingung (46) hinausläuft]. Bei festem λ hängt jede dieser Forderung genügende, nicht identisch verschwindende Lösung $U(r)$ von (48) auch noch von s ab: $U = U(r; s)$. Es soll gezeigt werden, daß — unter $c(s)$ einen geeigneten Faktor verstanden — die Funktion $c(s)\,U(r; s)$ für $s \to 0$ in $0 < r < 1$ gegen eine nicht identisch verschwindende Lösung $u(r)$ der Differentialgleichung (44) strebt, die in

$r = 0$ der Randbedingung (46) genügt; natürlich muß zu diesem Zweck $q(s)$ geeignet gewählt werden. Offenbar ist

$$U = A J_0(\sqrt{\lambda}\, r) + B Y_0(\sqrt{\lambda}\, r), \qquad s \leqq r \leqq 1$$
$$U = a J_0(\sqrt{\lambda - q}\, r), \qquad 0 < r \leqq s,$$

wobei die Zahlen A, B, a von r unabhängig sind. An der Stelle $r = s$ muß U einmal stetig nach r differenzierbar sein, also

$$\begin{aligned} a J_0(\sqrt{\lambda - q}\, s) &= A J_0(\sqrt{\lambda}\, s) + B Y_0(\sqrt{\lambda}\, s), \\ a \dot{J}_0(\sqrt{\lambda - q}\, s) &= A \dot{J}_0(\sqrt{\lambda}\, s) + B \dot{Y}_0(\sqrt{\lambda}\, s), \end{aligned} \tag{49}$$

wenn die Differentiation nach s durch einen Punkt bezeichnet wird. Daraus

$$\frac{B}{A} = \frac{J_0(\sqrt{\lambda}\, s)\, \dot{J}_0(\sqrt{\lambda - q}\, s) - \dot{J}_0(\sqrt{\lambda}\, s)\, J_0(\sqrt{\lambda - q}\, s)}{J_0(\sqrt{\lambda - q}\, s)\, \dot{Y}_0(\sqrt{\lambda}\, s) - \dot{J}_0(\sqrt{\lambda - q}\, s)\, Y_0(\sqrt{\lambda}\, s)} = -\frac{J_0(\sqrt{\lambda}\, s) - \chi(s)\, \dot{J}_0(\sqrt{\lambda}\, s)}{Y_0(\sqrt{\lambda}\, s) - \chi(s)\, \dot{Y}_0(\sqrt{\lambda}\, s)}$$

mit

$$\chi(s) = \frac{J_0(\sqrt{\lambda - q}\, s)}{\dot{J}_0(\sqrt{\lambda - q}\, s)} = \frac{1 - \frac{(\lambda - q)\, s^2}{4} + \frac{(\lambda - q)^2 s^4}{64} - \cdots}{-\frac{(\lambda - q)\, s}{2}\left(1 - \frac{(\lambda - q)\, s^2}{8} + \cdots\right)}$$
$$= \frac{-2}{(\lambda - q)\, s}\left(1 - \frac{1}{8}(\lambda - q)\, s^2 + \cdots\right),$$

wobei die Punkte für zweite und höhere Potenzen von $(\lambda - q)\, s^2$ stehen. Für das folgende denken wir uns das bisher unbestimmt gehaltene $q = q(s)$ so gewählt, daß

$$\lim_{s \to 0} |q(s)| = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{s \to 0} (\lambda - q) s^2 = 0 \tag{50}$$

gilt. Dann wird $\lim_{s \to 0} \chi(s)\, \dot{J}_0(\sqrt{\lambda}\, s) = 0$ und $J_0(\sqrt{\lambda}\, s) - \chi(s)\, \dot{J}_0(\sqrt{\lambda}\, s) = 1 + z_0(s)$ mit $\lim_{s \to 0} z_0(s) = 0$. Ferner $\chi(s) = -\frac{2}{(\lambda - q)\, s} + \frac{1}{4} s + s\, \chi_0(s)$ mit $\lim_{s \to 0} \chi_0(s) = 0$. Es ist mit nicht interessierenden Konstanten $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$

$$Y_0(\sqrt{\lambda}\, s) = \frac{2}{\pi} \log s \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{4} s^2 + \cdots\right) + \frac{2}{\pi}\left(C + \log \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) + a_1 s^2 + a_2 s^3 + \cdots,$$
$$\dot{Y}_0(\sqrt{\lambda}\, s) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{s} + \frac{2}{\pi} \log s \left(-\frac{\lambda}{2} s + \cdots\right) + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots,$$
$$Y_0(\sqrt{\lambda}\, s) - \chi(s)\, \dot{Y}_0(\sqrt{\lambda}\, s) = \frac{2}{\pi} \log s + \frac{2}{\pi}\left(C + \log \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) +$$
$$+ \frac{2}{(\lambda - q)\, s}\left(\frac{2}{\pi} \frac{1}{s} - \frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{2} s \log s\right) - \frac{1}{4} s \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{s} + f_0(s),$$

wobei $\lim_{s\to 0} f_0(s) = 0$ ist. Es wird

$$\frac{B}{A} = -\frac{\pi}{2}\,\frac{1+z_0(s)}{\log s + \frac{2}{\lambda - q}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{\lambda}{2}\log s\right) + C + \log\frac{\sqrt{\lambda}}{2} - \frac{1}{4} + \frac{\pi}{2} f_0(s)}.$$

Nun ist der Versuch naheliegend, q so zu bestimmen, daß $\log s + \frac{2}{\lambda - q}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{\lambda}{2}\log s\right) = k$ mit einem von s unabhängigen k wird. Daraus würde sich ergeben $q = \frac{2 - s^2\lambda k}{s^2(-k + \log s)}$. Für den Grenzübergang $s \to 0$ wird das Glied $-s^2\lambda k$ im Zähler unwichtig sein. Daher ist unser endgültiger Ansatz

$$q = \frac{2}{s^2(-k + \log s)}, \qquad k \text{ beliebige Konstante;} \tag{51}$$

da (50) erfüllt ist, so ist dieser Ansatz jedenfalls erlaubt. Es wird nun

$$\log s + \frac{2}{\lambda - q}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{\lambda}{2}\log s\right) = \frac{-2k}{-2 + \lambda s^2(-k + \log s)}$$

und daher

$$\lim_{s\to 0}\frac{B}{A} = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{C + \log\frac{\sqrt{\lambda}}{2} - \frac{1}{4} + k}.$$

Setzt man also $c(s) = \dfrac{C + \log\frac{\sqrt{\lambda}}{2} - \frac{1}{4} + k}{A}$, so gilt für $0 < r \leqq 1$ die Beziehung $\lim_{s\to 0} c(s)\,U = \left(k + C + \log\frac{\sqrt{\lambda}}{2} - \frac{1}{4}\right) J_0(\sqrt{\lambda}\,r) - \frac{\pi}{2} Y_0(\sqrt{\lambda}\,r) = u(r)$, wobei $u(r)$ eine Lösung von (44) ist, und zwar $u(r) = u_0\psi(r) + u_1\omega(r)$ mit $u_0 = -1$ und $u_1 = k - \frac{1}{4}$. Damit u_0, u_1 der Gleichung (46) genügen, hat man $(k - \frac{1}{4})\sin\alpha - \cos\alpha = 0$ zu befriedigen, d. h.

$$k = \tfrac{1}{4} + \operatorname{ctg}\alpha$$

zu setzen. Dem α-Bereich entspricht eineindeutig der k-Bereich $-\infty < k < \infty$. Der Wert $\alpha = 0$ entspricht $k = \infty$. Es ist bemerkenswert, daß die Kraft $-Qu$ für jeden Wert von k immer eine abstoßende ist, denn nach (51) ist q negativ, sobald s genügend klein ist — ganz gleichgültig, welches Vorzeichen k besitzt. Da die Randbedingung (46) erst in der Grenze für $s \to 0$ zustande kommt, wird man die Kraft $-Q \cdot u$ in der Grenze für $s \to 0$ als eine (abstoßende) „Einzelkraft" bezeichnen, und zwar als eine elastische Einzelkraft wegen der Proportionalität zu u. Zwei verschiedenen Werten von k in (51) entsprechen auch zwei verschiedene Einzelkräfte. Der übliche Fall ist der Fall der verschwindenden Einzelkraft; er tritt ein für $k = \infty$.

Das unterschiedliche Verhalten von Grundproblem ($n = 0$) und Oberproblemen ($n = 1, 2, \ldots$) hinsichtlich der Randbedingung in $r = 0$ ist jetzt

physikalisch ohne weiteres verständlich. Die Eigenfunktionen der Oberprobleme bei der schwingenden Membran verschwinden nämlich alle in $r = 0$, während die Eigenfunktionen des Grundproblems in $r = 0$ von Null verschieden sind. Bringt man also eine Kraft der Form $-Q \cdot u$ an, wo Q ja nur in einer kleinen Umgebung von $r = 0$ von Null verschieden ist, so ist verständlich, daß diese Kraft bei den Oberproblemen, im Gegensatz zum Grundproblem, wirkungslos ist und auf keine neue Randbedingung bei $r = 0$ führt.

§ 4.

Die Wellengleichung des Keplerproblems.

(Zusatz bei der Korrektur vom 28. 11. 1943.)

Der radiale Anteil $u = u(r)$ der Wellenfunktion — nur dieser soll im folgenden betrachtet werden — genügt der Schrödingerschen Gleichung

$$u'' + \frac{2}{r}u' - \frac{l(l+1)}{r^2}u + \frac{2Z}{r}u + \lambda u = 0, \qquad 0 < r < \infty. \tag{52}$$

Hierin ist Z die Kernladungszahl, $l = 0, 1, 2, \ldots$. Unter r ist nicht die Entfernung Elektron—Kern, sondern diese Entfernung geteilt durch $a = \frac{\hbar^2}{4\pi^2 m e^2}$ verstanden. Der Energieparameter E ergibt sich aus λ durch $E = \frac{\hbar^2 \lambda}{8\pi^2 m a^2}$. Es sind also r, Z, λ reine Zahlen. Das Normierungsintegral heißt $\int_0^\infty |u|^2 r^2 dr$. Welches sind die Randbedingungen, die bei $r = 0$ und bei $r = \infty$ über die Weylschen Bedingungen $\int_0^\infty |u|^2 r^2 dr < \infty$ und $\int_0^\infty \frac{1}{r^2} |(r^2u')' - l(l+1)u + 2Zru|^2 dr < \infty$ hinaus gestellt werden müssen? Für jedes $l = 0, 1, 2, \ldots$ und jedes λ gibt es bekanntlich immer eine Lösung von (52), für die $\int_1^\infty |u|^2 r^2 dr = \infty$ ausfällt. Also liegt bei $r = \infty$ der Grenzpunktfall vor und es ist an diesem Intervallende *keine* zusätzliche Randbedingung zu stellen. Das Ende $r = 0$ ist eine Stelle der Bestimmtheit, die charakteristischen Exponenten sind l und $-l-1$. Wenn $l = 1, 2, \ldots$, so gibt es immer eine Lösung, für die $\int_0^1 |u|^2 r^2 dr = \infty$ ausfällt, es liegt also in den Fällen $l = 1, 2, \ldots$ auch bei $r = 0$ der Grenzpunktfall vor und eine zusätzliche Randbedingung ist nicht zu stellen. Wenn aber $l = 0$, so gilt für alle Lösungen $\int_0^1 |u|^2 r^2 dr < \infty$, es liegt der Grenzkreisfall vor. Es gibt

eine unendliche Schar (mathematisch) möglicher Randbedingungen bei $r = 0$. Für jede Wahl dieser Randbedingung soll das Spektrum angegeben werden.

Für $\lambda \geqq 0$ liegt ein rein kontinuierliches Spektrum vor, das zeigt man wie üblich. Also $\lambda < 0$. Setzt man $\varrho = 2\sqrt{-\lambda}\, r$, $u(r) = e^{-\varrho/2} v(\varrho)$, so wird für $l = 0$ nach (52)

$$\varrho\, v'' + (2 - \varrho)\, v' - (1 - n)\, v = 0, \quad n = \frac{Z}{\sqrt{-\lambda}}. \tag{53}$$

Diese konfluente hypergeometrische Differentialgleichung besitzt ein Fundamentalsystem $v_{\infty,1}, v_{\infty,2}$, das sich bei $\varrho = \infty$ verhält wie ϱ^{n-1} und $e^{\varrho}\varrho^{-n-1}$. Da $\int_0^\infty |u|^2 r^2 dr < \infty$ sein muß, kann nur $u(r) = K e^{-\varrho/2} v_{\infty,1}(\varrho)$ sein, unter K eine Konstante verstanden. Wir benötigen die Entwicklung von $v_{\infty,1}(\varrho)$ in der Umgebung von $\varrho = 0$. Für die etwas allgemeinere Differentialgleichung $\varrho\, v'' + (\gamma - \varrho)\, v' - \beta v = 0$, wobei $\gamma = 1, 2, \ldots$ sein kann, hat das entsprechende $v_{\infty,1}(\varrho)$ die Gestalt[12])

$$v_{\infty,1}(\varrho) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\gamma+1)\,\Gamma(\beta)} \Big\{ \varrho^{1-\gamma} \sum_{\nu=0}^{\gamma-2} \frac{(-\varrho)^\nu}{\nu!} \Gamma(\gamma-1-\nu)\,\Gamma(\beta-\gamma+\nu+1) +$$

$$+ (-1)^\gamma \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varrho^\nu}{\nu!\,(\gamma-1+\nu)!} \Gamma(\beta+\nu)\,[\Psi(\beta-1+\nu) -$$

$$- \Psi(\gamma-1+\nu) - \Psi(\nu) + \log\varrho] \Big\},$$

wobei $\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}$ gesetzt ist und die endliche Summe $\sum_{\nu=0}^{\gamma-2}$ durch Null zu ersetzen ist für $\gamma = 1$. Verwendet man diese Formel für $\gamma = 2$, $\beta = 1 - n$, so wird[13])

$$u(r) = K e^{-\varrho/2} v_{\infty,1}(\varrho) = \frac{K}{\Gamma(-n)} \Big\{ -\frac{1}{2Z}\,\frac{1}{r} + \Psi(-n) + \frac{1}{2n} - \log n + \tag{55}$$

$$+ 2C - 1 + \log(2Z) + \log r + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu r^\nu + b_\nu r^\nu \log r) \Big\}.$$

Denkt man sich $u(r)$ mit Hilfe eines im Sinne von (12) und (14) genormten Fundamentalsystems $\psi(r)$, $\omega(r)$ geschrieben in der Form $u(r) = u_0 \psi(r) +$

---

[12]) A. KIENAST, Untersuchungen über die Lösungen der Differentialgleichung $xy'' + (\gamma - x)\, y' - \beta\, y = 0$. Denkschriften der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft **57** (1921), Formel (26) von S. 260 in Verbindung mit Formel (5), S. 249; bei Formel (5) muß in der zweiten Zeile der Faktor $x^{\gamma-1}$ gestrichen werden; H. BUCHHOLZ, Die konfluente hypergeometrische Funktion .... Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **23**, Formel (26) von S. 52. Bei beiden Autoren bedeutet $\Psi(x)$ die Funktion $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

[13]) Die ersten Glieder in der Entwicklung von $u(r)$ sind auch angegeben bei A. SOMMERFELD, Zur Theorie der Feinstruktur des Wasserstoffs. Zeitschr. f. Phys. **118**

$+ u_1\omega(r)$, so sind u_0 der Koeffizient von $\frac{1}{r}$ und u_1 das konstante Glied in der Entwicklung (55). Die Randbedingung $u_0 \cos\alpha + u_1 \sin\alpha = 0$ heißt also

$$\frac{1}{2Z}\operatorname{ctg}\alpha - \log(2Z) = \Psi(-n) + \frac{1}{2n} - \log n + 2C - 1. \tag{56}$$

Setzt man $\frac{1}{2Z}\operatorname{ctg}\alpha - \log(2Z) = \frac{1}{\varepsilon}$, $\Psi(-n) + \frac{1}{2n} - \log n + 2C - 1 = F(n)$, so handelt es sich um die Gleichung

$$\frac{1}{\varepsilon} = F(n), \tag{57}$$

der bei gegebenem ε jedes n, das zu einem Eigenwert führen soll, genügen muß. Wegen $F'(n) = -\Psi'(-n) - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n}$ fällt $F(n)$ in jedem Intervall $g < n < g+1$, $g = 0, 1, 2, \ldots$ monoton von $+\infty$ nach $-\infty$; man kann sich also bequem graphisch einen Überblick über alle Wurzeln $n = n(\varepsilon)$ von (57) verschaffen. Insbesondere gibt es für $\nu = 1, 2, \ldots$ Wurzeln $n(\varepsilon)$, welche in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ regulär analytisch von ε abhängen und für welche $n_\nu(0) = \nu$ ist. Da $\frac{dn_\nu(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 1$ für $\varepsilon = 0$ gilt, ist $n_\nu(\varepsilon) = \nu + \varepsilon +$ höhere Potenzen von ε in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$. Diese Funktionen $n_\nu(\varepsilon)$ lassen sich über alle reellen ε von $-\infty < \varepsilon < \infty$ analytisch fortsetzen. Für $\varepsilon = 0$ stellen sie die üblichen positiven ganzen Zahlen dar; $\varepsilon = 0$ oder $\alpha = 0$ entspricht der üblicherweise zugrunde gelegten Randbedingung bei $r = 0$. Für $\varepsilon < 0$ sind die $n_\nu(\varepsilon)$, $\nu = 1, 2, \ldots$ zugleich *alle* Wurzeln von (57); es ist $n_\nu(\varepsilon) < \nu$ für alle negativen ε, daher sind auch alle zugehörigen Eigenwerte $\lambda_\nu(\varepsilon) = -\frac{Z^2}{n_\nu^2(\varepsilon)}$ kleiner als die Eigenwerte $\lambda_\nu(0)$. Für $\varepsilon > 0$ gibt es außer den $n_\nu(\varepsilon)$, $\nu = 1, 2, \ldots$ noch eine Wurzel $n_0(\varepsilon)$ zwischen 0 und 1. Wegen $\lim_{\varepsilon \to 0} n_0(\varepsilon) = 0$ wird $\lambda_0(\varepsilon) = -\frac{Z^2}{n_0^2(\varepsilon)}$ gegen $-\infty$ rücken, wenn ε gegen Null geht[14]). Für sehr kleine positive ε ist näherungsweise $n_0(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$. Für alle $\varepsilon > 0$ ist $n_\nu(\varepsilon) > \nu$, also $\lambda_\nu(\varepsilon) > \lambda_\nu(0)$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Die regulär analytisch von ε abhängenden Eigenwerte erscheinen bei positivem ε gehoben, bei negativem ε gesenkt.

(1941), vgl. die Formeln (a), (c), (d), (e) S. 305 und 306. Der Vergleich mit unserer Formel (55) zeigt, daß in Formel (d) der Ausdruck $\Psi(-n)$ zu ersetzen ist durch $\Psi(-n-1)$.

[14]) Mit dem Vorkommen solcher nicht regulären „gestörten" Eigenwerte habe ich mich auseinandergesetzt in der fünften Mitteilung meiner Störungstheorie der Spektralzerlegung. Math. Annalen 118 (1942).

Was bedeutet eine Randbedingung von der Form (56) bzw. (57) physikalisch? Man denke sich das Kepler-Problem gestellt mit dem Potential[15])

$$(58) \quad V(r) = -\frac{Z e^2}{r a} \text{ in } s < r < \infty \quad \text{und} \quad V(r) = -\frac{Z e^2}{v(s)\, a} \text{ in } 0 < r < s,$$

das in dem kleinen Bereich $0 < r < s$ konstant ist. Mit diesem Potential berechne man auf die übliche Weise die Lösung U der (radialen) Schrödingergleichung ($l = 0$); U ist also eine stetige Funktion auch noch in $r = 0$, die von s abhängt und die nicht identisch verschwinden soll. Behauptet wird: wenn man U mit einer geeigneten Konstanten $c(s)$ multipliziert, so ist $\lim_{s \to 0} c(s)\, U = u(r)$ für $0 < r < \infty$ eine nicht identisch verschwindende Lösung der Schrödingerschen Gleichung ($l = 0$) mit dem Potential $\Phi = -\frac{Z e^2}{r a}$ in $0 < r < \infty$, welche der Randbedingung (56) bzw. (57) mit dem vorgeschriebenen ε genügt. Dazu muß natürlich $b(s)$ geeignet gewählt werden. Man kann setzen

$$b(s) = \frac{8Z}{\pi^2} s^2 \left(1 - \frac{16Z}{\pi^2} s - \frac{16Z}{\pi^2} s \log(2Zs) - \frac{16Z}{\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} s\right).$$

Der Nachweis erfolgt ähnlich den Überlegungen in § 3, ich übergehe ihn.

Wie man auch das Vorzeichen oder die Größe von ε wählt, immer ist $b(s)$ für genügend kleines s positiv, also V in (58) überall negativ. Denkt man sich das Potential V aus dem Potential Φ durch einen Zusatz entstanden, so entspricht dieses zusätzliche Potential offenbar einer anziehenden Kraft. und zwar sowohl bei positivem wie bei negativem ε. Die Randbedingung (57) kommt erst in der Grenze für $s \to 0$ zustande, daher nenne ich die zusätzliche Kraft eine *Einzelkraft*: wegen der oben geschilderten Wirkung auf das Spektrum eine *hebende Einzelkraft*, wenn $\varepsilon > 0$, und eine *senkende Einzelkraft*, wenn $\varepsilon < 0$; in beiden Fällen handelt es sich um eine anziehende Einzelkraft. Die gewöhnliche Behandlung der Schrödingerschen Gleichung ergibt sich, wenn man annimmt, daß *keine* solche Einzelkraft im Kern wirkt ($\varepsilon = 0$).

Die (mathematische) Willkür in der Auswahl einer Randbedingung bei $r = 0$ für den radialen Anteil der Wellenfunktion im S-Zustand ($l = 0$) entfällt, wenn man an Stelle von (52) die relativistisch invarianten Gleichungen nach Dirac benutzt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dr} + \frac{1-k}{r} u - \frac{2\pi}{hc}\left(E + \frac{Ze^2}{r} + mc^2\right) v = 0 \\ \frac{dv}{dr} + \frac{1+k}{r} v + \frac{2\pi}{hc}\left(E + \frac{Ze^2}{r} - mc^2\right) u = 0 \end{aligned}\right\} \quad 0 < r < \infty.$$

Es bedeutet r [anders als in (52)] die Entfernung Elektron—Kern; E ist der Eigenwertparameter, k eine der Zahlen $\pm 1, \pm 2, \ldots$. Das Normierungs-

[15]) Es ist ra (nicht r) die Entfernung Elektron—Kern; $b(s)$ ist eine reine Zahl.

integral ist $\int_0^\infty (|u|^2 + |v|^2) r^2 dr$. Da es immer eine Lösung u, v gibt, für welche $\int_1^\infty (|u|^2 + |v|^2) r^2 dr = \infty$ ausfällt, liegt bei $r = \infty$ der Grenzpunktfall vor und man hat bei $r = \infty$ keine zusätzliche Randbedingung zu stellen[16]). Bei $r = 0$ liegt eine Stelle der Bestimmtheit. Setzt man an: $u = a_0 r^\gamma + \cdots$, $v = b_0 r^\gamma + \cdots$, $|a_0| + |b_0| > 0$, so erhält man für γ die beiden Zahlen $\gamma_1 = -1 + \sqrt{k^2 - \alpha^2 Z^2}$, $\gamma_2 = -1 - \sqrt{k^2 - \alpha^2 Z^2}$ mit $\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc}$. Es ist $\int_0^1 r^{2\gamma_2} r^2 dr = \int_0^1 r^{-2\sqrt{k^2 - \alpha^2 Z^2}} dr = \infty$ für jeden Wert $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, solange nur $-2\sqrt{1 - \alpha^2 Z^2} < -1$, d. h. $Z < \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{1}{\alpha}$ ist. Also ist in diesem Falle $u = a_0 r^{\gamma_2} + \cdots$, $v = b_0 r^{\gamma_2} + \cdots$ eine Lösung mit $\int_0^1 (|u|^2 + |v|^2) r^2 dr = \infty$. Es liegt auch bei $r = 0$ für jeden erlaubten Wert von k der Grenzpunktfall vor und eine zusätzliche Randbedingung ist auch bei $r = 0$ nicht zu stellen, jedenfalls solange zwischen Kernladungszahl Z und Feinstrukturkonstante α die Beziehung $Z < \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{1}{\alpha}$ besteht.

---

[16]) Unter der Annahme, daß das oben für Differentialgleichungen zweiter Ordnung Ausgeführte auch für Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung gilt.

(Eingegangen am 25. August 1943.)

Über die Mittelwerte der Funktionen eines Orthogonalsystems.

Von

Georg Gunther Lorentz in Tübingen.

Wir betrachten hier Systeme von normierten Orthogonalfunktionen $\{\varphi_n(t)\}$ im Intervall (a, b). Wir beweisen, daß für gewisse Limitierungsverfahren die Funktionen $\varphi_n(t)$ des Systems fast überall im Grundintervall (a, b) gegen Null limitierbar sind. Als einfachste Tatsache dieser Art kann gelten:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx}{n} = 0 \qquad (x \neq 2\pi),$$

$\left(\text{der Bruch ist sogar } O\left(\frac{1}{n}\right)!\right)$, die auch so formuliert werden kann: Für fast alle t ist $\cos n t$ durch das Cesàrosche Verfahren erster Ordnung C_1 gegen Null limitierbar. Ähnliche (und noch schärfere) Aussagen können aber für ein beliebiges Orthogonalsystem gemacht werden.

Wir beginnen mit einer Abschätzung der Funktionen $\varphi_n(t)$. Es sei c_n das n-te Glied einer konvergenten Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit positiven Gliedern. Dann gilt fast überall in (a, b)[1]:

$$\varphi_n(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{c_n}}\right). \tag{1}$$

In der Tat, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(t)^2$ konvergiert fast überall, denn

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(t)^2 \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(t)^2 \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n < +\infty.$$

Daraus folgt fast überall $c_n \varphi_n(t)^2 \to 0$, was mit (1) gleichbedeutend ist. Als Folgerung haben wir fast überall in (a, b):

$$\varphi_n(t) = o\left(\sqrt{n} \log^{\frac{1}{2}+\varepsilon} n\right) = o\left(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \tag{2}$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

Die Cesàroschen Mittel α-ter Ordnung für eine Folge $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ werden definiert durch

$$\sigma_n^{\alpha} = \frac{1}{A_n^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} x_k.$$

[1]) H. Rademacher, Math. Ann. 87 (1922), S. 112–138.

Hier bedeutet

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!} \approx \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{3}$$

Ist nun $\sigma_n^\alpha \to a$, so heißt die Folge $\{x_n\}$ gegen den Grenzwert a C_α-limitierbar:

$$C_\alpha\text{-lim } x_n = a.$$

Wir werden jetzt beweisen, daß für die Funktionen $\varphi_n(t)$ eines normierten Orthogonalsystems fast überall gilt: $C_\alpha\text{-lim } \varphi_n(t) = 0$ für $\alpha > \frac{1}{2}$. Es gilt sogar noch etwas mehr:

Satz 1. *$\{a_n\}$ sei eine beschränkte Folge von reellen Zahlen, $|a_n| \leqq M$, und $\{\varphi_n(t)\}$ ein normiertes Orthogonalsystem. Dann ist fast überall:*

$$C_\alpha\text{-lim } a_n \varphi_n(t) = 0 \qquad (\alpha > \tfrac{1}{2}).$$

Beweis. Wir können annehmen, daß $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Für die Summen

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} a_k \varphi_k(t)$$

haben wir, da $2\alpha - 2 > -1$ ist,

$$\int_a^b \sigma_n(t)^2 dt = \frac{1}{(A_n^\alpha)^2} \sum_{k=0}^{n} (A_{n-k}^{\alpha-1} a_k)^2 \leqq \frac{C_1 M^2}{n^{2\alpha}} \sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha-2}$$
$$\leqq \frac{C_2 M^2}{n^{2\alpha}} n^{2\alpha-1} = \frac{C_2 M^2}{n}$$

(hier und weiter bedeuten C_1, C_2 usw. absolute Konstanten). Es sei $\varepsilon > 0$, $n_k = [k^{1+\varepsilon}]$ (ε wird später festgelegt werden). Dann wird

$$\int_a^b \sigma_{n_k}(t)^2 dt = O\left(\frac{1}{k^{1+\varepsilon}}\right),$$

also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \sigma_{n_k}^2 dt < +\infty,$$

folglich $\sigma_{n_k}(t) \to 0$ fast überall.

Wir betrachten jetzt die Summe σ_n für Werte von n, die der Ungleichung

$$k^{1+\varepsilon} \leqq n < (k+1)^{1+\varepsilon}$$

genügen. Dann ist

$$\sigma_n(t) - \sigma_{n_k}(t) = \sum_{r=0}^{n_k} \left(\frac{A_{n-r}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} - \frac{A_{n_k-r}^{\alpha-1}}{A_{n_k}^\alpha}\right) a_r \varphi_r(t) +$$
$$+ \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{r=n_k+1}^{n} A_{n-r}^{\alpha-1} a_r \varphi_r(t) = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2.$$

Wir wollen zuerst die Summe Σ_1 abschätzen. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Differenz

$$c_{p-1,\nu} - c_{p,\nu}, \qquad (p > \nu),$$

wo

$$c_{p,\nu} = \frac{A_{p-\nu}^{\alpha-1}}{A_p^\alpha}$$

gesetzt wurde. Aus (3) folgt

$$A_p^\alpha = \frac{p+\alpha}{p} A_{p-1}^\alpha$$

und deshalb

$$c_{p-1,\nu} - c_{p,\nu} = \frac{1}{A_p^\alpha A_{p-1}^\alpha} \left(A_p^\alpha A_{p-1-\nu}^{\alpha-1} - A_{p-1}^\alpha A_{p-\nu}^{\alpha-1}\right)$$

$$= \frac{A_{p-1-\nu}^{\alpha-1}}{A_p^\alpha} \left(\frac{p+\alpha}{p} - \frac{p-\nu+\alpha-1}{p-\nu}\right) = \frac{A_{p-1-\nu}^{\alpha-1}}{A_p^\alpha} \frac{p-\alpha\,\nu}{p\,(p-\nu)}$$

$$\leqq \frac{A_{p-1-\nu}^{\alpha-1}}{A_p^\alpha} \frac{1}{p-\nu} \leqq C_3 \frac{1}{p^\alpha (p-\nu)^{2-\alpha}}.$$

Auf Grund dieser Abschätzung haben wir:

$$0 \leqq c_{n_k,\nu} - c_{n,\nu} \leqq C_3 \sum_{p=n_k+1}^{n} \frac{1}{p\ (p-\nu)^{2-\alpha}} \leqq \frac{C_3}{(n_k+1-\nu)^{2-\alpha}} \sum_{p=n_k+1}^{n} \frac{1}{p^\alpha}.$$

Die letzte Summe ist

$$O\left(n^{1-\alpha} - (n_k+1)^{1-\alpha}\right) = O\left(n_{k+1}^{1-\alpha} - n_k^{1-\alpha}\right)$$

$$= O\left((k+1)^{(1+\varepsilon)(1-\alpha)} - k^{(1+\varepsilon)(1-\alpha)}\right) = O\left(k^{-\alpha(1+\varepsilon)+\varepsilon}\right).$$

Infolgedessen haben wir

$$0 \leqq c_{n_k,\nu} - c_{n,\nu} \leqq \frac{C_4}{(n_k+1-\nu)^{2-\alpha}} k^{-\alpha(1+\varepsilon)+\varepsilon}.$$

Jetzt können wir die Summe Σ_1 abschätzen. Nach Formel (2) haben wir: Für fast alle $t \in (a, b)$ gibt es eine Konstante $K = K_t$, für welche

$$|\varphi_\nu(t)| < K\,(\nu+1)^{\frac{1}{2}+\delta} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

ist. Die Zahl $\delta > 0$ wird sogleich genauer festgelegt werden. Es ist

$$\left|\sum\nolimits_1\right| \leqq C_4 M K \sum_{\nu=0}^{n_k} \frac{k^{-\alpha(1+\varepsilon)+\varepsilon}}{(n_k+1-\nu)^{2-\alpha}} (\nu+1)^{\frac{1}{2}+\delta}$$

$$\leqq C_4 M K (n_k+1)^{\frac{1}{2}+\delta} k^{-\alpha(1+\varepsilon)+\varepsilon} \sum_{\nu=1}^{n_k+1} \frac{1}{\nu^{2-\alpha}} \leqq C_5 M K k^{(1+\varepsilon)(\frac{1}{2}+\delta)} k^{-\alpha(1+\varepsilon)+\varepsilon}$$

$$= C_5 M K k^{-(\alpha-\frac{1}{2})(1+\varepsilon)+\varepsilon+\delta(1+\varepsilon)}$$

Wenn wir ε und δ genügend klein wählen, wird der Exponent negativ und wir haben $\Sigma_1 \to 0$ fast überall.

Wir machen jetzt Gebrauch von dem folgenden Hilfssatz von H. RADEMACHER: Für jede endliche Gruppe von reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und ein normiertes Orthogonalsystem $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ existiert eine meßbare Funktion $\delta(t)$, für welche

$$1. \quad \Big|\sum_{\nu=p}^{q} a_\nu \varphi_\nu(t)\Big| \leqq \delta(t), \qquad 1 \leqq p \leqq q \leqq n,$$

$$2. \quad \int_a^b \delta(t)^2\, dt \leqq A \log^2 n \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2,$$

wo A eine absolute Konstante ist[2]).

Es sei jetzt $\delta_k(t)$ die RADEMACHERsche Funktion, die den Koeffizienten $a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}$ und den Funktionen $\varphi_{n_k+1}(t), \ldots, \varphi_{n_{k+1}}(t)$ entspricht. Die Zahlen $A_k^{\alpha-1}$ sind monoton, positiv, und $\leqq 1$. Von der ABELschen Transformation Gebrauch machend, sehen wir, daß $|\Sigma_2|$ das $\frac{2}{A_n^\alpha}$-fache des größten absoluten Betrages der Summe

$$\sum_{\nu=n_k+1}^{p} a_\nu \varphi_\nu(t)$$

für $n_k < p \leqq n$ nicht übersteigt. Es ist also

$$\Big|\sum_2\Big| \leqq \frac{2}{A_n^\alpha}\, \delta_k(t) \leqq C_6 \frac{\delta_k(t)}{k^{(1+\varepsilon)\alpha}} = C_6\, \Delta_k(t).$$

Nun ist nach 2.

$$\int_a^b \Delta_k(t)^2\, dt \leqq \frac{1}{k^{2\alpha(1+\varepsilon)}} A \log^2(n_{k+1} - n_k) \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_\nu^2$$

$$\leqq \frac{A M^2}{k^{2\alpha(1+\varepsilon)}} (n_{k+1} - n_k) \log^2(n_{k+1} - n_k).$$

Da aber $n_{k+1} - n_k = O(k^\varepsilon)$, wird

$$\int_a^b \Delta_k(t)^2\, dt = O\left(\frac{k^\varepsilon \log^2 k}{k^{2\alpha(1+\varepsilon)}}\right) = O\left(\frac{k^{2\varepsilon}}{k^{2\alpha(1+\varepsilon)}}\right) = O\left(\frac{1}{k^{2\alpha - 2\varepsilon(1-\alpha)}}\right).$$

Wir verlangen, daß ε so klein ist, daß

$$2\alpha - 2\varepsilon(1-\alpha) > 1.$$

Dann konvergiert die Reihe $\Sigma \int \Delta_k^2\, dt$, es ist also $\Delta_k(t) \to 0$ fast überall. Damit ist der Satz bewiesen.

---

[2]) Vgl. KACZMARZ und STEINHAUS, Theorie der Orthogonalreihen, Warschau 1936, S. 162.

Für $\alpha = \frac{1}{2}$ ist der Satz nicht mehr richtig. Es gibt vielmehr, wie am Ende dieser Arbeit gezeigt wird, normierte Orthogonalsysteme $\{\varphi_n(t)\}$, für welche C_1-lim $\varphi_n(t) = 0$ nirgends erfüllt ist.

Jetzt gehen wir zu der Betrachtung eines speziellen Orthogonalsystems über, und zwar des Systems von RADEMACHER, welches aus den Funktionen

$$r_n(t) = \operatorname{sign} \sin (2^{n+1}\pi t) \quad 0 \leqq t \leqq 1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

besteht. Für dieses System, das in Zusammenhang mit der Theorie der dyadischen Brüche steht, werden wir eine Verschärfung des Satzes 1 beweisen. Wir brauchen zuerst einige Abschätzungen.

Hilfssatz 1. Für alle natürlichen n und $0 \leqq t \leqq 1$ gilt:

$$\sum_{\substack{0 \leqq k \leqq n \\ \left|\frac{k}{n} - t\right| > n^{-\frac{1}{3}}}} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} < \frac{A}{n^s},$$

wo s eine beliebige positive Zahl ist, und A nur von s abhängt[3]).

Hilfssatz 2. Es seien n, k, $(k \leqq n)$, $m_1 < \cdots < m_k$ natürliche Zahlen, s eine beliebige positive Zahl. Dann hat die Menge der Punkte des Intervalls $(0, 1)$, für welche die Ungleichung

$$|r_{m_1}(t) + r_{m_2}(t) + \cdots + r_{m_k}(t)| \leqq 2n^{\frac{2}{3}} \tag{4}$$

nicht erfüllt ist, ein Maß $\leqq \frac{A'}{n^s}$ (A' hängt nur von s ab).

Beweis. Sind $\varepsilon_i = \pm 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ beliebige Vorzeichen, so sind die Gleichungen

$$r_{m_1}(t) = \varepsilon_1, \ \ldots, \ r_{m_k}(t) = \varepsilon_k$$

simultan auf einer Menge vom Maß $\frac{1}{2^k}$ erfüllt. Deshalb ist die Gleichung

$$S(t) = r_{m_1}(t) + \cdots + r_{m_k}(t) = 2l - k, \quad 0 \leqq l \leqq k,$$

welche besagt, daß genau l von den Summanden gleich $+1$ sind und $k - l$ gleich -1, auf einer Menge vom Maß

$$C_k^l \frac{1}{2^k}$$

erfüllt. Es sei E die Menge, wo $|S(t)| > 2n^{\frac{2}{3}}$ gilt. Nach dem oben Gesagten ist

$$mE = \sum_{\substack{0 \leqq l \leqq k \\ |2l-k| > 2n^{\frac{2}{3}}}} C_k^l \frac{1}{2^k} = \sum_{\substack{0 \leqq l \leqq k \\ \left|\frac{l}{k} - \frac{1}{2}\right| > \frac{n^{\frac{2}{3}}}{k}}} \cdot \ C_k^l \frac{1}{2^k},$$

[3]) Wegen des Beweises vgl. z. B. LORENTZ, Rec. math. Moskau (2) 2 (1937), S. 543–556.

und da $\frac{n^{\frac{3}{2}}}{k} \geqq k^{-\frac{1}{3}}$,

$$m E \leqq \sum_{\left|\frac{l}{k}-\frac{1}{2}\right|>k^{-\frac{1}{3}}} C_k^l \frac{1}{2^k}.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $k \geqq 2 n^{\frac{3}{2}}$ ist [denn sonst wäre die Beziehung (4) überall erfüllt]. Dann haben wir nach Hilfssatz 1 mit $t = \frac{1}{2}$ und $\frac{3s}{2}$ statt s:

$$m E \leqq \frac{A}{k^{\frac{3s}{2}}} \leqq \frac{A}{2^{\frac{3s}{2}} n^s} = \frac{A'}{n^s}.$$

Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Der nächste Hilfssatz behandelt die Koeffizienten der Cesàroschen Transformation C_α für $0 < \alpha < 1$.

Hilfssatz 3. Es sei ε eine feste Zahl, $0 < \varepsilon < 1$. Für jedes natürliche n setzen wir

$$k_i = [\varepsilon n] + i\,[\sqrt{n}] \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

und definieren die Zahl s durch

$$k_s \leqq n < k_{s+1},$$

so daß offenbar $s \leqq \sqrt{n} + 2$ ist.

Dann gibt es, für genügend große n, Zahlen B_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ für die

1. $B_k = 0$ für $0 \leqq k < k_0$.
2. B_k ist konstant für $k_i \leqq k < k_{i+1}$ $\qquad (i = 0, 1, \ldots, s)$.
3. $\sum_{k=0}^{n} \left| \frac{A_k^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} - B_k \right| < \varepsilon^\alpha + \varepsilon$.

Beweis. Wir setzen $B_k = 0$ für $k < k_0$ und

$$B_k = \frac{A_{k_i}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} \text{ für } k_i \leqq k < k_{i+1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, s).$$

Es ist

$$0 \leqq A_k^{\alpha-1} - A_{k+1}^{\alpha-1} = A_k^{\alpha-1}\left(1 - \frac{\alpha-1+k+1}{k+1}\right) = \frac{1-\alpha}{k+1} A_k^{\alpha-1} < \frac{1-\alpha}{k} A_k^{\alpha-1}.$$

Wenn wir solche Ungleichungen addieren, erhalten wir für $l > k$:

$$0 \leqq A_k^{\alpha-1} - A_l^{\alpha-1} \leqq \frac{1-\alpha}{k} A_k^{\alpha-1} + \frac{1-\alpha}{k+1} A_{k+1}^{\alpha-1} + \ldots + \frac{1-\alpha}{l-1} A_{l-1}^{\alpha-1}$$

$$\leqq \frac{(1-\alpha)(l-k)}{k} A_k^{\alpha-1}.$$

Daraus folgt weiter:

$$\sum_{l=k}^{k'} (A_k^{\alpha-1} - A_l^{\alpha-1}) \leqq \frac{1-\alpha}{k} A_k^{\alpha-1} \sum_{p=0} p$$

$$= \frac{1-\alpha}{k} A_k^{\alpha-1} \frac{(k'-k)(k'-k+1)}{2} \leqq C_1 \frac{(k'-k)^2}{k^{2-\alpha}},$$

wo C_1 (und weiter $C_2, \ldots$) eine Konstante ist. Jetzt können wir die Summe 3. abschätzen:

$$\sum_{k=0}^{n} \left| \frac{A_k^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} - B_k \right| \leqq \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{[\varepsilon n]} A_k^{\alpha-1} + \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{i=0}^{s} \sum_{k=k_i}^{k_{i+1}} (A_{k_i}^{\alpha-1} - A_k^{\alpha-1})$$

$$\leqq \frac{A_{[\varepsilon n]}^\alpha}{A_n^\alpha} + \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{i=0}^{s} C_1 \frac{(k_{i+1}-k_i)^2}{k_i^{2-\alpha}}.$$

Das erste Glied hat den Grenzwert ε^α für $n \to \infty$; das zweite ist nicht größer als

$$\frac{C_2 n}{n^\alpha} \sum_{i=0}^{s} \frac{1}{k_i^{2-\alpha}} \leqq \frac{C_2 s}{n^{\alpha-1}} \frac{1}{k_0^{2-\alpha}} \leqq \frac{C_3 \sqrt{n}}{n^{\alpha-1} (\varepsilon n)^{2-\alpha}} = \frac{C_3}{\varepsilon^{2-\alpha} \sqrt{n}}.$$

Wir sehen also, daß 3. wirklich besteht für hinreichend großes n.

Satz 2. *Ist $\{a_n\}$ eine beschränkte Folge von reellen Zahlen, $\{r_n(t)\}$ das* Rademachersche *Orthogonalsystem, so ist für $\alpha > 0$ fast überall*

$$C_\alpha\text{-}\lim a_n r_n(t) = 0.$$

Beweis. Es genügt, $0 < \alpha < 1$ vorauszusetzen. Außerdem kann angenommen werden, daß die Zahlen a_n nur die Werte 0 und 1 annehmen. In der Tat, führen wir im Raume aller beschränkten Zahlenfolgen $a = \{a_n\}$ die Norm

$$\|a\| = \sup_n |a_n|$$

ein, so läßt sich jede solche Folge durch lineare Kombinationen der Folgen $e = \{e_n\}$ der oben angegebenen Art beliebig gut appromieren[4]). Ist der Satz für die Folgen e bewiesen, so gilt er auch für ihre linearen Kombinationen. Infolgedessen unterscheidet sich $\{a_n r_n(t)\}$ fast überall beliebig wenig (im Sinne der eingeführten Norm) von einer gegen Null C_α-limitierbaren Folge, ist also selbst fast überall gegen Null C_α-limitierbar.

---

[4]) Ist $-L < a_n < L$, $\delta = \frac{2L}{m}$, und setzen wir $e_n^{(p)} = 1$, wenn a_n der Ungleichung $l_p = -L + (p-1)\delta \leqq a_n < -L + p\delta$ genügt, $e_n^{(p)} = 0$ im entgegengesetzten Falle, $p = 1, 2, \ldots, m$, so sind $e^{(p)} = \{e_n^{(p)}\}$ Folgen, deren Glieder nur die Werte 0 und 1 annehmen, und es ist

$$\left\| a - \sum_{p=1}^{m} l_p e^{(p)} \right\| \leqq \delta.$$

Dieses angenommen, betrachten wir die Cesàrosche Summe

$$\sigma_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}} a_{n-k} r_{n-k}(t).$$

Wir wählen ein festes $\varepsilon > 0$ und führen noch die Funktion

$$\tau_n(t) = \sum_{k=0}^{n} B_k a_{n-k} r_{n-k}(t)$$

ein, wobei die Zahlen B_k nach dem Hilfssatz 3 gewählt werden.

Wir haben dann:

$$(5) \quad |\tau_n(t)| \leqq \sum_{i=0}^{s-1} B_{k_i} \left| \sum_{k=k_i}^{k_{i+1}-1} a_{n-k} r_{n-k}(t) \right| + B_{k_s} \left| \sum_{k=k_s}^{n} a_{n-k} r_{n-k}(t) \right|.$$

Da die Folge $\{a_n\}$ eine e-Folge ist, folgt aus Hilfssatz 2

$$\left| \sum_{k=k_i}^{k_{i+1}-1} a_{n-k} r_{n-k}(t) \right| \leqq 2 (k_{i+1} - k_i)^{\frac{2}{3}} \geqq C_4 \frac{k_{i+1} - k_i}{n^{\frac{1}{6}}},$$

abgesehen von einer Menge, deren Maß nicht größer als $\frac{A'}{(k_{i+1}-k_i)^5} \leqq \frac{C_5}{n^{\frac{5}{3}}}$ ist. Daraus folgt, daß das erste Glied in (5) kleiner als

$$\frac{C_4}{n^{\frac{1}{6}}} \sum_{i=0}^{s-1} B_{k_i} (k_{i+1} - k_i) \leqq \frac{C_4}{n^{\frac{1}{6}}} \sum_{k=0}^{n} B_k \leqq \frac{C_4}{n^{\frac{1}{6}}} (1 + \varepsilon^{\alpha} + \varepsilon)$$

ist, abgesehen von einer Menge, deren Maß nicht größer als

$$\frac{C_5 \varepsilon}{n^{\frac{5}{3}}} \leqq \frac{C_6}{n^3}.$$

Endlich ist das letzte Glied in (5) kleiner als

$$B_{k_s} (n - k_s) = \frac{A_{k_s}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}} (n - k_s) \leqq \frac{C_7}{\sqrt{n}}.$$

Daraus folgt auf gewöhnliche Weise, daß fast überall

$$\lim_{n \to \infty} \tau_n(t) = 0.$$

Zum Schluß haben wir nach 3., Hilfssatz 3

$$|\sigma_n(t) - \tau_n(t)| \leqq \varepsilon^{\alpha} + \varepsilon,$$

woraus folgt, daß fast überall $\lim_{n \to \infty} \sigma_n(t) = 0$ ist, und der Satz ist bewiesen.

Man kann diesem Satz folgende wahrscheinlichkeitstheoretische Form geben:

Satz 2*. *$\{a_n\}$ sei eine beschränkte Folge von reellen Zahlen. Wenn die Vorzeichen $\varepsilon_n = \pm 1$ durch Zufall bestimmt werden, so kann man mit der Wahrscheinlichkeit 1 behaupten, daß die Folge $\{\varepsilon_n a_n\}$ durch das* Cesàrosche *Verfahren C_α jeder positiven Ordnung $\alpha > 0$ gegen Null limitierbar ist.*

Diese Behauptung soll wie folgt verstanden werden. Ist $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$ eine Folge von Vorzeichen, so ist $e = \{e_n\} = \left\{\frac{\varepsilon_n + 1}{2}\right\}$ eine Folge von Nullen und Einsen. Jeder solchen Folge ordnen wir die Zahl t des Intervalls $(0, 1)$ zu, die durch die dyadische Darstellung

$$t = 0, e_1 e_2 \dots e_n \dots \tag{6}$$

definiert ist. Dabei entsteht, von gewissen abzählbaren Mengen abgesehen, eine eineindeutige Zuordnung der Punkte des Intervalls $(0, 1)$ und der Folgen e oder ε, also werden e_n und ε_n zu Funktionen von t. Der formulierte Satz hat folgenden Sinn: Für fast alle t ist die zugehörige Folge $\{\varepsilon_n a_n\}$ gegen Null C_α-limitierbar.

Man beweist leicht, daß $\varepsilon_n = \varepsilon_n(t) = -r_n(t)$. Folglich ist Satz 2*, wie angekündigt, nur eine andere Form des Satzes 2.

Eine weitere Folgerung ist

Satz 3. *Wir betrachten die dyadischen Darstellungen* (6) *der Zahlen t des Intervalls* $(0, 1)$. *Für fast alle t ist dann*

$$C_\alpha\text{-lim } e_n = \tfrac{1}{2}, \qquad (\alpha > 0).$$

Nach Satz 2 haben wir fast überall C_α-lim $r_n(t) = 0$, und die Beziehung $e_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} r_n(t)$ liefert sofort das Gewünschte.

Wir machen zum Schluß noch einige Bemerkungen. Wir wollen zuerst zeigen, daß *die Abschätzung* (1) *der Funktionen $\varphi_n(t)$ eines Orthogonalsystems die bestmöglichste ist.*

In der Tat, sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine divergente Reihe mit positiven Gliedern; ich will dann ein normiertes Orthogonalsystem $\{\varphi_n(t)\}$ im Intervall $(0, 1)$ konstruieren, für welches überall

$$\varphi_n(t) \neq o\left(\frac{1}{\sqrt{c_n}}\right).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $c_n < 1$, $c_n \to 0$ angenommen werden. Die Zahlen n_k, $n_1 < n_2 < \cdots$ werden induktiv so bestimmt, daß

$$c_{n_{i-1}+1} + \cdots + c_{n_i} \leqq 1, \; c_{n_{i-1}+1} + \cdots + c_{n_i} + c_{n_i+1} > 1 \quad (n_{-1} = 0).$$

Anschließend werden die Funktionen $\varphi_n(t)$ induktiv bestimmt, und zwar so, daß sie stückweise konstant sind. Wir setzen $\varphi_0(t) \equiv 1$. Sind nun die $\varphi_k(t)$ für $k < n$ bestimmt, so wählen wir i derart, daß $n_{i-1} < n \leqq n_i$, zerlegen das

Intervall $I_n = (c_{n_{i-1}+1} + \cdots + c_{n-1},\ c_{n_{i-1}+1} + \cdots + c_n)$ in endlich viele Teilintervalle (α, β); auf jedem von ihnen sollen alle $\varphi_k(t)$ für $k < n$ konstant sein. Wir setzen dann

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} +\frac{1}{\sqrt{c_n}} & \text{für} \quad \alpha < t < \frac{\alpha+\beta}{2}, \\ -\frac{1}{\sqrt{c_n}} & \text{für} \quad \frac{\alpha+\beta}{2} < t < \beta, \\ 0 & \text{für} \quad t \bar{\in} (\alpha, \beta). \end{cases}$$

Die Funktionen $\varphi_n(t)$, auf einer abzählbaren Punktmenge passend ergänzt, genügen, wie man leicht sieht, allen gestellten Forderungen.

Es gibt, insbesondere, ein normiertes Orthogonalsystem $\{\varphi_n(t)\}$, für welches die Abschätzung

$$\varphi_n(t) = o\,(n^{\frac{1}{2}})$$

nirgends richtig ist.

Machen wir jetzt von der Tatsache Gebrauch, aus $C_\alpha\text{-}\lim s_n = 0$ folgt $s_n = o\,(n^\alpha)$[5]), so sehen wir, daß für dieses System nirgends $C_{\frac{1}{2}}\text{-}\lim \varphi_n(t) = 0$ sein kann. Damit ist unsere Bemerkung zu Satz 1 gerechtfertigt.

---

[5]) Es ist, wie man leicht beweist,

$$\frac{1}{A_n^\alpha} s_n = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{-\alpha-1} A_k^\alpha \sigma_k^\alpha.$$

Für die Koeffizienten dieser Transformation sind die TOEPLITZschen Bedingungen erfüllt:

$$\frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} \left| A_{n-k}^{-\alpha-1} A_k^\alpha \right| \leqq 2; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{A_{n-k}^{-\alpha-1} A_k^\alpha}{A_n^\alpha} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Aus $C_\alpha\text{-}\lim s_n = 0$, d. h. $\sigma_n^\alpha \to 0$, folgt also $\frac{s_n}{A_n^\alpha} \to 0$, folglich ist $s_n = o\,(n^\alpha)$.

(Eingegangen am 13. September 1943.)

Über eine isoperimetrische Aufgabe von Erhard Schmidt, I[1]).

Von

Alexander Dinghas in Berlin.

Einleitung.

1. Vorliegende Abhandlung knüpft an die in dieser Zeitschrift erschienene Arbeit von Erhard Schmidt, „Über eine neue Methode zur Behandlung einer Klasse isoperimetrischer Aufgaben im Großen[2])" an und hat als Gegenstand eine Verallgemeinerung zweier dort behandelter isoperimetrischer Probleme für Rotationskörper, die wir im folgenden als Problem I bzw. Problem II bezeichnen werden.

Im gewöhnlichen n-dimensionalen euklidischen Raum können diese beiden Probleme folgendermaßen formuliert werden:

Problem I. *Es sei im n-dimensionalen euklidischen Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ein Zylinder $\mathfrak{Z}_\varrho$ mit der Gleichung*

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = \varrho^2$$

gegeben.

Es soll unter allen Rotationskörpern $\mathfrak{K}$ um die x_n-Achse, welche außerhalb dieses Zylinders verlaufen, derjenige bestimmt werden, welcher bei vorgegebener Oberfläche das Maximum des eingeschlossenen Volumens besitzt.

Problem II. *Unter allen Rotationskörpern um die x_n-Achse, deren Projektion den Raum*

$$(1.1) \qquad 0 < a^2 < x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leqq b^2, \quad x_n = 0,$$

vollkommen ausfüllt, soll derjenige bestimmt werden, welcher bei gegebener Oberfläche das Maximum des eingeschlossenen Volumens liefert.

Was das Problem I anbetrifft, so wurde dieses in der genannten Arbeit von Erhard Schmidt für $n = 3$ behandelt und darüber hinaus ein entsprechendes Problem für den hyperbolischen Raum. Das Problem II ist ein spezieller Fall der dort allgemein behandelten Aufgabe und wurde hier besonders hervorgehoben, da dieses sich zusammen mit dem Problem I in einer Richtung weit verallgemeinern läßt.

---

[1]) Ein wesentlicher Teil dieser Arbeit wurde am 6. Juni 1942 in Tübingen vorgetragen.

[2]) Math. Zeitschr. 47 (1942), S. 489–642.

Diese Verallgemeinerung besteht darin, daß man in den beiden Problemen außer den Rotationskörpern noch alle diejenigen Körper als „zulässige" Körper betrachtet, deren Projektion im euklidischen Fall parallel zur x_n-Achse den Ring (1. 1) ausfüllt. Dadurch gestalten sich die beiden Probleme wesentlich schwieriger und gehören dann zur n-dimensionalen Variationsrechnung.

Außerdem werden die Aufgaben noch mittels geeigneter Wahl der Koordinaten einheitlich für alle Räume konstanter Krümmung und jede Dimensionszahl formuliert und gelöst.

2. Im vorliegenden ersten Teil der Arbeit beschränken wir uns allerdings auf das Problem II und machen zuerst über die Beschaffenheit der zulässigen Körper eine kleine einschränkende Voraussetzung, die im zweiten Teil der Arbeit mittels der Steiner-Symmetrisierung aufgehoben wird.

Der Klarheit wegen wollen wir hier die Voraussetzungen der zulässigen Körper für den euklidischen Fall zusammenfassen:

1. Der Körper $\mathfrak{K}$ ist ein im Sinne von Ehrhard Schmidt einfach zusammenhängender regulärer Körper[3]). Was ein regulärer Körper ist, wird später erklärt werden. Hier sei nur gesagt, daß ein regulärer Körper eine zusammenhängende abgeschlossene Mannigfaltigkeit ist, deren Rand aus endlich vielen zweimal stetig differenzierbaren Stücken besteht. Die zweimalige stetige Differenzierbarkeit ist um so mehr eine viel zu starke Forderung, als sie nicht einmal der Natur der Aufgabe entspringt. Sie wird hier jedoch gestellt, damit für den allgemeinen Oberflächenbegriff der zulässigen Körper eine Definition gegeben werden kann, die auf dem Umgebungsbegriff fußt.

2. Die Projektion von $\mathfrak{K}$ parallel zur x_n-Achse füllt den Ringraum (1. 1) aus.

3. $\mathfrak{K}$ besitzt auf dem Rand von (1. 1) eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}$, welche die Oberfläche $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{K}$ in zwei Teile $\mathfrak{O}_1$ bzw. $\mathfrak{O}_2$ zerlegt, und zwar so, daß der Übergang eines Punktes von $\mathfrak{O}_1$ zu einem Punkt von $\mathfrak{O}_2$ ohne Überschreiten von $\mathfrak{N}$ unmöglich ist.

Wie schon erwähnt wurde, kann diese Voraussetzung mittels der Steinerschen Symmetrisierung (und im nichteuklidischen Falle mittels einer Verallgemeinerung derselben) aufgehoben werden, so daß die einzigen wirklichen Voraussetzungen die Voraussetzungen 1 und 2 bleiben. Da jedoch die strenge Begründung der hier angedeuteten Steiner-Symmetrisierung für alle Räume konstanter Krümmung mit rechnerischen Schwierigkeiten verbunden ist, so wird die Durchführung dieser Symmetrisierung erst im zweiten Teil dieser Arbeit zusammen mit der Behandlung des Problems I entwickelt werden.

---

[3]) Erhard Schmidt, Über das isoperimetrische Problem im Raum von n Dimensionen. Math. Zeitschr. **44** (1939), S. 689—788.

Zum Schluß noch einige Bemerkungen über unser Problem II. Es ist leicht zu sehen, daß das Problem II (unter der Annahme der Zulässigkeitsbedingung 3) in der hier vorgebrachten verallgemeinerten Fassung sehr eng mit folgender Aufgabe (Problem III) verwandt ist:

Es sei $\mathfrak{F}$ ein $(n-1)$-dimensionales Flächenstück des n-dimensionalen Raumes, das oberhalb $x_n = 0$ liegt und durch die beiden Mannigfaltigkeiten $\sum_1^{n-1} x_\nu^2 = a^2, x_n = 0$ bzw. $\sum_1^{n-1} x_\nu^2 = b^2, x_n = 0$ geht. Es sei ferner angenommen, daß die Projektion von $\mathfrak{F}$ parallel zur x_n-Achse mit dem Ring (1. 1) zusammenfällt. Bezeichnet dann V das von $\mathfrak{F}$ und der Hyperebene $x_n = 0$ begrenzte Volumen, so wird bei gegebener Oberfläche die Form desjenigen Flächenstücks $\mathfrak{F}$ gesucht, für welches V Maximum wird.

Diese Aufgabe hat für zwei Dimensionen eine Ähnlichkeit mit einer von Darboux[4]) behandelten isoperimetrischen Aufgabe auf zweidimensionalen Flächen (ohne die Bedingung über die Projektion) und einigen isoperimetrischen Aufgaben von Bonnesen[5]) in der Ebene. Im folgenden werden wir diese Aufgabe als Problem von Darboux-Schmidt bezeichnen. Ausführlich werden wir uns jedoch in dieser Arbeit mit der eben formulierten Aufgabe nicht befassen, denn ihre Lösung ergibt sich auf Grund der hier entwickelten Methoden unmittelbar und zwar im Anschluß an die Lösung des verallgemeinerten Problems II.

Was die hier befolgte Methode betrifft, so stützt sich diese hauptsächlich auf den Gaussschen Divergenzsatz über die Transformation eines Volumenintegrals über eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit in ein Oberflächenintegral. Auf diese Weise wird die fundamentale isoperimetrische Gleichung (15. 1) gewonnen. Daß diese so einfach ausfällt, liegt an einem Zufall, der die Schmidtsche Problemstellung ins rechte Licht rückt, und wonach ein gewisses Integral, nämlich das Integral (17. 1) identisch verschwindet.

Schließlich darf hier noch bemerkt werden, daß die vorliegende Arbeit außer den Problemstellungen in keinem Zusammenhang mit der Schmidtschen Abhandlung steht. Es wird vielmehr hier angestrebt, die Ergebnisse, welche dieses spezielle Problem betreffen, selbständig, elementar und hauptsächlich ohne Bezugnahme auf allgemeine Theorien zu begründen.

---

[4]) G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces. Paris 1894, Bd. 3, S. 148.

[5]) T. Bonnesen, Quelques problèmes isopérimétriques. Acta math. 48 (1926), S. 123—178.

Kapitel I.

Die drei Klassen der Extremalen der Schmidtschen Aufgabe.

Vorbereitende Tatsachen. Problemstellung.

3. Bevor wir zur Formulierung der SCHMIDTschen Aufgabe schreiten, wollen wir die hier benutzten Bezeichnungen erklären. In der ganzen Arbeit soll $\varphi(x, K)$ [kurz $\varphi(x)$], die Funktion $\cos\sqrt{K}\,x$ bedeuten, wobei x als Veränderliche und K als Parameter zu betrachten sind. Für $K = 0$ wird $\varphi(x)$ durch Stetigkeit definiert, es wird also

$$\varphi(x, 0) = \varphi(x) = \lim_{K \to 0} \cos\sqrt{K}\,x = 1$$

gesetzt. Außer $\varphi(x)$ führen wir noch die Funktionen $\psi(x)$ bzw. $\omega(x)$ ein, und zwar durch

$$\psi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt = \frac{\sin\sqrt{K}\,x}{\sqrt{K}}$$

und

$$\omega(x) = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{K}\,x}{\sqrt{K}}.$$

Offenbar ist:

$$\psi' = \varphi, \quad \varphi' = -K\psi, \quad \varphi^2 + K\psi^2 = 1$$

und

$$\psi^2 = \frac{\omega^2}{1 + K\omega^2}, \qquad \varphi^2 = \frac{1}{1 + K\omega^2}.$$

Zur Beschreibung der n-dimensionalen nichteuklidischen Räume benutzen wir die homogenen Koordinaten von WEIERSTRASS, wie wir dies in den beiden früheren Arbeiten getan haben[6]). Wir stellen hier die wichtigsten Tatsachen zusammen.

Wir behandeln zuerst den sphärischen n-dimensionalen Raum. Ein Punkt desselben wird (unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems) durch die Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ dargestellt mit

$$\sum_1^{n+1} x_\nu^2 = \frac{1}{K} \quad (K > 0). \tag{3. 1}$$

Das Bogenelement wird dann durch die Formel

$$ds^2 = \sum_1^{n+1} dx_\nu^2$$

gegeben. Ein solcher Raum wie (3. 1) wird von der Krümmung K genannt.

---

[6]) Vgl. dazu: A. DINGHAS, Zum isoperimetrischen Problem in RIEMANNschen Räumen konstanter Krümmung. Math. Zeitschr. **47** (1942), S. 677–737, oder das wichtige Buch von E. CARTAN, Leçons sur la géométrie des espaces de RIEMANN, Paris 1928.

Die drei weiteren Räume können jetzt mittels projektiver Betrachtungen definiert werden.

Ein Punkt P eines elliptischen, euklidischen oder hyperbolischen Raumes wird durch $n+1$ projektive oder WEIERSTRASS sche Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ definiert, welche der Bedingung

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + \frac{x_{n+1}^2}{K} = \frac{1}{K} \tag{3. 2}$$

unterworfen sind. $K > 0$ entspricht hier dem elliptischen und $K < 0$ dem hyperbolischen Raum. Der euklidische Fall wird als Grenzfall ($K \to 0$) betrachtet. Das Bogenelement des Raumes (3. 2) wird durch

$$ds^2 = \sum_1^n dx_\nu^2 + \frac{1}{K} dx_{n+1}^2 \tag{3. 3}$$

gegeben, und dieses geht für $K \to 0$ (wegen $x_{n+1} \to 1$) in das Bogenelement des n-dimensionalen euklidischen Raumes

$$ds^2 = \sum_1^n dx_\nu^2 \tag{3. 4}$$

über.

Ist $K \neq 0$, so kann man an Stelle der x_i die Koordinaten

$$X_i = \frac{x_i}{x_{n+1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3. 5}$$

benutzen[7]). Man erhält dann durch elementare Rechnungen an Stelle von (3. 3) das Bogenelement

$$ds^2 = \frac{(1 + K \sum_1^n X_i^2)(\sum_1^n dX_i^2) + K(\sum_1^n X_i dX_i)^2}{(1 + K \sum X_i^2)^2}, \tag{3. 6}$$

das dem bekannten CAYLEY-KLEIN schen Schema der nichteuklidischen Geometrien entspricht.

Wir wollen jetzt in (3. 1) bzw. (3. 2) Polarkoordinaten einführen. Dazu geben wir (3. 1) durch die Substitution $\sqrt{K}\, x_{n+1} = x'_{n+1}$ die Form (3. 2) und schreiben dann x_{n+1} an Stelle von x'_{n+1}. Diese Verabredung soll für den sphärischen Raum immer gelten. Die Gleichung (3. 2) kann dann befriedigt werden, wenn man setzt:

$$\begin{aligned} x_i &= \{ \prod_{\nu=1}^{\nu=i-1} \varphi(\vartheta_\nu) \}\, \psi(\vartheta_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ x_{n+1} &= \prod_1^n \varphi(\vartheta_\nu)^{8}). \end{aligned} \tag{3. 7}$$

---

[7]) Für $K = 0$ artet diese Transformation in die identische Transformation aus.

[8]) Für $i = 1$ ist das Produkt leer, also $x_1 = \psi(\vartheta_1)$.

Dabei variieren die ϑ_i im euklidischen bzw. hyperbolischen Fall von $-\infty$ bis $+\infty$ und im elliptischen zwischen $-\frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ und $\frac{\pi}{2\sqrt{K}}$. Im sphärischen Fall ändert sich nur das Variationsintervall von ϑ_n, und zwar wird dieses das Intervall von $-\frac{\pi}{\sqrt{K}}$ bis $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$.

Rechnet man das Bogenelement ds^2 in die Koordinaten ϑ_i um, so findet man

$$ds^2 = d\vartheta_1^2 + \varphi^2(\vartheta_1)\,d\vartheta_2^2 + \cdots + \varphi^2(\vartheta_1)\ldots\varphi^2(\vartheta_{n-1})\,d\vartheta_n^2. \tag{3.8}$$

Dieser Ausdruck geht für $K \to 0$ in die euklidische Fundamentalform

$$ds^2 = d\vartheta_1^2 + \cdots + d\vartheta_n^2 \tag{3.9}$$

über.

4. Unter Fundamentalbereich verstehen wir im folgenden:

1. Für $K \leqq 0$ den Bereich

$$-\infty < \vartheta_i < \infty \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.1}$$

2. Für $K > 0$ (elliptischer Raum) den Bereich

$$-\frac{\pi}{2\sqrt{K}} \leqq \vartheta_i < \frac{\pi}{2\sqrt{K}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.2}$$

und

3. für den sphärischen Raum von der Krümmung K den Bereich

$$-\frac{\pi}{2\sqrt{K}} \leqq \vartheta_i < \frac{\pi}{2\sqrt{K}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad -\frac{\pi}{\sqrt{K}} \leqq \vartheta_n < \frac{\pi}{\sqrt{K}}\text{[9]}. \tag{4.3}$$

Diesen Fundamentalbereich bezeichnen wir im folgenden mit G_0. Wir gehen jetzt zur einheitlichen Formulierung der Schmidtschen Aufgabe für alle nichteuklidischen Räume konstanter Krümmung über und zwar unter Verwendung der homogenen Koordinaten x_i, der Cayley-Kleinschen Koordinaten X_i und schließlich der Koordinaten ϑ_i. Wir erhalten dann folgende drei gleichwertige Formulierungen:

I. Es bezeichne im x-Raum $\mathfrak{H}_{ab}$ die Menge aller Punkte, welche den Ungleichungen

$$\psi^2(a) \leqq x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leqq \psi^2(b) \tag{4.4}$$

genügen. Es soll unter allen zulässigen Körpern $\mathfrak{K}$, die in $\mathfrak{H}_{ab}$ einbeschrieben sind, derjenige bestimmt werden, der unter vorgegebener Oberfläche O das Maximum

---

[9]) Eigentlich handelt es sich hier um die Darstellung der in den Punkten $x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{K}}$, $x_2 = \cdots = x_n = x'_{n+1} = 0$ punktierten Kugel (3.1). Es darf hier darauf hingewiesen werden, daß man aus dem sphärischen Raum den elliptischen Raum ableiten kann, indem man die Punkte $P(x_1, \ldots, x_{n+1})$ und $P'(-x_1, -x_2, \ldots, -x_{n+1})$ identifiziert.

des Volumens aufweist. Die Definition des zulässigen und in $\mathfrak{H}_{a\,b}$ einbeschriebenen Körpers wird später ausführlich dargelegt werden.

II. Unter allen zulässigen Körpern $\mathfrak{K}$, welche im ringförmigen Raum

$$\begin{aligned} X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{n-1}^2 - K\,\omega^2(b)\,X_n^2 &\leqq \omega^2(b) \\ X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{n-1}^2 - K\,\omega^2(a)\,X_n^2 &\geqq \omega^2(a) \end{aligned} \tag{4.5}$$

liegen, soll derjenige bestimmt werden, der unter gegebener Oberfläche O das Maximum des Volumens V aufweist.

III. Es bezeichne $\mathfrak{H}_{a\,b}$ den im Fundamentalbereich G_0 der Mannigfaltigkeit liegenden „Zylinder"

$$\frac{\varphi(b)}{K} \leqq \frac{\prod_1^{n-1} \varphi(\vartheta_\nu)}{K} \leqq \frac{\varphi(a)}{K}\ ^{10}). \tag{4.6}$$

Es soll unter allen in $\mathfrak{H}_{a\,b}$ einbeschriebenen zulässigen Körpern $\mathfrak{K}$ derjenige bestimmt werden, der unter vorgegebener Oberfläche das Maximum des Volumens aufweist.

Jeder dieser drei gleichwertigen Formulierungen liegt die entsprechende Metrik (3. 3), (3. 6) und (3. 8) zugrunde. Ferner muß die Zahl b für $K > 0$ der Ungleichung

$$b < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$$

genügen.

Es zeigt sich, daß die dritte Formulierung am einfachsten zu behandeln ist. Wir werden deswegen diese unseren Betrachtungen zugrunde legen. Ist einmal die Aufgabe in diesen Koordinaten gelöst, so ist, um die Aufgabe in den Koordinaten x_i bzw. X_i zu erhalten, nur eine einfache Koordinatentransformation erforderlich.

Formulierung des Schmidtschen Hauptsatzes.

5. Wie Erhard Schmidt in seiner vorhin erwähnten Abhandlung für den dreidimensionalen Fall gezeigt hat, gibt es bei festem a und b und vorgegebenem O drei Arten von geschlossenen Extremalflächen. Diejenigen nämlich, welche durch Rotation der Extremalen eines eindimensionalen Problems entstehen, und die er als Extremale vom Typus (A), (B, 1) und (B, 3)

---

[10]) Für $K \to 0$ folgt, wenn man den Grenzübergang ausführt,

$$a^2 \leqq \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \cdots + \vartheta_{n-1}^2 \leqq b^2,$$

was einem gewöhnlichen Zylinderraum entspricht.

bezeichnet hat[11]). Wir sprechen hier von den Typen I, II und III und charakterisieren sie folgendermaßen: Alle drei Arten der Extremalflächen sind (für $n > 2$) Rotationsflächen und werden durch eine (später genauer zu erklärende) nichteuklidische Rotation einer gewöhnlichen Kurve C erhalten.

Um C darzustellen, bedienen wir uns der Metrik

$$ds^2 = du^2 + \varphi^2(u)\,dv^2. \tag{5.1}$$

Es sei dann G_0 der dieser Metrik zugehörige Fundamentalbereich. Dieser kann für $K > 0$ (elliptischer Fall) durch das Quadrat $ABB'A'$ dargestellt werden.

Der in ihm gezeichnete Streifen G_{ab} ist wegen der bekannten Bewegungszusammenhänge doppelt und spiegelbildlich gezeichnet worden.

Bewegt man sich in der uv-Ebene in einer Richtung parallel zur v-Achse von G_0, so ist es möglich, von dem rechten Streifen in den linken und umgekehrt, einzudringen. Beim sphärischen Fall handelt es sich nur um den rechten Streifen, der von dem linken getrennt zu behandeln ist, da man durch fortgesetzte Bewegung längs der v-Richtung immer in demselben Streifen bleibt[12]).

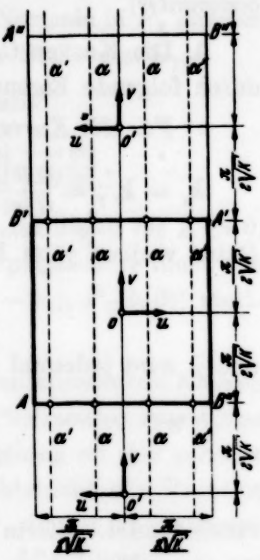

Fig. 1.

Der Einfachheit wegen nehmen wir in beiden Fällen (elliptischer und sphärischer Fall) an, daß die Vergleichskurven in dem rechten Streifen von G_0 liegen. Wie wir zeigen werden, gibt es immer geschlossene Extremalen, die in diesem Streifen liegen.

Nach diesen Vorbereitungen behaupten wir:

1. *Es gibt drei reelle Kurvenscharen I, II, III oder Klassen, die so beschaffen sind, daß jede Schar mit einer Kurve auch die Spiegelkurve derselben an der v-Achse enthält. Kurven von der Klasse I bzw. II oder III bezeichnen wir im folgenden mit C_I bzw. C_{II} bzw. C_{III}.*

2. *Die Kurven C_I, C_{II}, C_{III} der Scharen I, II, III genügen einer Differentialgleichung von der Form*

$$\frac{dv}{du} \pm \frac{k_g\,\Phi(u)}{\varphi\sqrt{1 - k_g^2\,\Phi^2(u)}} = 0 \tag{5.2}$$

[11]) Explizit wurden diese Extremalen für die vorliegende Aufgabe nur für den dreidimensionalen euklidischen bzw. hyperbolischen Fall berechnet. Jedoch folgt auch der sphärische Fall aus den allgemeinen Sätzen (bei festen a, b) unmittelbar. Einige Schwierigkeiten dürfte dabei nur die Frage der schlichten Überdeckung bereiten.

[12]) Für den sphärischen Fall wird hier keine Zeichnung angegeben. Es genügt die Bemerkung, daß der Fundamentalbereich G_0 der Bereich $ABB''A''$ ist und daß die verschiedenen Koordinatensysteme in den Nebenbereichen gleichgerichtet sind.

mit

$$(5.3)\qquad \Phi(u) = \frac{\varphi^{n-1}(u) + A}{\varphi\,\varphi^{n-2}(u)} = \omega(u) + \frac{A\,\omega(u)}{\varphi^{n-1}(u)} = \omega(u) + AG(u).$$

Dabei ist A ebenso wie k_g Parameter. Diese werden allein durch die Oberfläche O bestimmt[13]).

3. Die Kurven C_{I}, C_{II}, C_{III} der drei Klassen I, II, III werden ferner durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

a) *Für die Kurven C_I ist*

$$k_g = k_{\gamma\bar{\gamma}} = \frac{G(b)\cos\bar{\gamma} + G(a)\cos\gamma}{G(a)\,\omega(b) - G(b)\,\omega(a)}, \qquad A = -\frac{\omega(a)\cos\bar{\gamma} + \omega(b)\cos\gamma}{G(a)\cos\bar{\gamma} + G(b)\cos\gamma}.$$

Dabei variiert γ im Intervall

$$\gamma_0 \leqq \gamma < \frac{\pi}{2}$$

und $\bar{\gamma}$ wird jedesmal durch γ so bestimmt, daß das Integral

$$J_{\gamma\bar{\gamma}} = \int_a^b \frac{Q_{\gamma\bar{\gamma}}\,du}{\varphi\sqrt{M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2}} = 0$$

verschwindet. Hierin ist

$$Q_{\gamma\bar{\gamma}} = \{G(a)\cos\gamma + G(b)\cos\bar{\gamma}\}\,\omega(u) - \{\omega(a)\cos\gamma + \omega(b)\cos\bar{\gamma}\}G(u)$$

und

$$M = G(a)\,\omega(b) - G(b)\,\omega(a).$$

Jede Kurve C_{I} kann durch Parallelverschiebung in eine Lage gebracht werden, daß sie durch die Punkte $P_1(u = a, v = 0)$ und $P_2(u = b, v = 0)$ geht. Wie wir später sehen werden, bedeuten $\gamma, \bar{\gamma}$ die Winkel, welche die Normale n in P_1 bzw. P_2 mit der u-Achse bildet. Deswegen benutzen wir an Stelle von C_{I} auch die Bezeichnung $C_{\gamma\bar{\gamma}}$. Die Kurven C_{I} (oder $C_{\gamma\bar{\gamma}}$) berühren die beiden Geraden $u = a$, $u = b$ nicht.

b) *Für die Kurven C_{II} ist*:

$$k_g = k_\gamma = \frac{G(a)\cos\gamma + G(b)}{G(a)\,\omega(b) - G(b)\,\omega(a)}, \qquad A = -\frac{\omega(a) + \omega(b)\cos\gamma}{G(a) + G(b)\cos\gamma}.$$

Dabei variiert γ im Intervall

$$0 < \gamma < \gamma_0.$$

---

[13]) Die Differentialgleichungen (5. 2) sind nichts anderes als die einmal integrierten EULERschen Differentialgleichungen des Problems. Diese werden nicht abgeleitet werden. Was hier geleistet wird, ist die Konstruktion des Feldes. Dieser Sachverhalt wird später ausführlicher dargestellt werden.

Die Kurven C_{II} können durch Parallelverschiebung (eventuell nach Spiegelung an der v-Achse) in eine Lage gebracht werden, daß sie durch P_2 gehen und die Gerade $u = a$ in einem Punkt $P_a(0, v_a)$ mit $v_a > 0$ berühren. Für alle v der Punkte $P(u, v)$ von C_{II} gilt dann $v \geqq 0$.

Wie später bewiesen werden soll, liegen alle Kurven dieser Klasse, die durch P_2 gehen, in G_0. Hier ist γ der Winkel, den die Normale in P_2 mit der u-Achse bildet. Wir schreiben deswegen später C_γ an Stelle von C_{II}.

c) *Für die Kurven C_{III} der Schar III ist schließlich*

$$k_g = \frac{G(a) + G(b)}{G(a)\,\omega(b) - G(b)\,\omega(a)}, \quad A = -\frac{\omega(a) + \omega(b)}{G(a) + G(b)}. \tag{5. 4}$$

Diese Kurven berühren beide Geraden $u = a$, $u = b$ und liegen für $K > 0$, falls die Berührung nicht viel oberhalb (bzw. für die Spiegelkurve nicht viel unterhalb) der Punkte $P(a, v_a)$, $P_2(b, 0)$ [bzw. $P'(a, -v_a)$, $P_2(b, 0)$] stattfindet, innerhalb des Fundamentalbereiches G_0.

6. Mit Hilfe dieser Scharen konstruieren wir drei entsprechende Klassen von Extremalflächen bzw. Körpern, und zwar so: Wir betrachten zuerst eine Kurve C_{I}, welche durch P_1, P_2 geht. Durch Spiegelung an der u-Achse entsteht eine linsenförmige Figur $C_{\gamma,\bar{\gamma}}$. Durch eine nichteuklidische Rotation von $C_{\gamma,\bar{\gamma}}$ um die v-Achse entstehen die Ringkörper $\mathfrak{R}_{\gamma,\bar{\gamma}}$, die wir als Repräsentanten der Extremalkörper der Klasse I betrachten. Alle Körper, die aus ihnen durch Parallelverschiebung längs der v-Achse entstehen, werden, solange sie in G_0 liegen, ebenfalls als Extremalkörper von der Klasse I bezeichnet werden.

Ähnlich konstruiert man die Klasse $\mathfrak{R}_\gamma$ durch Rotation von Extremalen C_γ, und schließlich die Klasse der Extremalkörper $\mathfrak{R}_q$ durch Rotation zweier in bezug auf $v = 0$ symmetrisch liegender Extremalkurven C_{III}. Dabei bedeutet q die Größe $2\,v_b$, wenn v_b die Ordinate des Berührungspunktes der oberen Hälfte von C_{III} mit der Geraden $u = b$ ist. Daß für $K > 0$ q nicht beliebig groß genommen werden kann, ist wegen der Beschränktheit von G_0 einleuchtend.

Sind einmal die drei Extremalklassen $\mathfrak{R}_{\gamma,\bar{\gamma}}$, $\mathfrak{R}_\gamma$, $\mathfrak{R}_q$ definiert, so können wir das Hauptresultat dieser Arbeit folgendermaßen formulieren:

Unter allen im Ringraum

$$\frac{\varphi(a)}{K} \leqq \frac{\prod_1^{n-1} \varphi(\vartheta_i)}{K} \leqq \frac{\varphi(b)}{K} \tag{6. 1}$$

einbeschriebenen zulässigen Körpern erreichen bei vorgegebenem O nur die Körper der Klassen I, II, III das Maximum des Volumens. Und zwar ist für

$$O_0 < O < O_1$$

die Lösung ein Körper der Klasse I, für

$$O_1 \leqq O < O_2$$

ein Körper der Klasse II, und für

$$O_2 \leqq O$$

ein Körper der Klasse III. Dabei wird jedesmal der Extremalkörper eindeutig durch O bestimmt.

Die Grenzen O_0, O_1, O_2 werden später explizit angegeben und ihre Existenz ausführlicher bewiesen. Hier sei nur folgendes gesagt: *Es ist*

$$O = 2(n-1) W_{n-1} \int_a^b \varphi^{n-2} dx,$$

$$O_1 = 2(n-1) W_{n-1} M \int_a^b \frac{\varphi^{n-2} dx}{\sqrt{M^2 - Q_{\gamma_0}^2}}$$

und

$$O_2 = 2(n-1) W_{n-1} \int_a^b \frac{\varphi^{n-2}(x)\varphi(x) M + \varphi^{n-2}(a)\varphi(a) Q_0}{\sqrt{M^2 - Q_0^2}} dx.$$

Wie schon früher erklärt wurde, ist hier

$$M = G(a)\omega(b) - G(b)\omega(a),$$

$$Q_0(x) = \{G(a) + G(b)\}\omega(x) - \{\omega(a) + \omega(b)\}G(x),$$

$$Q_{\gamma_0}(x) = \{G(a)\cos\gamma_0 + G(b)\}\omega(x) - \{\omega(a)\cos\gamma_0 + \omega(b)\}G(x),$$

und γ_0 wird eindeutig bestimmt durch die einzige Nullstelle des Integrals

$$J(\gamma) = \int_a^b \frac{Q_\gamma dx}{\varphi\sqrt{M^2 - Q_\gamma^2}} = 0 \quad \left(0 < \gamma < \frac{\pi}{2}\right).$$

Dabei ist

$$Q_\gamma(x) = \{G(a)\cos\gamma + G(b)\}\omega(x) - \{\omega(a)\cos\gamma + \omega(b)\}G(x).$$

Ferner bedeutet W_{n-1} den Inhalt der $(n-1)$-dimensionalen Kugel.

Der Gedankengang des Beweises wird nun kurz folgender sein: Unter Zugrundelegung der Differentialgleichung (5. 2) der „Extremalen" wird zuerst gezeigt, daß es möglich ist, „Extremalen" von der Klasse I, II und III zu konstruieren. Sodann wird durch die fundamentale Gleichung (15. 1) nachgewiesen, daß die durch die „Extremalen" dieser Klasse bestimmten Körper ein kleineres Volumen besitzen als jeder andere Körper mit demselben O. Die Eindeutigkeit der Bestimmung der Körper der drei Klassen ausschließlich durch ihre Oberfläche wird zum Schluß durch Monotoniebetrachtungen erbracht werden.

Kapitel II.

Existenz und Konstruktion der Extremalen.

Konstruktion der „Extremalen" C_{I}, C_{II} und C_{III}.

7. Wir beginnen zuerst mit der Konstruktion der Extremalen der Klasse III und zeigen folgende Tatsache: Es existiert eine „Extremale" [d. h. eine Kurve, welche der Differentialgleichung (5. 2) genügt], welche die Gerade $u = b$ in $v = 0$ und die Gerade $u = a$ in einem Punkt $P(a, v_a)$ berührt.

Zuerst behaupten wir: Für $n = 2$ ist $v_a = 0$ und für $n > 2$, $v_a > 0$.

Zum Beweis dieser Tatsache bestimmen wir k_g, A in (5. 2) so, daß diese „Extremale" die Geraden $u = a$, $u = b$ berührt. Dafür bestimmen wir zuerst aus (5. 2) die Richtungskosinus der „Normalen" einer „Extremalen" in einem ihrer Punkte, wobei diese Normale so definiert ist, daß sie sich zu der nach vorschreitendem s (s ist die Bogenlänge der betreffenden Extremalen, gemessen z. B. von ihrem Berührungspunkt mit der Geraden $u = b$) gerichteten Tangente so verhält, wie die positive u-Richtung zu der positiven v-Richtung.

Eine leichte Überlegung zeigt dann, daß die Richtungskosinus $\cos(\bar{n}, u)$, $\cos(\bar{n}, v)$ dieser Normalen mit der u- bzw. v-Richtung durch die Formeln

$$(7.1)\qquad \cos(\bar{n}, u) = \varphi \frac{dv}{ds} = k_g \Phi, \qquad \cos(\bar{n}, v) = -\frac{du}{ds} = \sqrt{1 - k_g^2 \Phi^2}$$

gegeben werden.

Verlangen wir nun für $u = b$ $\cos(\bar{n}, u) = 1$ und für $u = a$ $\cos(\bar{n}, u) = -1$, so folgt daraus mit Rücksicht auf (5. 3)

$$k_g \{\omega(a) + AG(a)\} = -1, \quad k_g \{\omega(b) + A_g G(b)\} = +1.$$

Löst man dieses System nach k_g, A_g auf, so findet man für diese die Werte (5. 4).

Mit diesen Werten von k_g bzw. A_g folgt, wie man unmittelbar nachprüft,

$$k_g \Phi = \frac{\{G(a) + G(b)\}\,\omega(u) - \{\omega(a) + \omega(b)\}\,G(u)}{G(a)\,\omega(b) - G(b)\,\omega(a)} = \frac{Q(u)}{Q(b)} = \frac{Q(u)}{M}.$$

Für diese „Extremale" muß

$$(7.2)\qquad \varphi \frac{dv}{du} = -\frac{Q(u)}{\sqrt{M^2 - Q^2}}$$

gelten, und es folgt durch Integration (wegen $v_b = 0$)

$$(7.3)\qquad v_a = \int_a^b \frac{Q(u)\,du}{\varphi \sqrt{M^2 - Q^2}}.$$

Es soll nun bewiesen werden: *Für $n = 2$ ist $v_a = 0$.* Bevor wir zum Beweis dieser Tatsache schreiten, muß nachgewiesen werden, daß der Ausdruck

unter dem Radikal in (7. 2) oder (7. 3) nicht negativ wird. Dazu genügt, wegen $M = Q(b) = -Q(a)$ zu zeigen, daß $Q(u)$ eine *monoton wachsende* Funktion von u ist. Ist $K \leqq 0$, so ist diese Tatsache einfach zu beweisen, wenn man die Ableitung Q' bildet. In der Tat folgt aus der Definition von Q

$$Q' = A\omega' - BG' = A\omega' + B\frac{(n-1)G - G\omega'}{\omega},$$

denn es gilt

$$\left(\frac{\omega}{G}\right)' = (n-1)\,\psi^{n-2}\varphi = (n-1)\frac{1}{G}.$$

Es wird also nach vorheriger Multiplikation mit

$$\omega Q' = \omega' Q + BG + (n-2)\,BG,$$

d. h.

$$\omega Q' = \frac{A\omega}{\varphi^2} + BG\left(1 - \frac{1}{\varphi^2}\right) + (n-2)\,BG,$$

oder

$$\omega Q' = \frac{A\omega}{\varphi^2} - KBG\omega^2 + (n-2)BG, \tag{7.4}$$

woraus wegen $K \leqq 0$ die Behauptung folgt.

8. Ist $K > 0$, so kann man ohne weiteres $K = 1$ voraussetzen, da sich ja sonst alles mit einer Potenz von K multipliziert. Nun ist allgemein:

$$Q' = \frac{A}{\varphi^2} - BG\omega + (n-2)\frac{B}{\psi^{n-1}} \tag{8.1}$$

mit

$$A = G(a) + G(b),\ B = \omega(a) + \omega(b),\ G = \frac{\omega}{\psi^{n-1}}.$$

Wegen $K = 1$ bedeuten hier die Funktionen ψ, φ, ω die gewöhnlichen trigonometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$. Da offenbar $A > B$ ist, so ist

$$Q' > B\left\{\frac{1}{\varphi^2} - \frac{\varphi^2}{\varphi^2\,\psi^{n-1}} + (n-2)\frac{1}{\psi^{n-1}}\right\}$$

oder

$$Q' > \frac{B}{\varphi^2\,\psi^{n-1}}\left\{\psi^{n-1} - (n-1)\,\psi^2 + (n-2)\right\}.$$

Nun wird behauptet: *Das Polynom*

$$P(x) = x^{n-1} - (n-1)\,x^2 + (n-2)$$

ist für $0 < x < 1$ *positiv, und zwar gilt für* $n > 2$

$$P(x) > (n-2)(1-x) > 0 \tag{8.2}$$

und für $n = 2$

$$P(x) = x(1-x) > 0. \tag{8.3}$$

Da die zweite Behauptung unmittelbar aus der Definition von $P(x)$ folgt, so beweisen wir (8. 2).

Da das Polynom $P(x)$ durch $1 - x$ teilbar ist und

$$(8.4) \qquad P(x) = (1-x)\{(n-2)(1+x) - x^2 - x^3 - \cdots - x^{n-2}\},$$

so ist wegen $0 < x < 1$ in der Tat

$$(8.5) \quad P(x) > (1-x)\{(n-2)(1+x) - (n-2)x\} = (1-x)(n-2) > 0.$$

Somit ist die Behauptung (8. 2) bewiesen und hiermit zugleich auch die Ungleichung $Q' > 0$. Was die Realität von $\sqrt{M^2 - Q^2}$ anbetrifft, so ist sie eine Folgerung dieser Tatsache, da ja $|Q|$ sein Maximum für $u = a$ bzw. $u = b$ annimmt. Da dort $|Q(a)| = |Q(b)| = M$ ist, so ist in $a < u < b$, $|Q(u)| < M$ und somit $M^2 - Q^2(u) > 0$.

Es bleibt jetzt nur der Satz $v_a \geqq 0$ zu beweisen.

Beweis von $v_a \geqq 0$.

9. Der Beweis von $v_a \geqq 0$ ist schwierig. Man kann ihn in zwei Teile zerlegen, und zwar für den Fall $n = 2$ und dann für den Fall $n > 2$.

Die Behauptung für $n = 2$ lautet: *Für $n = 2$ gilt*

$$(9.1) \qquad J = \int_a^b \frac{Q\,du}{\varphi\sqrt{M^2 - Q^2}} = 0.$$

Diese Behauptung ist wegen des Auftretens von φ nicht trivial. Zum Beweis von (9. 1) führen wir eine neue Veränderliche x durch die Gleichung

$$(9.2) \qquad x = \int_a^u \frac{dt}{\varphi(t)}$$

ein und setzen

$$Q(u) = F(x) = y, \quad \varrho = \int_a^b \frac{dt}{\varphi(t)}.$$

Es wird dann wegen

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dQ}{du}\varphi(u) = Q' \cdot \varphi(u)$$

und

$$Q = A\omega - \frac{B}{\varphi(u)},$$

$$F' = \frac{A}{\varphi} - KB\omega.$$

Durch nochmalige Differentiation folgt:

$$F'' = (Q'\varphi)'\varphi = KA\omega - \frac{BK}{\varphi} = KF.$$

Danach genügt die Funktion $F(x)$ der Differentialgleichung

$$y'' - Ky = 0. \tag{9.3}$$

Bezeichnen wir mit $\bar{\psi}$, $\bar{\varphi}$ die mit $-K$ an Stelle von K gebildeten Funktionen $\psi(x, K)$, $\varphi(x, K)$ [14]), so ist die allgemeine Lösung von (9.9)

$$F(x) = C_1 \bar{\psi}(x) + C_2 \bar{\varphi}(x), \tag{9.4}$$

wobei C_1, C_2 willkürliche Konstanten sind. Verlangt man

$$F(0) = Q(a) = -Q(b), \qquad F(\varrho) = Q(b),$$

so erhält man nach einigen einfachen Rechnungen die definitive Form für $F(x)$,

$$F(x) = \frac{Q(b)}{\psi(\varrho)} \{\bar{\psi}(x) - \bar{\psi}(\varrho - x)\}. \tag{9.5}$$

Aus dieser Gleichung folgt nun, daß $F(x)$ eine in bezug auf $x = \frac{\varrho}{2}$ symmetrische Funktion ist, die für $x = \frac{\varrho}{2}$ verschwindet. Sie ist für $x < \frac{\varrho}{2}$ negativ, für $x > \frac{\varrho}{2}$ positiv und nach dem Vorhergesagten monoton wachsend. Für $K \to 0$ wird $F(x)$ gleich

$$F(x) = 2x - (b - a).$$

Führt man in

$$J = \int_a^b \frac{Q(u)\, du}{\varphi(u) \sqrt{M^2 - Q^2(u)}}$$

die Veränderliche x ein, so wird

$$J = \int_0^{\varrho} \frac{F(x)\, dx}{\sqrt{M^2 - F^2(x)}} = 0. \tag{9.6}$$

10. Um $v_a > 0$ für $n > 2$ zu beweisen, verfahren wir folgendermaßen: Es sei $u = u_0$ ein solcher Wert, daß

$$\frac{\varrho}{2} = \int_a^{u_0} \frac{dt}{\varphi(t)}$$

gilt. Dann behaupten wir:

Wird, damit die Abhängigkeit von n besonders hervortritt, $Q_n(u) = A_{n-1}\omega - BG_{n-1}$ *gesetzt, mit*

$$A_{n-1} = \frac{\omega(a)}{\psi^{n-1}(a)} + \frac{\omega(b)}{\psi^{n-1}(b)}, \quad G_{n-1} = \frac{\omega(u)}{\psi^{n-1}(u)},$$

[14]) Also $\bar{\psi}(x) = \psi(x, -K)$, $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x, -K)$.

so gilt für die Nullstelle q_n von Q_n die Ungleichung

(10. 1) $$q_n < u_0$$

für jedes $n > 2$.

Nach Definition ist

$$\psi(u_0) = \frac{B}{A_1}$$

und

$$\psi^{n-1}(q_n) = \frac{B}{A_{n-1}}.$$

Kann nun die Ungleichung

(10. 2) $$\frac{B}{A_{n-1}} < \left(\frac{B}{A_1}\right)^{n-1}$$

bewiesen werden, so würde daraus

$$\psi^{n-1}(q_n) < \psi^{n-1}(u_0),$$

d. h. (10. 1) folgen.

Um (10. 2) zu beweisen, setzen wir der Kürze wegen

$$A_{n-1} = \frac{a}{A^{n-1}} + \frac{b}{B^{n-1}}, \quad A = \psi(a), \quad B = \psi(b), \quad \omega(a) = a, \quad \omega(b) = b$$

mit $a, b, A, B > 0$.

Es muß dann

(10. 3) $$\left(\frac{a}{A} + \frac{b}{B}\right)^{n-1} < \left(\frac{a}{A^{n-1}} + \frac{b}{B^{n-1}}\right)(a+b)^{n-2}$$

bewiesen werden.

Entwickeln wir hier nach dem binomischen Lehrsatz die rechte Seite von (10. 3), so wird[15]):

(10. 4) $$\left(\frac{a}{A^{n-1}} + \frac{b}{B^{n-1}}\right)(a+b)^{n-2} = \sum_0^{n-2} \left\{\binom{n-2}{\nu} \frac{a^{n-\nu-1}b^{\nu}}{A^{n-1}} + \binom{n-2}{\nu} \frac{a^{n-\nu-2}b^{\nu+1}}{B^{n-1}}\right\},$$

oder

$$\left(\frac{a}{A^{n-1}} + \frac{b}{B^{n-1}}\right)(a+b)^{n-2} = \sum_0^{n-1} \left\{\binom{n-2}{\nu} \frac{1}{A^{n-1}} + \binom{n-2}{\nu-1} \frac{1}{B^{n-1}}\right\} a^{n-\nu-1}b^{\nu}.$$

---

[15]) Es wird $\binom{n-2}{n-1} = \binom{n-2}{-1} = 0$ gesetzt. Durch diese Verabredung wird in (10. 4) die Gleichung $\binom{n-2}{\nu} + \binom{n-2}{\nu-1} = \binom{n-1}{\nu}$ auch für $\nu = 0$ bzw. $\nu = n-2$ gewährleistet.

Nun ist nach dem Satz, daß das arithmetische Mittel größer oder gleich dem geometrischen ist,

$$(10.5)\quad \left\{\binom{n-2}{\nu}\frac{1}{A^{n-1}}+\binom{n-2}{\nu-1}\frac{1}{B^{n-1}}\right\}\geqq$$
$$\geqq \binom{n-1}{\nu}\left(\frac{1}{A^{n-1}}\right)^{\binom{n-2}{\nu}:\binom{n-1}{\nu}}\cdot\left(\frac{1}{B^{n-1}}\right)^{\binom{n-2}{\nu-1}:\binom{n-1}{\nu}}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist wegen

$$\binom{n-2}{\nu}:\binom{n-1}{\nu}=\frac{n-\nu-1}{n-1},\quad \binom{n-2}{\nu-1}:\binom{n-1}{\nu}=\frac{\nu}{n-1},$$

gleich

$$\binom{n-1}{\nu}\frac{1}{A^{n-\nu-1}B^{\nu}}.$$

Hiermit wird

$$\left(\frac{a}{A^{n-1}}+\frac{b}{B^{n-1}}\right)(a+b)^{n-2}\geqq\sum_{0}^{n-1}\binom{n-1}{\nu}\left(\frac{a}{A}\right)^{n-\nu-1}\left(\frac{b}{B}\right)^{\nu},$$

d. h.

$$\left(\frac{a}{A^{n-1}}+\frac{b}{B^{n-1}}\right)(a+b)^{n-2}\geqq\left(\frac{a}{A}+\frac{b}{B}\right)^{n-1}.$$

Die Ungleichung ist also bewiesen und zugleich auch die Behauptung $q_n<u_0$. Da in (10.5) das Gleichheitszeichen lediglich für $A=B$ eintreten kann, so kann hier für $n>2$ nur das Ungleichheitszeichen eintreten.

11. Zum vollständigen Beweis von $v_a>0$ bleibt noch folgende entscheidende Eigenschaft der Funktion $F_n(x)$ zu beweisen: *Es sei $y(x)$ diejenige Lösung der Differentialgleichung*

$$y''-Ky=0,$$

welche (in der xv-Ebene) durch die Punkte $P_1(0,-M)$ und $P_2(0,M)$ geht. Dann gilt in

$$0\leqq x\leqq\varrho$$

die Ungleichung

$$(11.1)\qquad F_n(x)\geqq y(x).$$

Zum Beweis von (11.1) setzen wir für den Augenblick $F_n(x)=F(x)$ und rechnen $F''(x)$ aus. Aus (7.4) folgt zuerst wegen $F'=Q'(u)\,\varphi(u)$

$$F'(x)=\frac{A}{\varphi}-KBG\,\psi+(n-2)\frac{B\varphi}{\psi^{n-1}}.$$

Durch nochmalige Differentiation nach x erhält man dann wegen $F''=(Q'\varphi)'\varphi$

$$F''(x)=AK\omega-KBG\varphi^2-KBG'\psi\varphi+(n-2)B\varphi\left(\frac{\varphi}{\psi^{n-1}}\right)'$$

oder

$$F''(x) = AK\omega - KBG + K^2BG\psi^2 - KB\psi\varphi\left\{\frac{1+K\omega^2}{\psi^{n-1}} - \frac{n-1}{\psi^{n-1}}\right\} - \\ - (n-2)B\varphi\left\{\frac{K\varphi}{\psi^{n-1}} + (n-1)\frac{\varphi^2}{\psi^n}\right\}.$$

Berücksichtigt man hier die Gleichung $F = A\omega - BG$, so wird nach einigen Umformungen

$$F''(x) = KF(x) - \frac{(n-1)(n-2)B\varphi^3(\omega)}{\psi^n(\omega)}.$$

Wir betrachten jetzt das Intervall I_2

$$\frac{\varrho}{2} < x < \varrho,$$

in dem $F(x)$ positiv und von Null verschieden ist. In diesem Intervall gilt wegen $B > 0$

$$F'' - KF < 0.$$

Kombiniert man diese Ungleichung mit der Gleichung

$$y'' - Ky = 0,$$

so wird wegen $y > 0$

$$yF'' - y''F < 0. \tag{11.2}$$

Ist nun die Behauptung $F(x) \geqq y(x)$ nicht wahr, so muß es mindestens einen Punkt x (und dann wegen der Stetigkeit unendlich viele x) mit $y(x) > F(x)$ geben. Es bezeichne q die untere Grenze dieser Punkte. Dann gilt offenbar $F(q) = y(q)$ und $F'(q) \leqq y'(q)$. Wird also $D = yF' - y'F$ gesetzt, so ist $D' < 0$, und es folgt durch Integration von $x = q$ bis $(x < \varrho)$:

$$D(x) < D(q) = y(q)\{F'(q) - y'(q)\} < 0. \tag{11.3}$$

Es gilt also in $q < x < \varrho$

$$y(x)F'(x) - y'(x)F(x) < 0, \tag{11.4}$$

oder noch

$$\frac{F'(x)}{F(x)} < \frac{y'(x)}{y(x)}.$$

Durch nochmalige Integration von $x = x$ bis $x = \varrho$ folgt wegen

$$\log F(\varrho) = \log y(\varrho) = \log M$$

$$\log F(x) > \log y(x),$$

oder

$$F(x) > y(x),$$

und zwar für jedes $q \leqq x < \varrho$. Dies steht aber im Widerspruch mit der Tatsache, daß es rechts von q Stellen x mit $y(x) \geqq F(x)$ gibt.

Es sei ϱ_n die Nullstelle von $F(x)$. Nach den schon bewiesenen Tatsachen gilt $\varrho_n < \frac{\varrho}{2}$. Da in $\varrho_n < x \leqq \frac{\varrho}{2}$ $F(x) > 0$ ist, während $y(x)$ negativ ausfällt, so gilt im Intervall

$$\varrho_n \leqq x < \varrho \tag{11.5}$$

ebenfalls die Ungleichung

$$F(x) > y(x).$$

Nun betrachten wir das Intervall

$$0 < x < \varrho_n. \tag{11.6}$$

Setzt man hier $F^* = -F > 0$ bzw. $y^* = -y > 0$, so gilt

$$F''^* - KF^* > 0 \quad \text{bzw.} \quad y''^* - Ky^* = 0.$$

Durch Kombination dieser beiden Beziehungen folgt diesmal

$$y^*F''^* - y''^*F^* > 0. \tag{11.7}$$

Es gebe nun in (11.6) einen Punkt x mit $F^*(x) > y^*(x)$. Da $F^*(x)$ vor $y^*(x)$ verschwindet und $F^*(0) = y^*(0) = M$ ist, so müssen diese x, für welche die Ungleichung gilt, eine obere Grenze kleiner als ϱ_n haben. Es sei $\bar{q}$ diese obere Grenze. Es muß dann $y^*(\bar{q}) = F^*(\bar{q})$ und $F'^*(q) \leqq y'^*(\bar{q}) < 0$ gelten. Setzt man $D^* = y^*F^{*\prime} - y'^*F^*$, so folgt mit Rücksicht auf (11.7) $D'^* > 0$ und daraus durch Integration von $x = x < \bar{q}$ bis $x = \bar{q}$:

$$D^*(x) < D^*(q) = y^*(\bar{q})\{F'^*(\bar{q}) - y'^*(q)\} \leqq 0. \tag{11.8}$$

In (11.8) gilt also $D^*(x) < 0$ oder noch

$$\frac{F'^*(x)}{F^*(x)} < \frac{y'^*(x)}{y^*(x)}.$$

Eine weitere Integration von $x = 0$ bis $x = x < \bar{q}$ liefert dann mit Rücksicht auf $F^*(0) = y^*(0) = M$, $F^*(x) < y^*(x)$ in Widerspruch zur Voraussetzung. Hiermit ist auch der vollständige Beweis von

$$F(x) \geqq y(x) \tag{11.9}$$

im Intervall $0 \leqq x \leqq \varrho_n$ erbracht worden. Wir könnten hier sogar im offenen Intervall das Gleichheitszeichen ausschließen. Da aber diese Tatsache ohne Einfluß auf das Resultat bleibt, so wird hier diese Verschärfung von (11.9) nicht weiter verfolgt werden. Wichtig ist nur die Tatsache, daß in $F(x) \geqq y(x)$ nicht überall das Gleichheitszeichen stehen kann. Daraus folgt leicht, daß dies auch in der aus (11.9) folgenden Ungleichung

$$\frac{F(x)}{\sqrt{M^2 - F^2(x)}} \geqq \frac{y(x)}{\sqrt{M^2 - y^2(x)}}$$

nicht der Fall sein kann, und infolgedessen ist

$$J = \int_a^b \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{M^2 - F^2(x)}} > \int_a^b \frac{y(x)\,dx}{\sqrt{M^2 - y^2(x)}} = 0.$$

Da nun $J = v_a$ ist, so folgt daraus für $n > 2$ die wichtige Ungleichung $v_a > 0$.

Die Existenz von γ_0.

12. Bevor wir zum Nachweis der Existenz einer Zahl γ_0 übergehen, die die Körper der Klasse I von denjenigen der Klasse II trennt, wollen wir die Ergebnisse der vorigen Nummern, was die Realität von $\sqrt{M^2 - F_n^2}$ anbetrifft, auf die Polynomen Q_γ, $Q_{\gamma,\bar\gamma}$ ausdehnen. Zuerst können wir leicht feststellen, daß diese Funktionen monoton wachsende Funktionen von u sind. Der Beweis kann genau wie früher geführt werden. Setzt man nämlich im allgemeinen

$$Q_{\mu\nu} = A\omega - BG$$

mit

$$(12.1)\quad A = \mu G(a) + \nu G(b), \quad B = \mu\omega(a) + \nu\,\omega(b), \quad (0 \leqq \mu, \nu \leqq 1),$$

so ist, wie man unmittelbar einsieht,

$$\omega Q'_{\mu\nu} = \frac{A\omega}{\varphi^3} - KB\omega^2 + (n-2)BG,$$

also $Q'_{\mu\nu} > 0$ für $K \leqq 0$. Genau wie vorher kann man für $K > 0$ die Ungleichung

$$Q'_{\mu\nu} > \frac{B}{\varphi^3\psi^{n-1}}\{K^{n-1}\psi^{n-1} - (n-1)K\psi^2 + (n-2)\} > 0$$

beweisen, was nur eine Wiederholung des Beweises von Nr. 7 erfordert. Da aber

$$Q_{\mu\nu}(a) = -\nu Q(a), \quad Q_{\mu\nu}(b) = \mu Q(b)$$

ist, so folgt daraus die Realität von $\sqrt{M^2 - Q_{\gamma\bar\gamma}^2}$, $\sqrt{M^2 - Q_\gamma^2}$, wenn man an Stelle von μ, ν, $\cos\gamma$, $\cos\bar\gamma$ bzw. $\cos\gamma$, 1 schreibt.

Nun betrachten wir zuerst die „Extremalen" der Klasse II. Diese werden durch die Gleichung

$$v + \int_u^b \frac{Q_\gamma\,du}{\varphi\sqrt{M^2 - Q_\gamma^2}} = 0$$

gegeben mit

$$Q_\gamma = \{G(a)\cos\gamma + G(b)\}\,\omega(u) - \{\omega(a)\cos\gamma + \omega(b)\}G(u).$$

Natürlich kommen nur solche Extremalkörper in Betracht, für die $v_a \geqq 0$ ist. Ist $\gamma = 0$, so liegt nach dem vorhin Gesagten der Punkt v_a oberhalb der u-Achse.

Für $\gamma = \frac{\pi}{2}$ wird

$$Q_{\frac{\pi}{2}} = G(b)\,\omega(u) - G(u)\,\omega(b) < 0$$

also $v_a < 0$. Es existiert infolgedessen zuerst mindestens ein Wert γ_0 mit

$$J(\gamma_0) = \int_a^b \frac{Q_{\gamma_0}\,du}{\varphi\sqrt{M^2 - Q_{\gamma_0}^2}} = 0.$$

Daß es nur einen solchen Wert gibt, folgt aus der Monotonie von $J(\gamma)$ unmittelbar. Q_γ ist nämlich wegen

$$\frac{\partial Q_\gamma}{\partial \gamma} = -\sin\gamma\,\{G(a)\,\omega(u) - G(u)\,\omega(a)\} < 0$$

eine mit wachsendem γ abnehmende Funktion von γ. Setzt man

$$J = J(\gamma) = \int_a^b \frac{Q_{\gamma_0}\,du}{\varphi\sqrt{M^2 - Q_\gamma^2}}, \tag{12.2}$$

so ist

$$J'(\gamma) = -\sin\gamma\,M^2 \int_a^b \frac{G(a)\,\omega(u) - G(u)\,\omega(a)}{\varphi\,(M^2 - Q_\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}\,du < 0. \tag{12.3}$$

In (12. 2) darf bekanntlich wegen der Struktur des Integranden unter dem Integralzeichen differenziert werden.

Damit der Leser alles beisammen haben möge, sei hier dieser Beweis wiederholt.

Zuerst gilt, wenn man

$$\Phi(u,\gamma) = \frac{Q_\gamma}{\varphi\sqrt{M^2 - Q_\gamma^2}},\quad \Phi_\gamma(u,\gamma) = \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} = -\sin\gamma\,\frac{G(a)\,\omega(u) - (a)\,G(u)}{\varphi\,(M^2 - Q_\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}$$

setzt,

$$\lim_{u = a+0} \Phi(u,\gamma)\sqrt{u-a} = C_1, \tag{12.4}$$

und wegen des Verschwindens des Zählers in $\Phi_\gamma(u,\gamma)$

$$\lim_{u \to a+0} \Phi_\gamma(u,\gamma)\sqrt{u-a} = C_2$$

mit gewissen, nur von a, b und γ abhängigen Konstanten C_1, C_2, welche noch im Intervall $0 \leqq \gamma \leqq \frac{\pi}{2}$ endlich bleiben. Nun wird nach dem ersten Mittelwertsatz

$$\frac{\Delta J}{\Delta \gamma} = \int_a^b \Phi_\gamma(u, \gamma + \vartheta\, \Delta\gamma)\, du = J^*(a, b) \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 1).$$

Wir zerlegen alsdann das Integral rechts in zwei Teile

$$J_1 = \int_a^{a+h} \Phi_\gamma du, \quad J_2 = \int_{a+h}^b \Phi_\gamma du$$

und versuchen durch die Wahl von h die Konvergenz zu erzwingen. Wegen der zweiten Bedingung (12. 3) kann $|J_1|$ allein durch die Wahl von h und unabhängig von $\Delta\gamma$ kleiner als ε gemacht werden. Wählt man noch $\Delta\gamma$ so, daß $\gamma_0 + \Delta\gamma$ im Intervall $0 \leqq \gamma \leqq \gamma_0 - \delta$ $(\delta > 0)$ liegt, so gilt im Intervall $a + h \leqq u \leqq b$

$$|\Phi_\gamma(u, \gamma + \vartheta\, \Delta\gamma) - \Phi_\gamma(u, \gamma)| \leqq \varepsilon$$

gleichmäßig in $\Delta\gamma$. Hiermit wird

$$\left| \frac{\Delta J}{\Delta \gamma} - \int_a^b \Phi_\gamma(u, \gamma)\, du \right| \leqq 3\, \varepsilon.$$

Läßt man jetzt $\varepsilon \to 0$ konvergieren, so folgt daraus

$$J'(\gamma) = \lim_{\Delta\gamma \to 0} \frac{\Delta J}{\Delta \gamma} = \int_a^b \Phi_\gamma(u, \gamma)\, du,$$

d. h. (12. 3).

13. Wir haben also die Existenz eines einzigen $\gamma_0 \left(0 < \gamma_0 < \frac{\pi}{2}\right)$ nachgewiesen, das folgende Eigenschaft hat:

Für jedes γ mit

$$0 \leqq \gamma < \gamma_0 \tag{13. 1}$$

berührt die „Extremale" K_1

$$v - \int_u^b \frac{Q_\gamma\, dx}{\varphi \sqrt{M^2 - Q_\gamma^2}} = 0 \tag{13. 2}$$

die Gerade $u = a$ in einem Punkt oberhalb der u-Achse. Für $\gamma = \gamma_0$ geht dieselbe „Extremale" durch den Punkt $u = a$, $v = 0$. Durch Spiegelung von

K_1 an der u-Achse erhält man eine geschlossene Kurve $K\gamma$, die von den durch Spiegelung auseinander hervorgehenden Kurven K_1, K_2 und der Strecke

$$u = a, \quad -v_a \leqq v \leqq v_a, \quad \left(v_a = \int_a^b \frac{Q_\gamma \, du}{\varphi \sqrt{M^2 - Q_\gamma^2}}\right)$$

begrenzt ist. Durch Rotation dieser Kurven nach der vorhin erklärten Weise entstehen dann die Körper der Klasse II. Darauf werden wir noch später zurückkommen.

Für den Augenblick wenden wir uns der Konstruktion der „Extremalen" von der Klasse I zu. Setzt man

$$Q_{\gamma\bar{\gamma}} = A_{\gamma\bar{\gamma}}\,\omega - B_{\gamma\bar{\gamma}}\,G$$

mit

$$A_{\gamma\bar{\gamma}} = G(a)\cos\bar{\gamma} + G(b)\cos\gamma, \quad B_{\gamma\bar{\gamma}} = \omega(a)\cos\bar{\gamma} + \omega(b)\cos\gamma,$$

so ist die Realität von $\sqrt{M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2}$ $(M = G(a)\,\omega(b) - G(b)\,\omega(a))$ bereits nachgewiesen. Es bleibt nur $\bar{\gamma}$ so zu bestimmen, daß das Integral

$$J(\gamma, \bar{\gamma}) = v_a = \int_a^b \frac{Q_{\gamma\bar{\gamma}}}{\varphi \sqrt{M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2}}\, du = 0 \tag{13.3}$$

bleibt.

Wir beweisen: *Für jedes γ, das der Ungleichung*

$$\gamma_0 < \bar{\gamma} < \frac{\pi}{2} \text{ [16]} \tag{13.4}$$

genügt, ist die Gleichung (13.3) *eindeutig lösbar.* Mit anderen Worten: *Für jedes γ aus dem Intervall* (13.1) *gibt es ein $\bar{\gamma}$ (und nur eines), das der Gleichung* (13.2) *genügt.* Zum Beweis dieser Tatsache verfahren wir folgendermaßen: Setzt man in (13.2) $\bar{\gamma} = 0$ ein, und macht die Voraussetzung, γ liege im Intervall (13.4), so ist nach dem vorherigen

$$J(\gamma, 0) < 0.$$

Dagegen ist für $\bar{\gamma} = \frac{\pi}{2}$ wegen

$$Q_{\gamma\,\frac{\pi}{2}} = \cos\gamma\,\{G(a)\,\omega(u) - G(u)\,\omega(a)\} > 0$$

$$J\left(\gamma, \frac{\pi}{2}\right) = \int_a^b \frac{Q_{\gamma,\frac{\pi}{2}}}{\varphi \sqrt{M^2 - Q^2_{\gamma,\frac{\pi}{2}}}}\, du > 0.$$

[16]) Für $\gamma = \gamma_0$ ist $\bar{\gamma} = 0$. Man kann deswegen das Gleichheitszeichen links ausschließen.

Es existiert also mindestens ein γ, so daß (13. 2) erfüllt ist. Daß nur ein einziges $\bar{\gamma}$ existiert, folgt leicht aus der Ableitung von $J(\gamma, \bar{\gamma})$ nach $\bar{\gamma}$:

$$\frac{\partial J(\gamma,\bar{\gamma})}{\partial \bar{\gamma}} = \sin\bar{\gamma} \int_a^b \frac{\{G(u)\,\omega(b) - G(b)\,\omega(u)\}}{\varphi\,(M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2)^{\frac{3}{2}}}\,du > 0.$$

Hier kann unbedenklich unter dem Integralzeichen differenziert werden, da die Grenzen $\bar{\gamma} = 0$, $\bar{\gamma} = \frac{\pi}{2}$ ausgeschlossen sind, und somit der Nenner von (13. 3) in $a \leqq u \leqq b$ von Null verschieden bleibt.

Übrigens kann man aus (13. 3) sehr leicht schließen, daß $\bar{\gamma}$ eine stetige und stetig differenzierbare Funktion von γ ist, falls γ im Intervall (13. 4) liegt und daß dort $\frac{d\bar{\gamma}}{d\gamma} > 0$. Hat man nun γ_0 konstruiert, so kann man eine Extremale K_1 konstruieren, die durch $(a, 0)$, $(b, 0)$ geht. Durch Spiegelung von K_1 an der u-Achse erhält man dann eine geschlossene Extremale $K_{\gamma\bar{\gamma}}$.

Somit ist zugleich die Konstruktion der Extremalen von der Klasse I durchgeführt. Zu dieser Konstruktion sei noch folgendes gesagt: Genau wie vorhin kann gezeigt werden, daß die vorhin bewiesene Monotonie der Integrale

$$\int_a^b \frac{Q_{\gamma\bar{\gamma}}}{\varphi\sqrt{M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2}}\,du, \qquad \int_a^b \frac{Q_\gamma\,du}{\varphi\sqrt{M^2 - Q_\gamma^2}}$$

auch dann gilt, wenn an Stelle von a ein fester Wert u aus dem Intervall $a \leqq u \leqq b$ steht. Hiermit wird zugleich gezeigt, daß die Kurven einer bzw. zweier verschiedener Klassen sich nicht schneiden und sonst auch keine Punkte gemeinsam haben, außer höchstens die Randpunkte $u = a$, $v = 0$ bzw. $u = b$, $v = 0$.

14. Wir fassen die Ergebnisse dieser Nummer für $n \geqq 3$ nochmals zusammen:

Man kann im Streifen

$$a \leqq u \leqq b \quad (0 < a < b) \tag{14. 1}$$

des Fundamentalbereiches G_0 der vier hier betrachteten Geometrien drei Klassen von Kurven konstruieren.

Die Kurven aller Klassen sind einfach geschlossen (Fig. 2) symmetrisch in bezug auf die u-Achse und genügen der Differentialgleichung

$$\varphi\frac{dv}{du} \pm \frac{k_g\,\Phi(u)}{\sqrt{1 - k_g\,\Phi^2(u)}} = 0 \tag{14. 2}$$

oder

$$\varphi\frac{dv}{du} \pm \frac{Q_g(u)}{\sqrt{M^2 - Q_g^2(u)}} = 0, \tag{14. 3}$$

wobei das Pluszeichen für die obere Hälfte der betreffenden Kurve zu nehmen ist. Ferner ist $Q_\varphi = Q_{\gamma\bar{\gamma}}$ für die Klasse I, $Q_\varphi = Q_\gamma$ für die Klasse II und $Q_\varphi = Q$ für die Klasse III.

Die ausführlichen Darstellungen von Q, Q_γ, $Q_{\gamma\bar{\gamma}}$ sind früher angegeben worden. Die Kurven der Klasse I und II werden durch die Kurve $C\gamma_0$ getrennt, die man als zu beiden Klassen zugehörige Kurven betrachten kann.

Die äußere Normale von C_{γ_0} bildet in $u = b$, $v = 0$ mit der positiven u-Achse den Winkel γ_0, wie dies in der Fig. 2 gezeigt wird und berührt die Gerade $u = a$ im Punkte $u = a$, $v = 0$.

Jede Kurve der Klasse I bildet mit der u-Achse einen größeren Winkel als γ_0, und jede Kurve von der Klasse II einen kleineren Winkel als γ_0. Die Kurven von der Klasse II und III werden durch die Kurve C_0 getrennt, welche die Gerade $u = a$ in den Punkten $u = a$, $v = v_a$ (bzw. $v = -v_a$) und die Gerade $u = b$, $v = 0$ berührt. Die Kurven von der Klasse III gehen dann aus C_0 hervor, indem man ihre beiden Hälften wie zwei Teile eines Teleskops in der $\pm v$-Richtung auseinanderzieht.

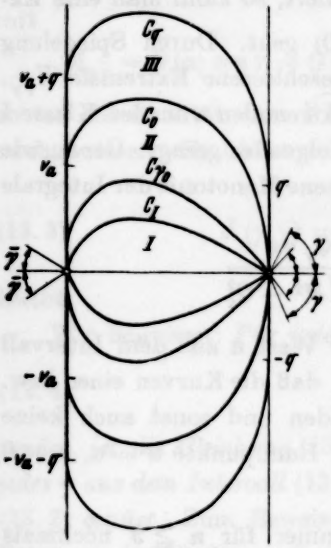

Fig. 2.

Für $n = 2$ ist γ_0 dauernd Null, die Klassen I und II bilden eine einzige Klasse. Wir werden in diesem Falle von Kurven der Klassen I und III sprechen. Diese Betrachtungen gelten für $K \leqq 0$ ohne irgendwelche Einschränkung. Für $K > 0$ müssen diese Betrachtungen noch durch den Nachweis ergänzt werden, daß alle Kurven der Klassen I und II bis zur Kurve C_0 im Fundamentalbereich G_0 liegen. Inwieweit es Kurven von der Klasse III gibt, wird von dem Maximum von v der Kurve C_0 abhängen. Natürlich sind diese Betrachtungen nur dann notwendig, wenn eine einfache Bedeckung des betreffenden Raumes durch die Extremalkörper verlangt wird.

Nach den früheren Entwicklungen genügt es nun nachzuweisen, daß das Integral

$$v_{\max} = J = \int_{u^*}^{b} \frac{Q\,du}{\varphi\sqrt{M^2 - Q^2}}, \tag{14.4}$$

wobei u^* durch die Gleichung

$$\psi^{n-1}(u^*) = \varrho^{n-1} = \frac{\omega(a)+\omega(b)}{G(a)+G(b)} = \frac{B}{A} \tag{14.5}$$

bestimmt wird, innerhalb des Fundamentalbereiches G_0 von $ds^2 = du^2 + \varphi^2(u)\,dv^2$ liegt, da dieses das Maximum von v auf C_0 darstellt. Zum Beweis nehmen wir wieder der Einfachheit halber $K = 1$, was keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet. ψ, φ werden also im folgenden gewöhnliche trigonometrische Funktionen darstellen. Nun ist

$$J = \int_{u^*}^{b} \frac{\frac{\psi}{\varphi^2}\left\{A - \frac{B}{\psi^{n-1}}\right\} du}{\sqrt{M^2 - \frac{\psi^2}{\varphi^2}\left(A - \frac{B}{\psi^{n-1}}\right)^2}}.$$

Führt man an Stelle u die Veränderliche $Q(u)$ ein und beachtet man, daß

$$\frac{dQ}{du} = \frac{1}{\varphi^2}\left\{A - \frac{B}{\psi^{n-1}}\right\} + (n-1)\frac{B}{\psi^n} \geqq \frac{\psi}{\varphi^2}\left\{A - \frac{B}{\psi^{n-1}}\right\}$$

st, so erhält man, wenn man noch für $Q(u)$ λ schreibt,

$$J < \int_0^M \frac{d\lambda}{\sqrt{M^2 - \lambda^2}} < \frac{\pi}{2}, \tag{14.8}$$

womit zugleich bewiesen wird, daß der Punkt $(u^*, v_{\max})$ noch im Fundamentalbereich liegt. Ist $K > 0$ und beliebig, so findet man an Stelle von (14. 8)

$$\eta_0 = v_{\max} < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}.$$

Somit ist für den elliptischen wie für den sphärischen Fall gezeigt, daß alle Kurven der Klassen I und II im Fundamentalbereich G_0 liegen. Außerdem liegen für $K > 0$ wegen (6. 41) auch diejenigen Kurven der Klassen III in G_0, für welche

$$q + 2\eta_0 < \frac{\pi}{2\sqrt{K}} \tag{14.9}$$

gilt.

Kapitel III.

Die Grundlagen der Untersuchung. Der Gaußsche Divergenzsatz für die regulären Körper von Erhard Schmidt.

Vorbereitende Tatsachen und Anfang des Beweises des Schmidtschen Satzes.

15. Der Beweis der Extremaleigenschaft der durch Rotation der Kurven der Klassen I, II, III entstehenden Körper $\mathfrak{K}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{K}_{\mathrm{II}}$ und $\mathfrak{K}_{\mathrm{III}}$ wird auf Grund folgender Gleichung geführt werden:

$$(n-1)(V - V_\sigma) = \varrho_\sigma(O - O_\sigma) - 2\,\varrho_\sigma R(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_\sigma), \tag{15.1}$$

wobei g eine der Zahlen I, II, III (oder entsprechend gleich $\gamma\bar{\gamma}$, γ oder q ist) und V_g bzw. O_g jedesmal das Volumen bzw. die Oberfläche des betreffenden „Extremalkörpers" $\mathfrak{K}_g$ bedeuten.

Ferner ist $R(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_g)$ ein positives Restglied, das dann und nur dann verschwindet, wenn $\mathfrak{K}$ bis auf Parallelverschiebung mit $\mathfrak{K}_g$ übereinstimmt. Für die Größe ϱ_g gilt:

$$\varrho_g = \frac{G(a)\,\omega(b) - G(b)\,\omega(a)}{G(a)\cos\bar{\gamma} + G(b)\cos\gamma} \quad \text{für} \quad \mathfrak{K}_{\mathrm{I}} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{K}_{\gamma\bar{\gamma}},$$

$$\varrho_g = \frac{G(a)\,\omega(b) - G(b)\,\omega(a)}{G(a) + G(b)\cos\gamma} \quad \text{für} \quad \mathfrak{K}_{\mathrm{II}} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{K}_{\gamma}$$

und

$$\varrho_g = \frac{G(a)\,\omega(b) - G(b)\,\omega(a)}{G(a) + G(b)} \quad \text{für} \quad \mathfrak{K}_{\mathrm{III}} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{K}_{q}.$$

Bevor wir zum Beweis von (15. 1) übergehen, erwähnen wir kurz einige Formeln, welche den Inhalt bzw. die Oberfläche eines Rotationskörpers in einem n-dimensionalen nichteuklidischen Raum bestimmen[17]).

Als Definition eines Rotationskörpers $\mathfrak{K}$ wird folgende Definition zugrunde gelegt: $\mathfrak{K}$ soll „Rotationskörper" heißen, falls er bei allen Drehungen des betreffenden Raumes, die eine nichteuklidische Gerade g fest lassen, in sich übergeht.

Wird der betreffende Raum mittels Weierstrassscher homogener Koordination $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ durch[18])

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + \frac{x_{n+1}^2}{K} = \frac{1}{K}$$

dargestellt, so wird eine Rotation im allgemeinen durch eine lineare Transformation

$$x_i' = \sum_1^{n+1} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

wiedergegeben, welche die Fundamentalform (3. 3) und eine nichteuklidische Gerade invariant lassen. Im Falle eines n-dimensionalen sphärischen Raumes handelt es sich hierbei um Drehungen der Kugel

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = \frac{1}{K} \qquad (K > 0),$$

die einen Großkreis invariant lassen[19]).

---

[17]) Nachfolgende Formeln wurden in dieser Form zum erstenmal in meiner in Fußnote 2 zitierten Abhandlung bewiesen.

[18]) Für den sphärischen Raum muß $x_{n+1} = \sqrt{K}\, x'_{n+1}$ gesetzt werden.

[19]) Ausführliches l. c., S. 709ff.

Nun setzen wir die Transformationsformeln (3. 7) zugrunde und nehmen an, daß die Rotationsachse mit der ϑ_n-Parameterlinie übereinstimmt.

Zur Erzeugung von $\mathfrak{R}$ durch Rotation einer Meridiankurve C betrachten wir den Raum r, x_n, x_{n+1} mit

$$r = \sum_1^{n-1} x_\nu^2,$$

und setzen noch $r = y_1$, $x_n = y_2$ und $x_{n+1} = y_3$. Wir setzen (mit der üblichen Änderung von y_3 im Falle eines sphärischen Raumes)

$$\begin{aligned} y_1 &= \psi(u) \\ y_2 &= \varphi(u)\,\psi(v) \\ y_3 &= \varphi(u)\,\varphi(v) \end{aligned} \tag{15. 2}$$

und betrachten in dem Fundamentalbereich dieses Raumes eine dort geschlossene, in

$$0 \leqq a \leqq u \leqq b$$

einbeschriebene Kurve C^* mit den Parametergleichungen[20])

$$u = u(t), \quad v = v(t) \quad (t_0 \leqq t \leqq t_1).$$

Dann lautet die Gleichung der Oberfläche O des durch die Rotation von C um die ϑ_n-Parameterlinie erzeugten Körpers

$$\prod_1^{n-1} \varphi(\vartheta_i) = \varphi\big(u(t)\big), \quad \vartheta_n = v(t).$$

16. Bedeutet nun s die Bogenlänge von C in dem betreffenden Raum[21]), so zeigt eine Rechnung, die mit der in meiner vorhin erwähnten Abhandlung durchaus analog ist, daß die Oberfläche bzw. das Volumen von $\mathfrak{R}$ durch dieselben Formeln

$$O = (n-1)\,W_{n-1} \int_C \psi^{n-2}(u)\,ds \tag{16. 1}$$

$$V = W_{n-1} \int_C \psi^{n-1}(u)\,\frac{dv}{ds}\,ds \tag{16. 2}$$

gegeben werden[21]). W_{n-1} bedeutet hier den Inhalt der $(n-1)$-dimensionalen Einheitskugel. Die Integration wird hier in dem Bereich längs der geschlossenen Kurve C in dem üblichen positiven Sinne erstreckt werden.

---

[20]) u, v werden als periodische Funktionen von t mit der Periode $t_1 - t_0$ vorausgesetzt. Ferner wird angenommen, daß u, v bis auf endlich viele Werte von t stetig und stetig differenzierbar sind. Diese Annahmen können unter Zugrundelegung des LEBESGUEschen Integrals erheblich gelockert werden.

[21]) Es ist $ds^2 = du^2 + \varphi^2(u)\,dv^2$.

Da C geschlossen ist, so kann man an Stelle von (7. 14) auch die Formeln

$$O = (n-1)\, W_{n-1} \int_C \varphi^{n-2}(u)\, ds$$

(16, 3)

$$V = W_{n-1} \int_C \{\varphi^{n-1}(u) + A\} \frac{dv}{ds}\, ds$$

mit einem konstanten A gebrauchen.

Wir gehen nun dazu über, die Richtungskosinus $\cos(\bar{n}, \vartheta_i)$ der äußeren Normalen $\bar{n}$ eines Körpers $\mathfrak{K}_g$ zu bestimmen. Wir werden zeigen:

Wird

$$\Phi_g(u) = \omega(u) + A_g G(u)$$

gesetzt, so gilt

(16. 4) $$g_i \cos(\bar{n}, \vartheta_i) = k_g\, \omega(\vartheta_i) + A_g\, k_g \frac{\omega(\vartheta_i)}{\varphi^{n-1}(u)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Zuerst gilt für die Komponenten der Normalen $\mathfrak{x}$ der Kurve C in der u, v-Ebene

$$\cos(\mathfrak{x}, u) = \varphi \frac{dv}{ds} = k_g \Phi_g$$

$$\cos(\mathfrak{x}, v) = -\frac{du}{ds} = \pm \sqrt{1 - k_g^2 \Phi_g^2}.$$

Durch Rotation wird der Vektor $\bar{n}$ in eine neue Lage gebracht, und zwar so, daß die Komponenten $\cos(\bar{n}, \vartheta_1), \ldots, \cos(\bar{n}, \vartheta_{n-1})$ des so entstandenen Rotationskörpers proportional zu den $n-1$ ersten Komponenten der Normale $\mathfrak{y}$ der Kugel

(16. 5) $$\varphi(\vartheta_1)\, \varphi(\vartheta_2) \ldots \varphi(\vartheta_{n-1}) = \varphi(u)$$

werden. Ferner wird noch

$$\cos^2(\bar{n}, \vartheta_1) + \cdots + \cos^2(\bar{n}, \vartheta_{n-1}) = k_g^2 \Phi_g^2.$$

Da nun für die Richtungskosinus $\cos(\mathfrak{y}, \vartheta_i)$ der Normalen von (16. 5) für $i = 1, 2, \ldots, n-1$, wie dies in meinen vorhin zitierten Arbeiten ausführlicher gezeigt worden ist, die Gleichungen

$$g_i \cos(\mathfrak{y}, \vartheta_i) = \frac{\omega(\vartheta_i)}{\omega(u)}$$

gelten, so folgt daraus (16. 4). Für $\cos(\bar{n}, \vartheta_n)$ findet man wegen $\cos(\bar{n}, \vartheta_n) = \cos(\mathfrak{x}, v)$,

$$\cos(\bar{n}, \vartheta_n) = \pm \sqrt{1 - k_g^2 \Phi_g^2}.$$

Dabei ist für den oberen Teil der Extremalfläche ($v \geqq 0$) das Pluszeichen zu nehmen und für den unteren Teil das Minuszeichen.

Ein fundamentaler Hilfssatz. Die regulären Körper von Erhard Schmidt.

17. Der nächste Schritt zur Begründung der isoperimetrischen Ungleichung (15. 1) besteht in dem Beweis folgenden Hilfssatzes: *Ist $\mathfrak{K}$ ein im Fundamentalbereich liegender Körper, so ist der Ausdruck*

$$J = \sum_{i=1}^{n-1} \int \frac{\omega(\vartheta_i)}{\psi^{n-1}(u)} \frac{\cos(n, \vartheta_i)}{g_i} dO \tag{17.1}$$

gleich Null.

Die Integrale sind hier über die Gesamtoberfläche O von $\mathfrak{K}$ zu erstrecken. Ferner bedeutet dO das Oberflächenelement von $\mathfrak{K}$. Zum Beweis dieses wichtigen Satzes werden wir die allgemeine Form des GAUSSschen Divergenzsatzes

$$\int_{\mathfrak{K}} \operatorname{div} \mathfrak{A}\, d\tau = \sum_{i=1}^{n} \int \Phi_i a^i\, dO \tag{17.2}$$

benutzen[22]). Hierin sind a^i die kontravarianten Komponenten eines Vektors $\mathfrak{A}$ und der Ausdruck für div $\mathfrak{A}$ wird durch die Formel

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{1}^{n} \frac{\partial \sqrt{g}\, a^i}{\partial \vartheta_i}$$

gegeben. Dabei bedeutet g die Determinante der Koeffizienten g_{ik} der Metrik

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} d\vartheta^i d\vartheta^k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ferner sind Φ_i die kovarianten Komponenten der äußeren Normalen n von $\mathfrak{K}$, die später ausführlicher erklärt werden.

18. Bevor wir zur rein technischen Anwendung des GAUSSschen Satzes (17. 2) übergehen, wollen wir die hier eintretenden Begriffe etwas genauer definieren. Wie in der Einleitung erwähnt wurde, sind die in Betracht kommenden Körper nicht beliebig, sondern weisen gewisse Regularitätseigenschaften auf, besonders was die Struktur ihres Randes betrifft. Aus diesem

---

[22]) Einen Beweis dieses Satzes kann man bei DUSCHECK-MAYER, Lehrbuch der Differentialgeometrie II, S. 240, Teubner, 1930, nachlesen. Beweise des GAUSSschen Divergenzsatzes gibt es mehrere. Die meisten nehmen an, daß der betreffende Körper so beschaffen ist, daß jede Gerade, die den Körper trifft, seine Oberfläche in endlich vielen Punkten schneidet. Einen Beweis, der für allgemeine Mannigfaltigkeiten gilt und keine solche einschränkenden Voraussetzungen macht, gab BROUWER (Opmerking over meervoudige Integralen. Koninklijke Akad. van Wetenschappen be Amsterdam, Bd. 28, 1919), und zwar durch Approximation der Mannigfaltigkeit mittels Simplexnetzen.

Grunde wollen wir einige Seiten dem Studium der hier in Frage kommenden Körper, der regulären Körper von ERHARD SCHMIDT, widmen[23]).

Nach dem Vorbild von ERHARD SCHMIDT[24]) werden wir eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ als regulären Körper bezeichnen, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:

1) $\mathfrak{M}$ ist eine beschränkte, in G_0 liegende, abgeschlossene Punktmenge.
2) Innere Punkte und Randpunkte werden wie gewöhnlich in bezug auf G_0 definiert.
3) Die Menge der inneren Punkte ist nicht leer.
4) Jeder Randpunkt ist Häufungspunkt von inneren Punkten.
5) Die inneren Punkte hängen in dem üblichen Sinne zusammen.
6) Der Rand von $\mathfrak{M}$ besteht aus endlich vielen (gleich zu erklärenden Mannigfaltigkeiten, von denen je zwei nur Punkte gemeinsam haben können, die hier bei den Mannigfaltigkeiten Randpunkte sind.

Die wichtigste Einschränkung ist hier zweifellos die Bedingung 6), welche die Struktur des Randes betrifft.

Zu ihrem Verständnis ist der ebenfalls von ERHARD SCHMIDT eingeführte Begriff des k-dimensionalen Grundgebildes notwendig[25]).

19. Ein k-dimensionales Grundgebilde ($1 \leqq k \leq n-1$) ist in G_0 durch die Gleichungen

$$\vartheta_\nu = \vartheta_\nu(t_1, \ldots, t_k) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{19.1}$$

$$a_\lambda' \leqq t_\lambda \leqq a_\lambda'' \qquad (a_\lambda' < a_\lambda'',\ \lambda = 1, 2, \ldots, k) \tag{19.2}$$

definiert. Die Funktionen $\vartheta_\nu(t_1, \ldots, t_k)$ werden als zweimal stetig differenzierbar angenommen und die Matrix $\left\{\frac{\partial \vartheta_\nu}{\partial t_\lambda}\right\}$ wird in jedem Punkt des Definitions-

---

[23]) In seiner in der Fußnote 3 zitierten Arbeit zuerst im euklidischen Raum eingeführt. In einer neuen Arbeit (Mathem. Zeitschr. **49**, 1943, S. 1—109, insbesondere S. 30), deren Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im hyperbolischen und sphärischen Raum jeder Dimensionszahl, deren Kenntnis Verf. vor der Publikation erhalten hat, ist auch die Übertragung auf den hyperbolischen bzw. sphärischen Raum durchgeführt. Die hier angegebene Darstellung schließt sich eng an die euklidische SCHMIDTsche Darstellung an und verfolgt den Zweck, dem Leser eine Umschreibung der SCHMIDTschen Bezeichnungen in die unseren und die Durchführung einiger abweichender Punkte zu ersparen. Von diesen soll hier nur betont werden, daß z. B. der Beweis des GAUSSschen Divergenzsatzes anders als bei E. SCHMIDT durchgeführt wird.

[24]) l. c., Fußnote 3, S. 735. Vgl. auch einige Vereinfachungen der ganzen Darstellung in der zuletzt in Fußnote 23 zitierten Arbeit S. 30. Diese Arbeiten werden im folgenden mit SCHMIDT I bzw. SCHMIDT II bezeichnet werden.

[25]) l. c., Fußnote 3, S. 717. In seiner neuen Arbeit hat E. SCHMIDT das k-dimensionale Grundgebilde der zweifach glatten Mannigfaltigkeit untergeordnet und hiermit einige Vereinfachungen der Darstellung erzielt (SCHMIDT II, S. 31).

bereiches (19. 2) vom Range k vorausgesetzt. Ferner wird auch angenommen, daß die durch die obigen Funktionen vermittelte Abbildung eindeutig umkehrbar und somit auch die Umkehrung stetig ist. Ein Punkt $P(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$ ist ein innerer Punkt des Grundgebildes, sobald das Urbild $T(t_1, \ldots, t_k)$ ein innerer Punkt von (19. 2) ist.

Mit Hilfe des Begriffes des Grundgebildes definieren wir jetzt eine Klasse von nicht notwendig zusammenhängenden Punktmengen $\mathfrak{M}_k$, welche folgenden Forderungen genügen:

I. $\mathfrak{M}_k$ liegt in G_0 und ist eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge.

II. Zu jedem Punkt von $\mathfrak{M}_k$ läßt sich ein Grundgebilde G_k bestimmen, dessen Inneres diesen Punkt einschließlich einer gewissen Umgebung des Punktes auf $\mathfrak{M}_k$ bedeckt. Falls das Grundgebilde sich so wählen läßt, daß es ganz von $\mathfrak{M}_k$ bedeckt wird, heißt der betreffende Punkt ein innerer Punkt. Sonst bezeichnet man ihn als Randpunkt.

III. $\mathfrak{M}_k$ besitzt innere Punkte.

IV. Jeder Randpunkt ist Häufungspunkt von inneren Punkten. Nach Definition dieser Punktmengen ist die Definition der k-dimensionalen Mannigfaltigkeit folgendermaßen induktiv zu führen[26]):

1. Zunächst ist eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit ein Punkt.
2. Eine eindimensionale reguläre Mannigfaltigkeit ist eine zusammenhängende Punktmenge $\mathfrak{M}_1$, welche den vorhin aufgestellten Bedingungen für $k = 1$ genügt.
3. Allgemein ist eine k-dimensionale reguläre Mannigfaltigkeit ($2 \leqq k \leqq n-1$) als eine zusammenhängende Punktmenge $\mathfrak{M}_1$ definiert, welche den Forderungen I bis IV für $k = k$ und noch folgender Bedingung über den Rand genügt: Falls $\mathfrak{M}_k$ überhaupt Randpunkte besitzt, bildet die Menge dieser Randpunkte endlich viele reguläre $(k-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten, von denen je zwei nur Punkte gemeinsam haben, die auf beiden Mannigfaltigkeiten Randpunkte sind.

Nach Definition der k-dimensionalen regulären Mannigfaltigkeit ist auch die Bedingung 6) der Definition eines regulären Körpers erledigt und somit dieser selbst vollkommen definiert. Nach dieser Definition ist der Begriff des regulären Körpers eine Invariante gegenüber allen eindeutigen zweimal stetig differenzierbaren Abbildungen des T-Raumes.

Es darf hier nochmals daran erinnert werden, daß alle diese Betrachtungen sich in G_0 abspielen. Sie beziehen sich also immer auf das euklidische Abbild des Körpers $\mathfrak{K}$. Da bis jetzt alle Betrachtungen topologischer Natur

---

[26]) Schmidt I, S. 723.

sind, so ist bis auf weiteres alles in Ordnung, solange das Oberflächenelement noch nicht definiert ist. Dieses wird in Analogie mit dem euklidischen Fall eingeführt werden.

20. Nun kommen wir zu der wichtigsten Eigenschaft der regulären Körper, welche die SCHMIDTsche Annahme über die zweimalige Differenzierbarkeit ins rechte Licht setzt.

Wir betrachten für den Augenblick G_0 als einen Raum mit euklidischer Struktur, d. h. mit euklidischer Metrik und mit der üblichen Vorstellung der Geraden, Ebenen und Hyperebenen[27]) in ihm. Dann lautet das SCHMIDTsche Hauptergebnis: Es gibt ein rechtwinkliges Koordinatensystem $O\vartheta'_1 \dots \vartheta'_n$, das aus dem ursprünglichen System $O\vartheta_1 \dots \vartheta_n$ durch eine infinitesimale Drehung hervorgeht, mit folgender Eigenschaft: Für jede Koordinatenachse $O\vartheta'_\nu$ gibt es nur endlich viele Hyperebenen[28]) $\vartheta_\nu = \text{konst.}$, welche $\mathfrak{K}$ (im euklidischen Sinne) berühren.

Wir können hier den Beweis dieses SCHMIDTschen Satzes nicht wiedergeben, sondern wir verweisen auf die Originalarbeit von ERHARD SCHMIDT. Hier begnügen wir uns, kurz auf die Folgerungen dieses wichtigen Satzes hinzuweisen.

21. Wir fassen zuerst eine bestimmte reguläre Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}^{(i)}_{n-1}$ aus den endlich vielen solchen, aus denen die Oberfläche O unseres Körpers $\mathfrak{K}$ voraussetzungsgemäß besteht, ins Auge. Dann kann man beweisen[29]):

Es gibt ein $\eta > 0$, so daß ein beliebiges n-dimensionales achsenparalleles[30]), berührungsfremdes Parallelotop π [d. h. ein Parallelotop, dessen Flächenseiten den Körper im euklidischen Sinne nicht berühren[31])], dessen Kantenlänge kleiner als η ist, die Eigenschaft hat, daß der Durchschnitt von $\mathfrak{R}^{(i)}_{n+1}$ mit π durch eine Gleichung der Form

$$\vartheta'_{\nu_n} = f_{\nu_n}(\vartheta'_{\nu_1}, \dots, \vartheta_{\nu_{n-1}}), \tag{21.1}$$

wobei $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \dots, n$ darstellt (welche von der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}^{(i)}_{n-1}$[32]) und dem Parallelotop π abhängt), gegeben

---

[27]) Hier interessieren wir uns natürlich nur für diejenigen Teile der (unendlich gedachten) Hyperebenen, welche in G_0 liegen.

[28]) SCHMIDT I, S. 737. Der Satz wird zuerst für eine einzige Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_k$ bewiesen. Da die Oberfläche O von $\mathfrak{K}$ aus endlich vielen solchen Mannigfaltigkeiten besteht, so gilt offenbar dieser Satz auch für O.

[29]) SCHMIDT I, S. 747.

[30]) Achsenparalleles Parallelotop, ein Parallelotop, dessen Kanten parallel zu den Koordinatenachsen $O\vartheta'_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) sind.

[31]) Vgl. SCHMIDT I, S. 745.

[32]) Die Abhängigkeit der betreffenden Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}^{(i)}$ von i wird in der Zukunft nicht unbedingt hervorgehoben.

wird. Dabei durchlaufen $\vartheta'_{\nu_1}, \ldots, \vartheta'_{\nu_{n-1}}$ das Parallelotop π' Projektion von π parallel zur ϑ'_{ν_n}-Achse.

Nun zerlegen wir den *ganzen* euklidischen ϑ_i-Raum durch endlich viele zu den Koordinatenachsen senkrechte $(n-1)$-dimensionale Ebenen in berührungsfreie Parallelotope, so daß keine von ihnen irgendwelche der regulären Mannigfaltigkeiten berührt. Dabei nehmen wir die Kantenlängen $\delta\,(\delta < \eta)$ der Würfel des so entstehenden Netzes $\mathfrak{N}_\delta$ so klein, daß jedes Parallelotop π des Netzes, welches überhaupt Punkte des Körpers $\mathfrak{K}$ enthält, ganz in G_0 liegt. Diese Parallelotope sind endlich viele und können numeriert werden.

Nun kann man jeden Teil der endlich vielen Mannigfaltigkeiten durch eine Gleichung von der Form (21. 1) darstellen. Da die ϑ_ν aus den ϑ'_ν durch eine lineare Transformation hervorgehen, so werden die ϑ_ν durch Gleichungen

$$\vartheta_{\nu_n} = F_{\nu_n}(\vartheta'_{\nu_1}, \ldots, \vartheta'_{\nu_{n-1}}) \tag{21. 2}$$

gegeben, wobei die $\vartheta'_{\nu_1}, \ldots, \vartheta'_{\nu_{n-1}}$ vom Parallelotop π_τ $(\tau = 1, \ldots, q)$ abhängen und in dessen Projektion π'_τ längs der ϑ'_{ν_n}-Achse sie variieren. Wir werden im folgenden an Stelle von ϑ'_{ν_i} t_{ν_i} schreiben, also an Stelle (21. 2) die Gleichungen

$$\vartheta_{\nu_n} = F_{\nu_n}(t_{\nu_1}, \ldots, t_{\nu_{n-1}}) \tag{21. 3}$$

benutzen. Dabei wird gleich bewiesen, daß in jedem Punkt des Würfels π mindestens eine der Unterdeterminanten vom Range $n-1$ der Funktionalmatrix

$$\left\{\frac{\partial \vartheta_k}{\partial t_{\nu_\lambda}}\right\} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{21. 4}$$

von Null verschieden ist.

Es sei in der Tat

$$\vartheta_i = \sum_k a_i^k\, \vartheta'_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{21. 5}$$

die orthogonale Transformation, die den Übergang zu den Koordinaten ϑ_i bewirkt.

Drückt man dann in diesen Formeln ϑ'_{ν_λ} durch $f_\lambda(\vartheta'_{\nu_1}, \ldots, \vartheta'_{\nu_{n-1}})$ aus, so erhält man rechts eine bestimmte Funktion von $\vartheta'_\nu, \ldots, \vartheta'_{\nu_{n-1}}$, und es bleibt nur nachzuweisen, daß mindestens eine der Funktionaldeterminanten vom Range $n-1$ der Funktionalmatrix (21. 4) von Null verschieden ist.

Dazu setzen wir für den Augenblick, wie vorhin, $\vartheta'_{r_\mu} = t_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots n-1)$ und bezeichnen mit $D'_{r_1 r_2 \ldots r_{n-1}}$ die Determinante

$$D'_{r_1 r_2 \ldots r_{n-1}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \vartheta'_{r_1}}{\partial t_1} & \frac{\partial \vartheta'_{r_2}}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial \vartheta'_{r_{n-1}}}{\partial t_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \vartheta'_{r_1}}{\partial t_{n-1}} & \frac{\partial \vartheta'_{r_2}}{\partial t_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial \vartheta'_{r_{n-1}}}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}$$

und mit $A^{r_1 \ldots r_{n-1}}_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}}$ die Determinante

$$A^{r_1 \ldots r_{n-1}}_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}} = \begin{vmatrix} a^{r_1}_{\nu_1} & a^{r_1}_{\nu_2} & \ldots & a^{r_1}_{\nu_{n-1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^{r_{n-1}}_{\nu_1} & a^{r_{n-1}}_{\nu_2} & \ldots & a^{r_{n-1}}_{\nu_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Dann gilt, wenn man allgemein mit $\sum_{(\varrho_1 \ldots \varrho_{n-1})}$ eine sich über alle geraden Permutationen $\varrho_1 \ldots \varrho_{n-1}$ erstreckende Summation bezeichnet,

$$(21.6) \qquad \sum_{(\nu_1 \ldots \nu_{n-1})} D^2_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}} = \sum_{(r_1 \ldots r_{n-1})} A^{2 r_1 \ldots r_{n-1}}_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}} D'^2_{r_1 \ldots r_{n-1}},$$

wobei $D_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}}$ die Determinante

$$(21.7) \qquad D_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \vartheta_{\nu_1}}{\partial t_1} & \frac{\partial \vartheta_{\nu_2}}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial \vartheta_{\nu_1}}{\partial t_{n-1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \vartheta_{\nu_{n-1}}}{\partial t_1} & \frac{\partial \vartheta_{\nu_{n-1}}}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial \vartheta_{\nu_{n-1}}}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}$$

bedeutet[33]). Nun ist rechts nach Voraussetzung mindestens eine der Determinanten $D'_{r_1 \ldots r_{n-1}}$ von Null verschieden und nach den bekannten Tatsachen der orthogonalen Transformation

$$(21.8) \qquad A^{r_1 \ldots r_{n-1}}_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}} = \frac{a^{r_n}_{\nu_n}}{D},$$

wobei D die Determinante der a^k_i ist. Es sei nun für eine bestimmte Permutation $r_1 \ldots r_{n-1}$ die Determinante $D'_{r_1 \ldots r_{n-1}} \neq 0$. Dann gibt es bei festen $r_1 \ldots r_{n-1}$ mindestens eine Permutation $\nu_1 \ldots \nu_{n-1}$, so daß $A^{r_1 \ldots r_{n-1}}_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}} \neq 0$ ist. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so müßte die r_n-te Zeile der De-

[33]) Eine Anleitung zum Beweis dieser bekannten Identität findet man bei CARTAN, Leçons sur la géométrie des espaces de RIEMANN, Paris 1928, S. 8.

terminante $|a_i^k|$ verschwinden, was nicht möglich ist. Somit gibt es links in (21. 6) mindestens eine von Null verschiedene Determinante $D_{\nu_1 \dots \nu_{n-1}}$, was zu beweisen war.

22. Als Oberflächeninhalt des Durchschnitts von $\mathfrak{R}_{n-1}^i$ mit π_τ unter Zugrundelegung der Metrik

$$ds^2 = \sum_1^n g_i^2 \, d\vartheta_i^2 \tag{22. 1}$$

definieren wir den Ausdruck[34])

$$J_\tau = \int_{\pi_\tau}' \sqrt{g} \sqrt{\sum_{(\nu_1 \dots \nu_n)} (g^{\nu_n})^2 D^2_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{n-1}}} \, dt_{\nu_1} \dots dt_{\nu_{n-1}}, \tag{22. 2}$$

wobei die Summe über alle zyklischen Permutationen der Zahlen 1, 2, ..., n erstreckt wird und g^{ν_n} die reziproke Zahl von g_{ν_n} bedeutet. Die Integration ist über die Projektion des Würfels π parallel zur Achse ϑ_{ν_n}' zu erstrecken. Nun liegt die Berandung jedes der Parallelotope π auf solchen $(n-1)$-dimensionalen Ebenen, welche $\mathfrak{R}_{n-1}^i$ nicht berühren. Der Schnitt von $\mathfrak{R}_{n-1}^i$ mit einer solchen Ebene besteht daher aus endlich vielen regulären $(n-2)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten[35]) und läßt sich nach Erhard Schmidt[36]) durch endlich viele $(n-2)$-dimensionalen Grundgebilde überdecken, von denen jedes den $(n-1)$-dimensionale Oberflächeninhalt Null besitzt[37]). Daraus folgt, daß der $(n-1)$-dimensionale Oberflächeninhalt des Durchschnitts von $\mathfrak{R}_{n-1}^i$ mit der Gesamtheit der Berandungen aller Parallelotope π_τ gleich Null ist. Es kommt also kein endlicher Teil des $(n-1)$-dimensionalen Oberflächeninhalts von $\mathfrak{R}_{n-1}$ mehrfach in Anschlag, und man kann für den Flächeninhalt $O(\mathfrak{R}_{n-1}^i)$ von $\mathfrak{R}_{n-1}^i$ setzen:

$$O(\mathfrak{R}_{n-1}^i) = \sum_\tau \int_{\pi_\tau}' \sqrt{g} \sqrt{D_{\nu_n}} \, dt_{\nu_1} \dots dt_{\nu_{n-1}}.$$

$\sqrt{D_{\nu_n}}$ ist die lange Wurzel, die in (22. 2) eintritt. Hat man $O(\mathfrak{R}_{n-1}^i)$ definiert, so erfolgt die Definition der Oberfläche O von $\mathfrak{R}$ durch die Formel:

$$O = \sum_i O(\mathfrak{R}_{n-1}^i).$$

Allgemeiner, falls $\Phi(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$ eine stetige Funktion von $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ ist, definieren wir das Integral

$$J(\Phi) = \int \Phi \, dO,$$

---

[34]) Das ist das Integral über die Länge eines $(n-1)$-dimensionalen Multivektors mit den Komponenten $d\vartheta_i$. Vgl. Cartan, l. c. S. 15. Analog definiert man die Oberfläche für kleinere Dimensionen als $n-1$.

[35]) Vgl. Schmidt I, S. 749.

[36]) Vgl. Schmidt I, S. 749.

[37]) Vgl. Schmidt I, S. 713.

wobei dO das Oberflächenelement von $\mathfrak{R}$ ist, durch die Gleichung

$$J(\Phi) = \sum_i \int_{\mathfrak{R}_{n-1}^i} \Phi \, dO.$$

Jedes Integral der rechten Seite wird seinerseits durch die Gleichung

$$\int_{\mathfrak{R}_{n-1}^i} \Phi dO = \sum_\tau \int_{\pi_\tau'} \Phi \sqrt{g} \sqrt{D_{r_n}} \, dt_{r_1} \dots dt_{r_{n-1}}$$

definiert. Dabei sind die ϑ_i in Φ Funktionen von t_k, welche mit diesen durch (21. 2) verbunden sind. Daß diese Integrale im RIEMANNschen Sinne existieren, ist leicht zu sehen und kann in der SCHMIDTschen Arbeit nachgelesen werden.

Wir fügen noch einige Tatsachen über die Normalen einer regulären Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_k$ hinzu. Wir betrachten einen inneren Punkt P von $\mathfrak{M}_k$ und ein ihn enthaltendes Grundgebilde G_k. Wird eine Umgebung von P durch

$$\vartheta_i = \vartheta_i(v_1, \dots, v_k)$$

gegeben, wobei die v_i in einem Parallelotop

$$a_\varrho' \leqq v_\varrho \leqq a_\varrho'' \qquad (\varrho = 1, 2, \dots, k)$$

variieren, so hat voraussetzungsgemäß die Funktionalmatrix

$$\left\{ \frac{\partial \vartheta_i}{\partial v_k} \right\} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, k \end{matrix}$$

den Rang k. Das Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \vartheta_\nu}{\partial v_\lambda} \xi_\nu = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, k)$$

hat also in jedem Punkt den Rang $n - k$. Die entsprechenden geben dann die Normalrichtungen in dem betreffenden Punkt. Auf diese Weise (durch Überdeckung von $\mathfrak{M}_k$ durch endlich viele Grundgebilde) definieren wir die Normalschar in jedem Punkt P von $\mathfrak{M}_k$. Ist $k = n - 1$, so gibt es in jedem Punkt (auch Randpunkt[38]) eine wohlbestimmte Normale, welche sich mit dem Bezugspunkt stetig ändert. Nun sei zuerst $k = 1$. Dann gibt es in jedem Punkt eine wohlbestimmte Tangente und eine wohlbestimmte Normalenschar vom Range $(n - 1)$, welche die $(n - 1)$-dimensionale Normalebene bildet. Diese ändert sich stetig mit dem Bezugspunkte. In jedem Randpunkt von $\mathfrak{M}_1$, den wir als 0-dimensionale Mannigfaltigkeit ansehen, gibt es auch in bezug auf diese Randmannigfaltigkeit eine Normalenschar vom Range n,

[38]) In den Randpunkten werden die $\frac{\partial \vartheta_i}{\partial t_k}$ durch Stetigkeit (von innen) definiert. Man kann noch annehmen, daß G_k in einem ihn enthaltenden Grundgebilde G_k' liegt, in dem noch die Gleichungen gelten.

welche aus allen Geraden durch diesen Punkt besteht. Analog verfahren wir zur Bildung des vollständigen Normalsystems einer regulären Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_k$. In jedem Punkt von $\mathfrak{M}_k$ (auch in jedem Randpunkt) gibt es nämlich eine wohlbestimmte Normalenschar vom Range $(n-k)$. Diese ändert sich stetig mit dem Bezugspunkte. Fügt man diesem System noch die vollständigen Normalsysteme der endlich vielen $(k-1)$-dimensionalen Randmannigfaltigkeiten von $\mathfrak{M}_k$ hinzu, so erhält man das vollständige Normalsystem von $\mathfrak{M}_k$.

23. Was nun einen n-dimensionalen regulären Körper $\mathfrak{K}$ betrifft, so definieren wir als vollständiges Normalsystem von $\mathfrak{K}$ die Gesamtheit der vollständigen Normalsysteme seiner endlich vielen $(n-1)$-dimensionalen Randmannigfaltigkeiten $\mathfrak{K}_{n-1}^{(i)}$. Was die Normalrichtung der äußeren Normalen von $\mathfrak{K}$ anbetrifft, so definieren wir für jedes $\mathfrak{K}_{n-1}^{i}$ (auch in den Randpunkten) die Richtungskosinus $\cos(n, \vartheta_i)$ in Einklang mit dem euklidischen Fall durch

$$(23.\,1) \qquad \cos(n, \vartheta_{\nu_n}) = \frac{g_{\nu_1} \cdots g_{\nu_{n-1}} D_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}}}{\sqrt{\sum_{(\nu_1 \ldots \nu_{n-1})} (g_{\nu_1} \cdots g_{\nu_{n-1}})^2 D^2_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}}}},$$

wobei $\nu_1 \ldots \nu_{n-1}$ eine zyklische Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots n$ bedeuten[39]). Wegen $g_{\nu_1} \ldots g_{\nu_n} = g$ kann man noch schreiben

$$(23.\,2) \qquad \Phi_i = g_{\nu_n} \cos(n, \vartheta_n) = \frac{D_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}}}{\sqrt{\sum_{(\nu_1 \ldots \nu_{n-1})} g^2 D^2_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}}}}$$

und die Φ_i die kovarianten Komponenten der äußeren Normale n nennen.

A priori ist es natürlich nicht einleuchtend (und nicht richtig), daß (23. 1) die Richtungen der äußeren Normale n von $\mathfrak{K}$ geben. Es ist aber immer möglich, eventuell durch Umbenennung der $t_1, \ldots, t_{n-1}$ diese Tatsache in einem Punkt zu erreichen. Nachdem dies geschehen, gilt die Tatsache in jedem Punkt von π_τ, wenn man dafür Sorge trägt, diese Würfel π_τ so klein zu wählen, daß (im Falle einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}_{n-1}^{i}$) mindestens eine Determinante $D_{\nu_1 \ldots \nu_k}$ in (dem abgeschlossenen) Parallelotop nicht verschwindet. Im folgenden wird diese Umbenennung als vollzogen vorausgesetzt, so daß (23. 1) die Richtungen der äußeren Normalen von $\mathfrak{K}$ darstellen werden.

Somit sind wir mit allen vorbereitenden Tatsachen über den Körperbegriff fertig und können zum Beweis des Gauss schen Satzes übergehen.

---

[39]) Analog drücken sich die Richtungskosinus der Normalenscharen im Falle einer regulären Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_k$ mit aus. Wir bedürfen aber dieser Tatsache nicht, da diese Mannigfaltigkeiten von kleineren Dimensionen als $n-1$ bilden.

Fortsetzung. Beweis des Gaussschen Satzes im Riemannschen Raum für die regulären Körper.

24. Der Beweis des Gaussschen Divergenzsatzes (17. 2) kann wegen $d\tau = \sqrt{g}\, d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_n$ unmittelbar aus dem sogenannten Greenschen Lemma geschlossen werden, das für die i-te Kordinate durch folgende Gleichung Ausdruck findet:

$$\int_{\mathfrak{K}} \frac{\partial F}{\partial \vartheta_i} d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_n = \int_{\mathfrak{O}} F \Phi_i dO. \tag{24. 1}$$

Der Gausssche Satz ergibt sich dann durch Summation über alle i. Was die Definition der rechten Seite anbelangt, so ist diese durch die Summe der entsprechenden Integrale über die endlich vielen regulären $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten definiert, nämlich durch

$$\int_{\mathfrak{O}} F \Phi_i dO = \sum_{\lambda} \int_{\mathfrak{K}^{\lambda}_{n-1}} F \Phi_i dO.$$

Zum Beweis von (24. 1) bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}'$ die Projektion von $\mathfrak{K}$ auf die Ebene $\vartheta_i = 0$. Es ist hier keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn der Index i gleich n angenommen wird. Wir verstehen also unter $\mathfrak{K}'$ die Punktmenge $P(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}, 0)$, wobei $P(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$ den ganzen Körper $\mathfrak{K}$ durchläuft.

Es bezeichne jetzt $\mathfrak{K}'_1$ folgende Teilmenge von $\mathfrak{K}'$: Jede zur ϑ_n-Achse parallele Gerade in G_0 (im euklidischen Sinne), welche durch einen Punkt von G_0 geht, schneidet den Rand von $\mathfrak{K}$ in unendlich vielen Punkten. Zu dieser Menge $\mathfrak{K}'_1$ zählen wir die Teilmenge $\mathfrak{K}'_2$ von $\mathfrak{K}'$, die aus allen Punkten von $\mathfrak{K}'$ besteht, welche Projektion von Randpunkten einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}^i_{n-1}$ sind. Die Summe $\mathfrak{K}'_1 + \mathfrak{K}'_2$ bezeichnen wir im folgenden mit $\mathfrak{K}'_0$. Diese Punktmenge hat einen $(n-1)$-dimensionalen Jordan-Inhalt Null. Um dies zu beweisen, bemerken wir, daß $\mathfrak{K}'_1$ in der Projektion der Punktmenge $\overline{\mathfrak{K}}_1$ enthalten ist, welche die Projektionen aller Punkte von $\mathfrak{K}$ enthält, in welchen die Normale senkrecht zur ϑ_n-Achse steht, also die Projektion aller Punkte, in denen die Funktionaldeterminante

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \vartheta_{n-1}}{\partial t_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial \vartheta_{n-1}}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}$$

verschwindet. Die Projektion dieser Punktmenge hat aber den $(n-1)$-dimensionalen Jordanschen Inhalt Null, wie dies leicht aus einem bekannten

Satz folgt. Daß der Inhalt von $\mathfrak{K}_2'$ ebenso Null ist, ist trivial. Wir geben hier keinen ausführlichen Beweis dieser Tatsachen, da der Leser ihn in aller Ausführlichkeit in der SCHMIDTschen Arbeit nachlesen kann[40]).

25. Wir führen jetzt eine netzartige Einteilung von G_0 in Würfeln ein, oder besser gesagt, eines Würfels W von G_0, der $\mathfrak{K}$ enthält, etwa von

$$-2a \leqq \vartheta_i \leqq 2a \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Wir zerlegen W durch zu den Koordinatenachsen parallele Ebenen

$$\vartheta_i = m\frac{a}{N} = m\delta \quad (i = 1, 2, \ldots, n,\ N \text{ ganz},\ m = -N, \ldots, 0, \ldots N)$$

in kongruente abgeschlossene Würfel W_δ und bezeichnen eine solche Einteilung als ein Netz $\mathfrak{N}_\delta$. Das entsprechende Netz von $\vartheta_n = 0$ (die Projektion von $\mathfrak{N}_\delta$ auf $\vartheta_n = 0$) bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}_\delta'$.

Wir betrachten jetzt bei einem vorgelegten Netz $\mathfrak{N}_\delta$ diejenige Würfelmenge $\mathfrak{M}_\delta$, die aus allen Würfeln W_δ von $\mathfrak{N}_\delta$ besteht, die entweder im Innern oder auf dem Rande Randpunkte von $\mathfrak{K}$ enthalten, deren Projektion der Menge $\mathfrak{K}_0'$ angehört. Diese Menge erweitern wir folgendermaßen zu einer Menge $\mathfrak{M}_\delta^*$: Ist W_δ ein Würfel von $\mathfrak{M}_\delta$, so rechnen wir zu $\mathfrak{M}_\delta^*$ alle Würfel W_δ^* von $\mathfrak{N}_\delta$, deren Projektion $W_\delta'^*$ auf $\vartheta_n = 0$ mit der Projektion dieses Würfels auf dieselbe Ebene übereinstimmt. $\mathfrak{M}_\delta^*$ ist also eine Punktmenge, welche aus „Säulen" parallel zur ϑ_n-Achse besteht.

Wir beweisen jetzt:

Der n-dimensionale[41]) Inhalt von $\mathfrak{M}_\delta^*$ ist Null.

Die Behauptung ist trivial. Denn bezeichnet $J_{n-1}(\mathfrak{M}_\delta')$ das $(n-1)$-dimensionale Maß von $\mathfrak{M}_\delta'$, so gilt für den n-dimensionalen Inhalt von $\mathfrak{M}_\delta^*$

$$J_n(\mathfrak{M}_\delta^*) \leqq a \cdot J_{n-1}(\mathfrak{M}_\delta')$$

und die rechte Seite kann bei genügend feiner Unterteilung beliebig klein gemacht werden.

Wir bezeichnen jetzt (bei einer Unterteilung δ) mit $\mathfrak{K}_\delta$ die Menge aller Punkte von $\mathfrak{K}$, die keinem der abgeschlossenen Würfel der Menge $\mathfrak{M}_\delta^*$ angehören, und mit $\overline{\mathfrak{K}_\delta}$ die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{K}_\delta$. Nach dem früher

---

[40]) Vgl. z. B. SCHMIDT I, l. c. S. 712. Ebenfalls O. HAUPT, Differential- und Integralrechnung. Berlin 1938. Bd. 3. In diesem letzteren Werk wird das LEBESGUEsche Integral zugrunde gelegt.

[41]) Es handelt sich immer um JORDANschen Inhalt.

Gesagten enthält $\overline{\mathfrak{R}}_\delta$ keine Punkte, deren Projektion $\mathfrak{R}'_\delta$ angehört. Setzt man dann

$$J_\delta = \int\limits_{\overline{\mathfrak{R}}_\delta} \frac{\partial F}{\partial \vartheta_n} d\vartheta_1 \dots d\vartheta_n,$$

so gilt nach bekannten Sätzen der Riemannschen Integrationstheorie

$$\lim_{\delta \to 0} J_\delta = \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{\overline{\mathfrak{R}}_\delta} \frac{\partial F}{\partial \vartheta_n} d\vartheta_1 \dots d\vartheta_n = \int\limits_{\mathfrak{R}} \frac{\partial F}{\partial \vartheta_n} d\vartheta_1 \dots d\vartheta_n = J.$$

Fortsetzung und Ende des Beweises des Greenschen Lemmas. Beweis des wichtigen Hilfssatzes von Nr. 8.

26. Nun sei $\overline{O}_\delta$ derjenige Teil der Oberfläche von $\mathfrak{R}$, der $\mathfrak{R}_\delta$ angehört. Da (nach Ausschluß von $\mathfrak{M}^*_\delta$) jede durch einen Punkt P' von $\mathfrak{R}'$ gehende und zu der ϑ_n-Achse parallele Gerade $\overline{\mathfrak{O}}_\delta$ in endlich vielen Punkten trifft, so gilt, wenn man die Entwicklungen von Nr. 23 berücksichtigt,

$$J_\delta = \int\limits_{\overline{\mathfrak{O}}_\delta} F \Phi_n \, dO.$$

Wir brauchen also zum Beweis des Greenschen Lemmas nur die Gleichung

$$\lim_{\delta \to 0} Q_\delta = \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{\overline{\mathfrak{O}}_\delta} F \Phi_n \, dO = \int\limits_{\mathfrak{O}} F \Phi_n \, dO = Q \tag{26.1}$$

zu beweisen.

Nun ist die Differenz $Q - Q_\delta$ gleich

$$Q - Q_\delta = \sum_{W'_\delta} \int F \Phi_n \, dO. \tag{26.2}$$

wobei die Summation über alle Würfel W'_δ von $\mathfrak{R}_\delta$ erstreckt wird, die überhaupt Punkte enthalten, deren Projektion in $\mathfrak{R}'_0$ oder dessen Rand fällt.

Jetzt fassen wir eine bestimmte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}^i_{n-1}$ ins Auge und alle Parallelotope π_τ, die Punkte dieser Mannigfaltigkeit enthalten. Wir geben noch eine Zahl $\varepsilon > 0$ vor und fassen das Integral

$$Q_i = \sum_\tau \int\limits_{\mathfrak{R}^i_{n-1}} F \Phi_n \, dO = \int\limits_{\mathfrak{R}^i_{n-1}} F \Phi_n \, dO$$

als Lebesguesches Integral auf. Bedeutet dann $\mathfrak{R}'^i_{n-1}$ die Mannigfaltigkeit, auf der $|\Phi_n| \leqq \varepsilon$ ist, und $\mathfrak{R}^{*i}_{n-1}$ die Differenz $\mathfrak{R}^i_{n-1} - \mathfrak{R}'^i_{n-1}$, so ist

$$Q_i = \int\limits_{\mathfrak{R}'^i_{n-1}} F \Phi_n \, dO + \int\limits_{\mathfrak{R}^{*i}_{n-1}} F \Phi_n \, dO = Q'_i + Q^*_i. \tag{26.3}$$

Nun behaupten wir: Es sei P' ein Punkt von $\vartheta_n = 0$. Bedeutet dann $A_i(P')$ die Anzahl der Schnittpunkte der durch P' gehenden zur ϑ_n-Achse parallelen Geraden mit der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}^{*i}_{n-1}$, so ist das Maximum A_i von $A_i(P')$, falls P' die Ebene $\vartheta_n = 0$ durchläuft, eine endliche Zahl. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so müßte es, da $\mathfrak{R}^{*i}_{n-1}$ abgeschlossen ist, mindestens einen Punkt P^* auf dieser geben, der die Eigenschaft besitzt, daß die Parallele durch ihn zur ϑ_n-Achse die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}^{i*}_{n-1}$ berührt. Hiermit müßte in P^*. $\Phi_n = 0$ sein, was der Annahme widerspricht. Wir können also (da es endlich viele $\mathfrak{R}^i_{n-1}$ gibt) sagen: Nach Entfernung desjenigen Teiles von O, für welchen $|\Phi_n| \leqq \varepsilon$ ist[42]), hat der Rest O^* von O die Eigenschaft, daß jede zu der ϑ_n-Achse parallelen Geraden durch einen Punkt der Projektion $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{R}$ höchstens in endlich vielen Punkten A trifft.

Wir betrachten jetzt das Integral $Q = \Sigma Q_i$ und zerlegen jedes Q_i nach (26. 3) in zwei Integrale Q'_i bzw. Q^*_i. Eine leichte Überlegung zeigt, daß $\Sigma |Q'_i| \leqq \varepsilon O$ ist und die Summe $\Sigma |Q^*_i|$ kleiner als die Größe $MAJ_{n-1}(\mathfrak{M}'_\delta) : \varepsilon$. Wir erhalten dann als endgültige Abschätzung die Ungleichung

$$|Q - Q_\delta| \leqq \varepsilon Q + MA \frac{J_{n-1}(\mathfrak{M}'_\delta)}{\varepsilon}.$$

Dabei ist $J_{n-1}(\mathfrak{M}'_\delta)$ der Gesamtinhalt der $(n-1)$-dimensionalen Würfel von $\mathfrak{N}'_\delta$, die die Menge $\mathfrak{R}'_0$ überdecken. Lassen wir nun bei konstantem ε δ so klein werden, daß $J_{n-1}(\mathfrak{M}'_\delta) \leqq \varepsilon^2$ wird, so erhält man

$$|Q - Q_\delta| \leqq \varepsilon O + MA\,\varepsilon,$$

was die Gleichung

$$\lim_{\delta \to 0} Q_\delta = Q,$$

d. h. (10. 3) zur Folge hat. Somit ist das Greensche Lemma bewiesen.

27. Wir sind nun imstande, auf Grund von (17. 2) die Behauptung (17. 1) zu beweisen. Wegen

$$ds^2 = \sum_1^n g_i^2 \, d\vartheta_i^2$$

$$g_1 = 1. \quad g_i = \varphi(\vartheta_1)\,\varphi(\vartheta_2) \ldots \varphi(\vartheta_{n-1}) \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

ist hier

$$\sqrt{g} = g = \varphi^{n-1}(\vartheta_1)\,\varphi^{n-2}(\vartheta_2) \ldots \varphi(\vartheta_{n-1})$$

---

[42]) Wir haben schon früher betont, daß es auch in jedem Randpunkte eine wohlbestimmte Normale gibt. Das vollständige Normalensystem von Erhard Schmidt werden wir hier nicht gebrauchen. Es kann natürlich vorkommen, daß Punkten von $\mathfrak{R}^i_{n-1}$, welche gemeinsame Randpunkte zweier oder mehrerer $\mathfrak{R}_{n-1}$ sind, zwei oder mehrere Normalen zugeordnet werden, welche eben von diesen $\mathfrak{R}_{n-1}$ herrühren. Bei der Herausnahme des betreffenden Teiles von O wird jede Normale in Betracht gezogen.

und, wie man sich leicht überzeugt,

$$\cos(n, \vartheta_i) = \frac{\Phi_i}{g_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Hiermit ist (17. 1), wenn man

$$a^i = \frac{\omega(\vartheta_i)}{\varphi^{n-1}(u)\, g_i^2} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),\ a^n = 0$$

setzt, mit der Behauptung

$$\sum_1^{n-1} \int_{\mathfrak{K}} \frac{1}{\bar{g}} \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \left(\frac{\bar{g}\, \omega(\vartheta_i)}{g_i^2\, \varphi^{n-1}(u)} \right) d\tau = 0$$

gleichbedeutend, und es genügt nachzuweisen, daß hier der Ausdruck

$$D = \frac{1}{\bar{g}} \sum_1^{n-1} \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \left(\frac{\bar{g}\, \omega(\vartheta_i)}{g_i^2\, \varphi^{n-1}(u)} \right)$$

identisch verschwindet.

Nun gilt für D

$$D = \frac{1}{\varphi^{n-1}(u)} \cdot \frac{1}{\bar{g}} \sum_1^{n-1} \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \left(\frac{\bar{g}\, \omega(\vartheta_i)}{g_i^2} \right) + \frac{1}{\bar{g}} \sum_1^{n-1} \frac{\bar{g}\, \omega(\vartheta_i)}{g_i^2} \frac{\partial \left(\frac{1}{\varphi^{n-1}(u)} \right)}{\partial \vartheta_i}$$

Für die erste Summe rechts kann man leicht [43]) die Gleichung

$$\frac{1}{\bar{g}} \sum_1^{n-1} \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \left(\frac{\bar{g}\, \omega(\vartheta_i)}{g_i^2} \right) = n - 1$$

beweisen. Es wird also

$$D = \frac{(n-1)}{\varphi^{n-1}(u)} + \sum_1^{n-1} \frac{\omega(\vartheta_i)}{g_i^2} \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{\varphi^{n-1}(u)} \right)}{\partial \vartheta_i}.$$

Nun folgt aus der Definition von

$$\sqrt{K}\, \psi(u) = \sqrt{1 - \prod_1^{n-1} \varphi^2(\vartheta_i)},$$

es ist also

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta_i} = \frac{\varphi^2(u)\, \psi(\vartheta_i)}{\varphi(\vartheta_i)\, \psi(u)} = \frac{\varphi(u)\, \omega(\vartheta_i)}{\omega(u)}.$$

Hiermit wird

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{\varphi^{n-1}(u)} \right)}{\partial \vartheta_i} = -(n-1) \frac{1}{\varphi^n(u)} \frac{\varphi(u)\, \omega(\vartheta_i)}{\omega(u)}.$$

---

[43]) Für einen ausführlichen Beweis vgl. man meine unter Fußnote 6 zitierte Arbeit, S. 715.

Durch Einsetzen folgt nun

$$D = \frac{n-1}{\varphi^{n-1}(u)} - (n-1)\frac{1}{\varphi^{n-1}(u)\,\omega^2(u)}\sum_1^{n-1}\left\{\frac{\omega^2(\vartheta_i)}{g_i^2}\right\}.$$

Da jetzt die Identität

$$\sum_1^{n-1}\frac{\omega^2(\vartheta_i)}{g_i^2} = \omega^2(u)$$

sehr leicht bewiesen werden kann, so folgt hieraus $D = 0$ und somit ist auch der Beweis unseres Hilfssatzes erbracht.

Kapitel IV.

Die fundamentale isoperimetrische Gleichung. Die Aufgabe von Darboux-Schmidt. Eindeutigkeitsfragen.

Die fundamentale isoperimetrische Gleichung.

28. Wir sind jetzt imstande, die in Nr. 7 aufgestellte isoperimetrische Gleichung (7. 1) zu beweisen. Dazu betrachten wir einen beliebigen zulässigen Körper $\mathfrak{K}$ und denken uns seine Oberfläche O durch die in der Einleitung erwähnte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ in zwei Teile O_1 bzw. O_2 zerlegt. O_1 sei die obere, O_2 die untere Hälfte.

Wir ordnen jetzt jedem Punkt $P(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$ von O_1 denjenigen Punkt $\overline{P}_1(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}, \vartheta_n')$ der oberen Hälfte O_{g_1} eines Extremalkörpers $\mathfrak{K}_g$ zu, in dem die durch P gehende Parameterlinie ϑ_n $\mathfrak{K}_g$ schneidet. Ähnlich ordnen wir jedem Punkt $P_2(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$ von O_2 denjenigen Punkt $P_2(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}, \vartheta_n'')$ der unteren Hälfte O_{g_2} von $\mathfrak{K}_g$ zu, in dem die durch P_2 gehende Parameterlinie $\vartheta_n\, O_{g_2}$ schneidet. $\overline{P}_1$ bzw. P_2 haben dieselben $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}$-Koordinaten wie P_1, P_2. Ihre ϑ_n-Koordinaten werden durch die Gleichungen

$$(28.1)\qquad \vartheta_n' + \int_u^b \frac{K_g \Phi_g\, dx}{\varphi\sqrt{1 - K_g^2 \Phi_g^2}} = 0, \qquad \vartheta_n'' + \int_u^b \frac{k_g \Phi_g\, dx}{\varphi\sqrt{1 - k_g^2 \Phi_g^2}} = 0$$

gegeben, wobei u durch

$$\varphi(u) = \prod_{\nu=1}^{n-1}\varphi(\vartheta_\nu)$$

gegeben wird. Wir schreiben im folgenden der Kürze wegen an Stelle der Gleichungen (28. 1) einfach

$$\vartheta_n' + F_g(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}) = 0, \quad \vartheta_n'' - F_g(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}) = 0.$$

Die oben erklärte Zuordnung ist natürlich nicht eindeutig, jedoch entspricht jedem P_1 (bzw. P_2) ein bestimmter Punkt $\bar{P}_1$ (bzw. $\bar{P}_2$). Wir definieren jetzt zwischen den äußeren Normalen n von P_1 und $\bar{n}$ von $\bar{P}_1$ einen Winkel $(n, \bar{n})$. Dazu betrachten wir die Flächenschar

$$\vartheta_n' + F_g(\vartheta_1 \ldots, \vartheta_{n-1}) = c \tag{28.2}$$

und wählen die Konstante c so, daß die entsprechende Fläche (28.2) durch den Punkt P_1 geht. In dieser gemeinsamen Lage bilden n bzw. $\bar{n}$ einen Winkel, den wir im folgenden mit $(n, \bar{n})$ bezeichnen werden. Entsprechend wird $(n, \bar{n})$ definiert, wenn es sich um einen Punkt P_2 mit seinem zugeordneten $\bar{P}_2$ handelt. Um die isoperimetrische Gleichung (15.1) zu erhalten, gehen wir vom Integral

$$\int \cos(n, \bar{n})\, dO \tag{28.3}$$

aus, erstreckt über die Gesamtoberfläche $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{K}$ und entwickeln $\cos(n, \bar{n})$ durch die Formel

$$\cos(n, \bar{n}) = \sum_1^n \cos(n, \vartheta_\nu) \cos(\bar{n}, \vartheta_\nu).$$

Mittels (16.4) wird nun

$$\cos(n, \bar{n}) = k_g \sum_1^{n-1} \frac{\cos(n, \vartheta_\nu)}{g_\nu} \left(\omega(\vartheta_\nu) + A_g \frac{\omega(\vartheta_\nu)}{\psi^{n-1}(u)} \right) \pm \pm k_g \cos(n, \vartheta_\nu) \sqrt{1 - k_g^2 \Phi_g^2(u)}. \tag{28.4}$$

Hier entspricht das Pluszeichen den Punkten P_1 und das Minuszeichen den Punkten P_2. Da jetzt nach dem vorhin bewiesenen Hilfssatz

$$\sum_1^{n-1} \int_{\mathfrak{O}} \frac{\omega(\vartheta_\nu)}{\psi^{n-1}(u)} \frac{\cos(n, \vartheta_\nu)}{g_\nu}\, dO = 0,$$

und nach dem Gaussschen Divergenzsatz

$$\sum_1^{n-1} \int_{\mathfrak{O}} \omega(\vartheta_\nu) \cos(n, \vartheta_\nu)\, dO = \int_{\mathfrak{K}} \sum_1^{n-1} \left\{ \frac{1}{\bar{g}} \frac{\partial}{\partial \vartheta_\nu} \left(\bar{g} \frac{\omega}{g_\nu^2} \right) \right\} d\tau$$

ist, so folgt mit Rücksicht auf (28.3), (28.4) und

$$\frac{1}{\bar{g}} \sum_1^{n-1} \frac{\partial}{\partial \vartheta_\nu} \left(\bar{g} \frac{\omega(\vartheta_\nu)}{g_\nu^2} \right) = n - 1\,^{44}),$$

---

[44]) Einen ausführlichen Beweis dieser Identität kann man in meiner Arbeit: Zum isoperimetrischen Problem für die nichteuklidischen Geometrien, Math. Ann. 118 (1943), S. 636–686 nachlesen.

die Gleichung

$$(85.5)\quad \varrho_g \int \cos(n, \bar{n})\, dO = (n-1)V \pm \int \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)}\, \cos(n, \vartheta_n)\, dO.$$

Dabei ist V das Volumen (jedesmal in der entsprechenden Metrik) des zulässigen regulären Körpers $\mathfrak{K}$. Das Pluszeichen entspricht hier dem oberen Teil O_1 von O und das Minuszeichen dem unteren Teil O_2. Wir werden alsbald zeigen: Das letzte Integral J in (28.5) ist vom Körper $\mathfrak{K}$ unabhängig, und es gilt

$$(28.6)\quad J = 2\int_a^b \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)}\; \psi^{n-1}(u)\, du.$$

Fortsetzung.

Beweis von (28.4) und der fundamentalen isoperimetrischen Gleichung.

29. Zum Beweis von (28.6) verfahren wir wie beim Beweis des GREENschen Lemmas. Es sei $\mathfrak{K}'$ die „Projektion" von $\mathfrak{K}$ in der ϑ_n-Richtung auf $\vartheta_n = 0$. $\mathfrak{K}$ ist Jordan meßbar und möge in einem $(n-1)$-dimensionalen Würfel W' liegen.

Wir betrachten wie beim Beweis des GREENschen Lemmas ein Netz $\mathfrak{N}_\delta$, dessen Würfel eine Kantenlänge δ besitzen[45]). Wir bezeichnen ferner durch $\mathfrak{K}_0'$ die Menge der Punkte P', welche entweder Projektion von Randpunkten von Teilmannigfaltigkeiten oder solchen Punkten sind, welche die Eigenschaft haben, daß jede Linie ϑ_n durch die Oberfläche $\mathfrak{O}$ in unendlich vielen Punkten trifft. Es sei nun $\mathfrak{W}_\delta$ die Würfelmenge des Netzes $\mathfrak{N}_\delta$, deren Projektion keine Punkte von $\mathfrak{K}_0'$ enthält, und $\overline{\mathfrak{W}}_\delta$ die übrige Würfelmenge, die überhaupt Punkte von $\mathfrak{K}$ enthält. Ist $\overline{\mathfrak{O}}_\delta$ der in $\overline{\mathfrak{W}}_\delta$ liegende Teil von $\mathfrak{O}$, so ist, da der Integrand $\sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)}$ nur von $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}$ und nicht von ϑ_n abhängt,

$$(29.1)\quad \pm \int_{\overline{\mathfrak{O}}_\delta} \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)}\, \cos(n, \vartheta_n)\, dO = 2\int \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)}\, d\tau_1,$$

wobei

$$d\tau_1 = g_1 \ldots g_{n-1}\, d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_{n-1} = \sqrt{g^*}\, d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_{n-1}$$

gleich dem Volumenelement von $\vartheta_n = 0$ bedeutet. Nun kann man genau wie

---

[45]) Hier spielt sich alles in G_0 ab. Man kann, wenn man will, euklidische Länge bzw. Inhalte betrachten. Das Ergebnis ist dasselbe, da W' ganz in G_0 liegt und $\sqrt{g}$ in W' nach oben bzw. nach unten (durch endliche von 0 verschiedene Zahlen) begrenzt ist. Solange es sich hier um Nullmenge handelt, legen wir (der Einfachheit wegen) euklidische Metrik zugrunde.

beim Beweis des GREENschen Lemmas zeigen, daß bei abnehmendem δ das Integral

$$\pm \int_{\mathfrak{O}_\delta} \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)} \cos(n, \vartheta_n)\, dO$$

gegen das Integral

$$\pm \int_{\mathfrak{O}} \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)} \cos(n, \vartheta_n)\, dO$$

konvergiert, und da $\mathfrak{R}_0'$ eine Nullmenge ist, so wird

$$\pm \int_{\mathfrak{O}} \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)} \cos(n, \vartheta_n)\, dO = 2 \int_{\mathfrak{R}'} \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)}\, d\tau_1. \tag{29.2}$$

$\mathfrak{R}'$ stellt hier den $(n-1)$-dimensionalen Bereich

$$\vartheta_n = 0, \quad \frac{\varphi(b)}{K} \leqq \frac{\varphi(u)}{K} \leqq \frac{\varphi(a)}{K}$$

dar.

30. Bei der Umformung des Integrals (29.2) können wir jetzt so weit gehen, daß dieses durch ein einfaches Integral ausgedrückt wird. Dazu setzen wir

$$J(\varrho) = \int_{G_\varrho} \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)}\, d\tau_1,$$

wobei G_ϱ' das Gebiet

$$\frac{\varphi(b)}{K} \leqq \frac{\varphi(u)}{K} \leqq \frac{\varphi(a)}{K}$$

mit $a \leqq \varrho < b$ darstellt. Dann folgt daraus durch Differentiation nach

$$J'(\varrho) = \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(\varrho)} \int \sqrt{g^*}\, d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_{n-1},$$

wobei $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}$ durch die Beziehung $\prod_1^{n-1} \varphi(\vartheta_\nu) = \varphi(\varrho)$ verbunden sind.

Durch eine Umformung, die ich in meiner vorhin zitierten Arbeit ausführlich durchgeführt habe [46]), ist das letzte Integral hier gleich $\psi^{n-2}(\varrho)$, und wir erhalten

$$\pm \int \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)} \cos(n, \vartheta_n)\, dO = 2 \int_a^b \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)}\, \psi^{n-2}(u)\, du.$$

Die isoperimetrische Gleichung lautet dann, wenn man diese letzte Gleichung berücksichtigt:

$$\boxed{\varrho_g \int_{\mathfrak{O}} \cos(n, \mathfrak{n})\, dO = (n-1)V + 2 \int_a^b \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)}\, \psi^{n-2}(u)\, du}.$$

Diese ist die für das Folgende fundamentale isoperimetrische Gleichung.

[46]) l. c., Fußnote 2, S. 723.

Setzt man hier speziell $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_g$, so wird wegen $(n, \bar{n}) = 0$

$$\varrho_g O_g = (n-1)\, V + 2 \int_a^b \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)}\; \psi^{n-2}(u)\, du,$$

und es folgt durch Subtraktion, nach vorheriger Zerlegung von $\cos(n, \bar{n})$ in $1 - 2\sin^2 \frac{(n, \bar{n})}{2}$ die Gleichung

$$(30.1) \qquad \boxed{(n-1)(V - V_g) = \varrho_g (O - O_g) - 2\, \varrho_g\, R(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_g)}.$$

Diese bildet das zentrale Ergebnis der vorliegenden Abhandlung. Sie gilt für alle vier hier betrachteten Geometrien und für jeden der vorhin betrachteten Extremalkörper $\mathfrak{K}_g$. Die eintretenden Größen sind die Volumen V bzw. V_g von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_g$ und die Oberflächen O bzw. O_g derselben. Ferner bedeutet $R(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_g)$ das Restglied

$$R(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_g) = \int \sin^2 \frac{(n, \bar{n})}{2}\, dO.$$

Wie aus der Definition dieses Restgliedes R hervorgeht, wird $R = 0$ dann (und nur dann), wenn $(n, \bar{n}) = 0$ wird, also (wegen der über $\mathfrak{K}$ gemachten Voraussetzungen), wenn $\mathfrak{O}, \mathfrak{O}_g$ kongruent ist. Es bleibt also, um den Hauptsatz vollständig zu beweisen, zu zeigen, daß man zu jedem O_g einen (und nur einen) Extremalkörper $\mathfrak{K}_g$ konstruieren kann, der je nach der Größe von O_g zu einer der drei vorhin angegebenen Klassen gehört. Es ist daher nötig, die Ausdrücke zu untersuchen, welche die Oberfläche eines Extremalkörpers geben.

Bevor wir zur Beantwortung dieser Frage übergehen, wollen wir das in der Einleitung gestellte Problem III, das wir als Aufgabe von Darboux-Schmidt bezeichnen werden, nach den vorherigen Methoden behandeln.

Die Aufgabe von Darboux-Schmidt.

31. Wir formulieren jetzt die in der Einleitung erwähnte Aufgabe von Darboux-Schmidt in den Koordinaten $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$: Es bezeichne $\mathfrak{H}_{ab}$ den „Halbzylinder"

$$\frac{\varphi(b)}{K} \leqq \frac{\prod_1^{n-1} \varphi(\vartheta_\nu)}{K} \leqq \frac{\varphi(a)}{K}, \qquad \vartheta_n \geqq 0$$

des Fundamentalbereiches G_0. Es soll unter allen $(n-1)$-dimensionalen Flächenstücken $\mathfrak{F}$ gegebener Oberfläche O die in $\mathfrak{H}_{ab}$ liegen, und welche durch die Mannigfaltigkeiten [47])

$$\prod_1^{n-1} \varphi(\vartheta_\nu) = \varphi(a),\ \vartheta_n = 0, \qquad \prod_1^{n-1} \varphi(\vartheta_\nu) = \varphi(b),\ \vartheta_n = 0$$

[47]) Für $K = 0$ gilt die Bemerkung der Fußnote 11.

gehen, dasjenige bestimmt werden, welches zusammen mit der Fläche $\vartheta_n = 0$ das maximale Volumen einschließt. Es ist leicht zu zeigen, daß die Lösung dieser Aufgabe eine unmittelbare Folgerung der Lösung der SCHMIDTschen Aufgabe ist.

Denken wir uns mittels der Transformation $\vartheta_n' = -\vartheta_n$ an der Hyperebene $\vartheta_n = 0$ gespiegelt, so entsteht dadurch ein in bezug auf $\vartheta_n = 0$ symmetrischer Körper $\mathfrak{K}$, dessen Oberfläche das Doppelte der Oberfläche $O(\mathfrak{F})$ und dessen Volumen gleich dem Doppelten des von $\mathfrak{F}$ und der Ebene $\vartheta_n = 0$ eingeschlossenen Volumens ist. Betrachtet man nun neben $\mathfrak{K}$ noch einen Extremalkörper $\mathfrak{K}_g$, der symmetrisch zu $\vartheta_n = 0$ liegt, so erhält man, wenn man das ganze Verfahren der vorigen Nummern auf die beiden Körper anwendet, die isoperimetrische Gleichung

$$(31.1) \qquad (n-1)\{V(\mathfrak{F}) - V(\mathfrak{F}_g)\} = \varrho_g\{O(\mathfrak{F}) - O(\mathfrak{F}_g)\} - 2\,\varrho_g(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_g).$$

Dabei sind $V(\mathfrak{F})$ bzw. $O(\mathfrak{F}_g)$ die von dem Flächenstück $\mathfrak{F}$ der oberen Hälfte[48]) $\mathfrak{F}_g$ und der Hyperebene $\vartheta_n = 0$ eingeschlossenen Volumina, $O(\mathfrak{F})$, $O(\mathfrak{F}_g)$ die entsprechenden Oberflächeninhalte und $R(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_g)$ das mittels $\mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{F}_g$ konstruierte Restglied, welches genau wie (29.2) aussieht. Die Gleichung (31.1) enthält zugleich, da die Konstruktion der Extremalen bereits erfolgt ist, die Antwort auf das Problem von DARBOUX-SCHMIDT, wenn man nachweisen kann, daß die Flächen $\mathfrak{F}$ eindeutig durch $O(\mathfrak{F})$ bestimmbar sind, sobald diese Größe gewissen Bedingungen genügt. Nun ist $2O(\mathfrak{F}_g) = O_g$ und $\mathfrak{K}_g$ symmetrisch in bezug auf ϑ_n. Es genügt also für die eindeutige Bestimmung von $\mathfrak{F}_g$ durch $O(\mathfrak{F}_g)$ zu zeigen, daß $\mathfrak{K}_g$ durch die Vorgabe seiner Oberfläche (sobald diese Größe gewissen Bedingungen genügt) bis auf eine Parallelverschiebung eindeutig bestimmt ist. Diese Tatsache wird nun in der folgenden Nummer bewiesen.

Die Oberfläche eines Extremalkörpers K_g. Eindeutigkeitsfragen.

32. Zur Bestimmung der Oberfläche O_g eines Extremalkörpers verwenden wir die vorhin angegebene Beziehung

$$O = (n-1)\,W_{n-1}\int \psi^{n-2}(u)\,ds$$

unter Zugrundelegung der Gleichung der jeweiligen Extremalen C_g. Wir erhalten dann wegen

$$\varphi\,\frac{dv}{ds} \pm \frac{Q_g}{\sqrt{M^2 - Q_g^2}} = 0$$

mit Rücksicht auf

$$(32.1) \qquad ds^2 = du^2 + \varphi^2(v)\,dv^2,$$

$$ds^2 = \frac{M^2\,du^2}{M^2 - Q_g^2}.$$

[48]) Wir schreiben hier $\mathfrak{F}_g$ an Stelle von O_g der vorigen Nummer.

Nun ist für die Klasse I $v_a = v_b = 0$. Es wird also, wenn man die Oberfläche mit $O_{\gamma\bar{\gamma}}$ bezeichnet,

$$O_{\gamma\bar{\gamma}} = 2(n-1)\, W_{n-1} \int_a^b \frac{M\, \varphi^{n-2}\, du}{\sqrt{M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2}}$$

Dabei ist, wie nochmals wiederholt sei:

$$Q_{\gamma\bar{\gamma}} = \left(G(a)\cos\bar{\gamma} + G(b)\cos\gamma\right)\omega(u) - \left(\omega(a)\cos\bar{\gamma} + \omega(b)\cos\gamma\right) G(u)$$

und

$$M = G(a)\,\omega(b) - G(b)\,\omega(a).$$

Für die Oberfläche eines Körpers $\mathfrak{K}_g$ von der Klasse II finden wir entsprechend

$$(32.2)\quad O_\gamma = 2(n-1)\, W_{n-1} \int_a^b \frac{\varphi(u)\,\varphi^{n-2}(u)\,M + \varphi^{n-2}(a)\,\varphi(a)\,Q_\gamma(u)}{\varphi\sqrt{M^2 - Q_\gamma^2}}\, du$$

mit $Q_\gamma = Q_{\gamma,0}$, und schließlich für die Oberfläche eines Körpers $\mathfrak{K}_q$ von der Klasse III

$$O_q = 2(n-1)\, W_{n-1} \left\{\varphi^{n-2}(a)\,\varphi(a) + \varphi^{n-2}(b)\,\varphi(b)\right\} q +$$

$$+ 2(n-1)\, W_{n-1} \int_a^b \frac{\varphi^{n-2}(u)\,M + \varphi^{n-2}(a)\,Q(u)}{\sqrt{M^2 - Q^2}}\, du.$$

Für den elliptisch-sphärischen Fall kann q nicht beliebig sein, vielmehr wird dieses q, falls es eine schlichte Überdeckung des zugehörigen Raumes durch den Körper fordert, nach oben beschränkt bleiben. Die entsprechenden Ungleichungen für q werden an der richtigen Stelle angegeben werden.

Der Hauptsatz dieser Nummer, der zugleich die eindeutige Bestimmung der Extremalkörper sichert, lautet folgendermaßen:

Die Oberflächen $O_{\gamma\bar{\gamma}}$, O_γ und O_q sind monotone Funktionen ihrer Parameter. Da ferner die drei Familien I, II, III der Extremalkörper stetig ineinander übergehen, so gibt es zu jedem O, das der Ungleichung

$$O > 2(n-1)\, W_{n-1} \int_a^b \varphi^{n-2}(u)\, du = O^*$$

genügt (und im elliptisch-sphärischen Fall den beurußten Ungleichungen nach oben) nur einen Extremalkörper, der die vorgegebene Oberfläche besitzt.

Wir beweisen diesen Satz zuerst für die Körper $\mathfrak{K}_{\gamma\bar{\gamma}}$ der Klasse I. Für diese gilt

$$(32.4)\qquad O_{\gamma\bar{\gamma}} = 2(n-1)\, W_{n-1} \int_a^b \frac{M\,\varphi^{n-2}(u)\,du}{\sqrt{M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2}}.$$

Da hier der Integrand definitionsgemäß in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $\gamma_0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ endlich bleibt[49]), so kann man unter dem Integralzeichen ohne weiteres differenzieren. Wir erhalten dann nach einigen Rechnungen

$$(32.5)\quad \frac{dO_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma} = 2(n-1)\, W_{n-1} M \int_a^b \frac{F(u)}{\varphi\left(\sqrt{M^2 - Q^2_{\gamma\bar{\gamma}}}\right)^3} \frac{dQ_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma}\, du = 2(n-1)\, W_{n-1}\, J(a,b)$$

mit

$$(32.6)\quad F(u) = \{G(a)\,\psi^{n-1}(u) - \omega(a)\}\cos\gamma + \{G(b)\,\psi^{n-1}(u) - \omega(b)\}\cos\bar{\gamma}.$$

Nun wird der Parameter γ durch die Gleichung

$$(32.7)\quad J(\gamma,\bar{\gamma}) = \int_a^b \frac{Q_{\gamma\bar{\gamma}}\, du}{\varphi\sqrt{M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}}} = 0$$

definiert, und daraus folgt durch Differentiation nach γ

$$(32.8)\quad \int_a^b \frac{1}{\varphi\left(M^2 - Q^2_{\gamma\bar{\gamma}}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{dQ_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma}\, du = 0.$$

Dabei ist

$$\frac{dQ_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma} = \frac{\partial Q_{\gamma\bar{\gamma}}}{\partial\gamma} + \frac{\partial Q_{\gamma\bar{\gamma}}}{\partial\bar{\gamma}}\frac{d\bar{\gamma}}{d\gamma},$$

wobei die Abhängigkeit der Funktion $\bar{\gamma}$ von γ durch (32.7) gegeben wird.

Nun ist

$$F'(u) = (n-1)\{G(a)\cos\gamma + G(b)\cos\bar{\gamma}\}\,\psi^{n-2}(u)\,\varphi(u) > 0,$$

$F(u)$ ist also im Intervall $a \leqq u \leqq b$ monoton wachsend. Setzt man

$$F^*(u) = F(u) - F(a),$$

so ist $F^*(u)$ in demselben Intervall $\geqq 0$, und man erhält schließlich mit Rücksicht auf (32.7).

$$\frac{dO_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma} = 2(n-1)\, W_{n-1} M \int_a^b \frac{F^*(u)}{\varphi\,(M^2 - Q^2_{\gamma\bar{\gamma}})^{\frac{3}{2}}} \frac{dQ_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma}\, du = 0.$$

33. Um jetzt zu zeigen, daß die rechte Seite negativ ist, rechnen wir $\frac{dQ_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma}$ explizit aus.

Es wird

$$\frac{dQ_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma} = y(u) = -\sin\bar{\gamma}\{G(b)\,\omega(u) - G(u)\,\omega(b)\}\frac{d\bar{\gamma}}{d\gamma} + \\ + \sin\gamma\{\omega(a)\,G(u) - \omega(u)\,G(a)\}.$$

---

[49]) Für jedes γ aus dem Intervall $\gamma_0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ ist $0 < \bar{\gamma} < \frac{\pi}{2}$.

Wegen der unmittelbar zu beweisenden Tatsache $\frac{d\bar{\gamma}}{d\gamma} > 0$ [50]) ist $y(a) > 0$ und $y(b) < 0$. Wenn wir zeigen können, daß $y(u)$ monoton ist, so wird hiermit die Existenz einer einzigen Nullstelle gesichert. Setzt man aber $Y(u) = -y(u)$, so ist

$$Y(u) = \{G(a)\mu + G(b)\nu\}\omega(u) - \{\omega(a)\mu + \omega(b)\nu\}G(u)$$

mit $\mu, \nu > 0$, und wir haben in Nr. 12 gelernt, daß diese Funktion monoton ist.

Zusammenfassend kann man also sagen: Die Funktion $\frac{dQ_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma}$ ist für $u = a$ größer als Null, für $u = b$ kleiner als Null und nimmt zwischen a und b monoton ab. Sie besitzt zwischen a und b eine einzige Nullstelle $u = a^*$.

Nach dem zweiten Mittelwertsatz ist nun, da $F^*(u) \geqq 0$ und monoton ist,

$$\int_a^{a^*} \frac{F^*(u)}{\varphi(M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dQ_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma} du = F^*(\xi) \int_a^{a^*} \frac{1}{\varphi(M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{dQ_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma} du$$

und

$$\int_{a^*}^{b} \frac{F^*(u)}{\varphi(M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dQ_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma} = F^*(\eta) \int_{a^*}^{b} \frac{1}{\varphi(M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dQ_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma} du$$

mit $$a < \xi < a^* < \eta < b.$$

Infolgedessen wird wegen (32. 7)

$$J(a,b) = \{F^*(\xi) - F^*(\eta)\} \int_a^{a^*} \frac{1}{\varphi(M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dQ_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma} du < 0.$$

Es ist also tatsächlich $\frac{dO_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma} < 0$ und somit auch zugleich die Monotonie von $O_{\gamma\bar{\gamma}}$ nachgewiesen.

Der Beweis der Monotonie von O_γ wird ähnlich geführt.

Zuerst bemerken wir, daß in (32. 2)

$$\lim_{u \to a} \frac{\varphi(u)\psi^{n-2}(u)M + \psi^{n-2}(a)\varphi(a)Q_\gamma(u)}{\sqrt{M^2 - Q_\gamma^2}} = 0 \qquad (0 < \gamma < \gamma_0)$$

ist, man kann also unbedenklich unter dem Integralzeichen differenzieren. Wir erhalten dann

$$O_\gamma' = 2(n-1)W_{n-1}M \int_a^b \frac{M\psi^{n-2}(a)\varphi(a) + \psi^{n-2}(u)\varphi(u)Q_\gamma(u)}{\varphi(M^2 - Q_\gamma^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial Q_\gamma}{\partial \gamma} du$$

oder

$$O_\gamma' = 2(n-1)W_{n-1}M \int_a^b \frac{F(u)}{\varphi(M^2 - Q_\gamma^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial Q_\gamma}{\partial \gamma} du.$$

[50]) Durch Differentiation von $J(\gamma, \bar{\gamma}) = 0$.

Da nun die Funktion $F(u)$, wie man unmittelbar nachprüft, eine positive Ableitung hat, und dazu $F(a) = 0$ ist, so ist sie im Intervall $a \leqq u \leqq b$ positiv. Da ferner $\frac{\partial Q_\gamma}{\partial \gamma} < 0$ ist, so ist $O'_\gamma < 0$. Hiermit ist auch die Monotonie von O_γ bewiesen worden.

Für die Klasse III ist schließlich

$$\frac{dO_q}{dq} = 2(n-1) W_{n-1}\{\psi^{n-2}(a)\varphi(a) + \psi^{n-2}(b)\varphi(b)\} > 0,$$

woraus dann auch die Monotonie von O_q folgt.

Nun ist ferner

$$O_{\gamma_0, \frac{\pi}{2}} = O_{\gamma_0}, \quad \lim_{q \to 0} O_q = O_0.$$

Die drei Funktionen $O_{\gamma\bar{\gamma}}, O_\gamma, O_q$ können hiermit als eine monoton wachsende Funktion eines Parameters γ bzw. q betrachtet werden. Die Gleichung

$$O = O_\varrho \tag{33. 1}$$

ist für jedes $O > O^*$ eindeutig[51]) lösbar. Für

$$O^* < O < O_{\gamma_0} \tag{33. 2}$$

ist der entsprechende Körper $\mathfrak{K}_\varrho$ von der Klasse I. Für

$$O_{\gamma_0} \leqq O < O_0 \tag{33. 3}$$

ist $\mathfrak{K}_\varrho$ ein Körper von der Klasse II, und schließlich für

$$O_0 \leqq O \tag{33. 4}$$

ein Körper der Klasse III.

Hiermit ist die Schmidtsche Aufgabe vollständig gelöst. Denn konstruiert man für jedes zulässige O den durch (33. 1) eindeutig bestimmten Körper $\mathfrak{K}_\varrho$, so erhält man aus (30. 1)

$$(n-1)(V - V_\varrho) = -2\varrho_\varrho R(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_\varrho) \leqq 0. \tag{33. 5}$$

Daraus folgt für jeden zu $\mathfrak{K}_\varrho$ inkongruenten Körper

$$V - V_\varrho < 0.$$

Daß $V = V_\varrho$ nur dann gilt, wenn V zu V_ϱ kongruent ist, folgt aus (33. 5) unmittelbar. Denn in diesem Falle ist $R(\mathfrak{K}_\varrho, \mathfrak{K}_\varrho) = 0$ und aus dieser Bedingung folgt, daß die beiden Hälften O_1 bzw. O_2 zu den beiden symmetrischen Hälften, aus denen O_ϱ besteht, kongruent sein müssen. Hiermit ist aber $\mathfrak{K}$ bis auf eine Parallelverschiebung längs der ϑ_n-Linie (und im Falle III auch bis auf den Parameter q, der durch $O = O_\varrho$ festgelegt wird) eindeutig bestimmt.

---

[51]) Für den elliptisch-sphärischen Fall die üblichen Einschränkungen nach oben [vgl. (14. 9)].

34. Für die DARBOUX-SCHMIDTsche Aufgabe erhalten wir ähnliche Ergebnisse. Dort hat die Gleichung

$$O(\mathfrak{F}) = O(\mathfrak{F}_\varrho)$$

für jedes $O(\mathfrak{F})$, das der Ungleichung

$$O(\mathfrak{F}) > (n-1)\, W_{n-1} \int_a^b \psi^{n-2}(u)\, du = O(\mathfrak{F}^*)$$

genügt, nur eine Lösung[52]). Konstruiert man dann dieses eindeutig bestimmte Flächenstück, so erhält man aus (31. 1)

$$V(\mathfrak{F}) - V(\mathfrak{F}_\varrho) = -\frac{2\varrho_g}{n-1} R_n(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_\varrho) \leqq 0,$$

was die vollständige Beantwortung nebst der Einzigkeitsfrage enthält. Die Lösung unseres Problems ist für

$$O(\mathfrak{F}^*) < O < O(\mathfrak{F}_{\gamma_0})$$

ein Extremalflächenstück von der Klasse I und wird durch eine nichteuklidische Rotation einer Extremalen von der Klasse I erhalten. $O(\mathfrak{F}_\gamma)$ bedeutet hier die Hälfte von O_n und kann aus den vorherigen Ausführungen bestimmt werden.

Für

$$O(\mathfrak{F}_{\gamma_0}) \leqq O < O(\mathfrak{F}_0),$$

wobei $\mathfrak{F}_0$ das durch die Rotation der Extremalen C_0 erzeugte Flächenstück darstellt, haben wir als Lösung ein Extremalflächenstück von der Klasse II. Gilt nun

$$O(\mathfrak{F}_0) \leqq O,$$

so erhält man das entsprechende Extremalflächenstück durch teleskopartige Verschiebung von $\mathfrak{F}_0$ nach den positiven ϑ_n. Im Falle $K > 0$ treten nach oben Einschränkungen für q ein, die aus den entsprechenden Einschränkungen für das SCHMIDTsche Problem sofort zu erhalten sind.

35. Nun eine Schlußbemerkung: Bei der Ableitung der isoperimetrischen Gleichung (30. 1) spielte die Tatsache, daß $\mathfrak{K}$ durch die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ des „Zylinders"

$$\frac{\varphi(b)}{K} \leqq \frac{\varphi(u)}{K} \leqq \frac{\varphi(a)}{K} \tag{35. 1}$$

in zwei Teile $\mathfrak{D}_1$ bzw. $\mathfrak{D}_2$ zerlegt wird, eine wesentliche Rolle.

Wir wollen hier andeutungsweise zeigen, wie man durch das STEINERsche Symmetrisierungsverfahren diese Voraussetzung aufheben kann.

---

[52]) Für den elliptisch-sphärischen Fall treten, sobald man eine schlichte Überdeckung des Raumes verlangt, die üblichen Schranken nach oben ein. Man kann sie gleich der entsprechenden Schranke für die SCHMIDTsche Aufgabe annehmen.

Ist $\mathfrak{K}$ ein beliebiger Körper, von dem lediglich verlangt wird, daß seine Projektion längs ϑ_n den Ringraum

$$\frac{\varphi(b)}{K} \leqq \frac{\prod_1^{n-1} \varphi(\vartheta_\nu)}{K} \leqq \frac{\varphi(a)}{K}$$

vollständig ausfüllt, so konstruieren wir mit STEINER den zugehörigen symmetrischen Körper folgendermaßen: Es sei zuerst vorausgesetzt, daß die ϑ_n-Linie durch $P(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{n-1}, 0)$ die Oberfläche von $\mathfrak{K}$ in endlich vielen Randpunkten trifft, und es seien ϑ_i', ϑ_i'' $(i = 1, 2, \ldots, m)$ $(i = 1, 2, \ldots, \varrho)$ die ϑ_n-Koordinaten des i-ten „Eingangspunktes" bzw. „Ausgangspunktes" Wir setzen

$$\bar{\vartheta}_n = \frac{\sum_i (\vartheta_i'' - \vartheta_i'')}{m}, \quad \bar{\bar{\vartheta}}_n = -\bar{\vartheta}_n. \tag{35.2}$$

Läßt man P alle derartigen Punkte von $\mathfrak{K}$ durchlaufen, so beschreibt der Punkt $P(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}, \bar{\vartheta}_n)$ bzw. $P(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}, \bar{\bar{\vartheta}}_n)$ den Rand eines in bezug auf $\vartheta_n = 0$ symmetrischen Körpers $\bar{\mathfrak{K}}$, den wir als symmetrisierten Körper bezeichnen werden.

Die Punktmenge $\mathfrak{N}$ der Punkte P, welche die Eigenschaft haben, daß die durch P gehende ϑ_n-Linie die Oberfläche $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{K}$ in unendlich vielen Punkten schneidet, ist nach dem früher Gesagten eine Punktmenge vom $(n-1)$-dimensionalen Inhalt Null. Es existieren also in beliebiger Nähe eines solchen Punktes P innere Punkte P', die durch (35.2) definiert werden, und wir können dann für alle Punkte von $\mathfrak{N}$ den entsprechenden Punkt $\bar{P}$ durch $\bar{P} = \lim_{P' \to P} \bar{P}'$ definieren. Nun beweist man für $\bar{\mathfrak{K}}$: Bei der Symmetrisierung bleibt das Volumen V unverändert, während O im allgemeinen kleiner wird, also $\bar{O} \leqq O$. Die Gleichheit $\bar{O} = O$ gilt nur dann, wenn $\mathfrak{K}$ und $\bar{\mathfrak{K}}$ kongruent sind, also wenn $\mathfrak{K}$ schon in bezug auf $\vartheta_n = 0$ symmetrisch ist.

Schreibt man die isoperimetrische Gleichung für den symmetrisierten Körper $\bar{\mathfrak{K}}$, so wird

$$(n-1)(V - V_\varrho) = \varrho_\varrho(\bar{O} - O_\varrho) - 2\varrho_\varrho R(\bar{\mathfrak{K}}, \mathfrak{K}_\varrho)$$

oder

$$(n-1)(V - V_\varrho) = \varrho_\varrho(O - O_\varrho) - \varrho_\varrho(O - \bar{O}) - 2\varrho_\varrho R(\bar{\mathfrak{K}}, \mathfrak{K}_\varrho).$$

Wegen $\bar{O} \leqq O$ ist also

$$(n-1)(V - V_\varrho) \leqq \varrho_\varrho(O - O_\varrho) - 2\varrho_\varrho R(\bar{\mathfrak{K}}, \mathfrak{K}_\varrho) \tag{35.3}$$

und wir können für den Extremfall schließen wie vorhin.

Der Fall $n = 2$ und der Grenzfall $a = 0$.

36. Nach dieser ausführlichen Behandlung des Falles $n > 2$ wenden wir uns kurz dem Fall $n = 2$ zu. Wir haben schon früher erwähnt, daß für $n = 2$ die Klasse II leer ist. Wählt man nämlich in (13. 3) $\bar{\gamma} = \gamma$, so ist für jedes γ aus dem Intervall

$$0 \leqq \gamma < \frac{\pi}{2}$$

(36. 1)
$$v_a(\gamma) = \int_a^b \frac{Q_{\gamma\gamma}\, du}{\varphi \sqrt{M^2 - Q_{\gamma\gamma}^2}} = 0,$$

mit

$$Q_{\gamma\gamma} = Q(u) \cos\gamma.$$

Daß $v_a(\gamma)$ nun gleich Null ist, kann man am besten mit Hilfe der in Nr. 5 eingeführten Veränderlichen

$$\sigma = \int_a^u \frac{dt}{\varphi(t)}$$

einsehen, wodurch der Streifen

$$a \leqq u \leqq b$$

auf den Streifen

$$0 \leqq \sigma \leqq \varrho \qquad \left(\varrho = \int_a^b \frac{dt}{\varphi(t)}\right)$$

abgebildet wird.

Nach den Ergebnissen von Nr. 9 ist aber

$$Q(u) = F(\sigma) = \frac{Q(b)}{\psi(\varrho)} \{\bar{\psi}(\sigma) + \bar{\psi}(\sigma - \varrho)\},$$

wobei der Strich immer die mit $-K$ an Stelle von K gebildete Funktion bedeutet. Dies kann man auch direkt nachprüfen, indem man feststellt, daß $F(\sigma)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d\sigma^2} - K y = 0$$

genügt.

Führt man hier durch

(36. 2)
$$x = \sigma - \frac{\varrho}{2}$$

die Veränderliche x ein, so wird

$$Q_{\gamma\gamma} = Q(b) \frac{\bar{\psi}(x)}{\bar{\psi}\left(\frac{\varrho}{2}\right)} \cos\gamma.$$

Hiermit erhält man die Differentialgleichung der Extremalen in der x, v-Ebene, wenn man noch dazu $2\,\varrho_0 = \varrho$ setzt, in der Form:

$$\frac{dv}{dx} \pm \frac{\overline{\psi}(x)\cos\gamma}{\sqrt{\psi^2(\varrho_0) - \overline{\psi}^2(x)\cos^2\gamma}} = 0.$$

Daß das Integral (36. 1) gleich Null ist, folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß dieses mittels (36. 3) in das Integral

$$v_a(\gamma) = \int_{-\varrho_0}^{+\varrho_0} \frac{\overline{\psi}(x)\cos\gamma\,dx}{\sqrt{\overline{\psi}^2(\varrho_0) - \overline{\psi}^2(x)\cos^2\gamma}}$$

übergeht, das wegen $\overline{\psi}(-x) = -\overline{\psi}(x)$ verschwinden muß. Die betreffenden Extremalen bestehen aus zwei in bezug auf die x-Achse symmetrischen Kurvenbögen, Lösungen der obigen Differentialgleichung. Diese Extremalen können auch in x und v direkt erhalten werden, wenn man die Aufgabe von Erhard Schmidt unter Zugrundelegung der Metrik

$$ds^2 = \varphi^2(u)\{dx^2 + dv^2\}$$

löst, wobei u mit x durch die Gleichung

$$x = -\frac{\varrho}{2} + \int_a^u \frac{dt}{\varphi(t)}$$

verbunden ist. Wir verzichten indessen hier auf eine ausführlichere Behandlung dieses speziellen Falles, da dieser schon von Erhard Schmidt in seiner vorhin erwähnten Arbeit und in allgemeinerem Zusammenhang, sowie von mir mit Methoden dieser Arbeit studiert wurde[53]).

37. Zum Schluß soll noch kurz für $n > 2$ der Grenzfall $a \to 0$ behandelt werden. Für $a_0 \to 0$ geht $\mathfrak{H}_{ab}$, wie aus seiner Definition folgt, in den „Zylinder"

$$\frac{\varphi(b)}{K} \leqq \frac{\prod_1^{n-1} \varphi(\vartheta_\nu)}{K} \leqq \frac{1}{K} \qquad (K \gtrless 0)$$

über und die Ausdrücke $\frac{Q_{\gamma\bar{\gamma}}}{M}$, $\frac{Q_\gamma}{M}$, $\frac{Q}{M}$ konvergieren gegen die Polynome

---

[53]) l. c. Fußnote 2, sowie auch: Zum isoperimetrischen Problem für die nichteuklidischen Geometrien. Math. Ann. 118 (1943), S. 636–686.

$\frac{\omega(u)}{\omega(b)}\cos\gamma, \frac{\omega(u)}{\omega(b)}\cos\gamma, \frac{\omega(u)}{\omega(b)}$. Die Ausdrücke $v_a(\gamma, \bar{\gamma})$, $v_a(\gamma)$ konvergieren, wie man leicht feststellen kann, gegen

$$v_0(\gamma) = \int_0^b \frac{\omega(x)\cos\gamma\, dx}{\varphi\sqrt{\omega^2(b) - \omega^2(x)\cos^2\gamma}}, \tag{37.1}$$

also gegen den Punkt, in dem der durch $u = \pm b$, $v = 0$ gehende Bogen des geodätischen Kreises ($v \geqq 0$) mit dem geodätischen Krümmungsradius $\frac{\omega(b)}{\cos\gamma}$ die v-Achse schneidet. Ferner ist der Winkel der Normalen $\bar{n}$ in ($u = 0$, $v = v_0$) wegen

$$\cos(n, u) = \frac{Q_{\gamma\bar{\gamma}}}{M} = \frac{\omega(u)}{\omega(b)}\cos\gamma$$

gleich Null, die „Grenzextremale" trifft also die v-Linie senkrecht. Somit besteht die „Extremalkurve" im Falle II aus dem halben Bogen des vorhin erklärten geodätischen Kreises und der Strecke

$$0 \leqq v \leqq v_0 \qquad \left(0 \leqq \gamma \leqq \frac{\pi}{2}\right).$$

Im Falle III entstehen die Extremalen durch Auseinanderziehen der beiden symmetrischen Hälften der Extremalen C_0

$$v = \pm \int_u^b \frac{\omega(x)\, dx}{\varphi\sqrt{\omega^2(b) - \omega^2(x)}}.$$

Daß im elliptisch-sphärischen Fall (37. 1) kleiner als $\frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ ausfällt und somit C_0 notwendigerweise im Fundamentalbereich liegt, ist leicht aus dem früher Gesagten zu schließen und kann auch in meinen vorhin erwähnten Arbeiten nachgelesen werden. Interessant ist die Tatsache, die ich hier auch besonders hervorheben möchte, daß die Extremalen der Klasse II und III eine Ecke auf der v-Achse [bei $v = \pm v_0(\gamma)$] aufweisen Extremalen von der Klasse I gibt es nicht, da das Integral (37. 1) für jedes γ aus dem Intervall $0 \leqq \gamma \leqq \frac{\pi}{2}$ positiv ist.

Die Oberflächen $O_{\gamma\bar{\gamma}}$, O_γ konvergieren für $a \to 0$ gegen

$$O_\gamma = 2(n-1)\, W_{n-1} \int_0^b \frac{\omega(b)\, dx}{\sqrt{\omega^2(b) - \omega^2(x)\cos^2\gamma}},$$

also gegen die Oberfläche derjenigen geodätischen Kugel, welche durch eine nichteuklidische Rotation der Extremalen

$$v \pm \int_u^b \frac{\omega(x) \cos\gamma \, dx}{\varphi \sqrt{\omega^2(b) - \omega^2(x) \cos^2\gamma}} = 0$$

entsteht. Für die Extremalflächen von der Klasse III wird schließlich

$$O_q = 2(n-1) W_{n-1} \int_0^b \frac{\omega(b) \, dx}{\sqrt{\omega^2(b) - \omega^2(x)}} + 2(n-1) W_{n-1} q \, \psi^{n-2}(b) \varphi(b).$$

Für $n = 2$ ändert die Verschiebung des Streifens an dem Sachverhalt nichts, es gibt wieder Extremalen von der Klasse I und III, die durch $u = 0$, $u = b$ gehen. Ähnliche Betrachtungen gelten auch für die Aufgabe von Darboux-Schmidt, auf die hier aber nicht mehr eingegangen wird, da alles ziemlich wörtlich übertragbar ist. In einer daran anschließenden Arbeit wird außer der Steinerschen Symmetrisierung noch die allgemeinere, ebenfalls von Erhard Schmidt stammende Aufgabe behandelt, nämlich derjenige Fall, wo a nicht konstant ist, sondern nur der Ungleichung

$$0 \leqq a_0 \leqq a$$

unterworfen ist. Dabei wird noch b durch die Vorgabe von O bestimmt.

(Eingegangen am 9. 7. 1943.)

Berichtigungen

zu der Arbeit von O. Zaubek in Bd. 49, S. 197–218.

S. 211: In der ersten Zeile von Satz 24 ist vor dem Worte „Maßfunktion" das Wort „regulären" einzuschalten.

S. 212, Zeile 6 v. u.: Statt „eine in jedem Punkte des Raumes" soll es heißen „zu jedem Punkte des Raumes eine dort"

S. 212, Zeile 5 v. u.: Statt „23" soll es heißen „22".